http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2014v9n2p189

Elipse, parábola e hipérbole em uma geometria que não é euclidiana

Ellipse, parabola and hyperbola in a geometry that isn't euclidean

José Carlos Pinto Leivas
leivasjc@unifra.br

Resumo

Neste artigo, apresenta-se uma pesquisa qualitativa realizada com sete estudantes de uma disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica, a qual teve por objetivo responder à questão: como alunos de um mestrado profissionalizante em ensino de Matemática interpretam e representam elipses, parábolas e hipérboles utilizando a métrica dos catetos? O trabalho foi realizado com duas duplas e um trio, para quem foi proposto resolver uma questão a ser entregue por escrito ao professor pesquisador. A atividade constou como avaliação para a aprendizagem dos estudantes e os resultados comprovaram que todos conseguiram interpretar e representar, corretamente, cônicas na métrica dos catetos, caracterizando-as, assim, numa geometria não euclidiana, a chamada Geometria do Táxi ou Geometria Urbana.

Palavras chave: Cônicas. Geometria do Taxi. Métricas. Geometrias não euclidianas.

Abstract

In this article we present a qualitative research with seven students of a discipline Linear Algebra and Analytic Geometry, which aimed to answer the question: how do students of a professional master's degree in teaching Mathematics interpret and represent ellipses, parabolas and hyperbolas using the metric of the cathetus? The study was conducted with two doubles and a trio, to whom it was proposed to resolve a question to be delivered in writing to the teacher researcher. The activity consisted as evaluation for student's learning and the results showed that all were able to correctly interpret and represent the conics on the metric of the cathetus, characterizing them as well, in a geometry who isn't euclidean, called the Taxi, Cab or Urban Geometry.

Keywords: *Conics. Urban Geometry. Metrics. Non euclidean geometry.*

Introdução

Ao se falar em Geometria, logo vem à mente os estudos de Euclides ou, até mesmo, indicativos sobre o próprio nome, devido à necessidade de medições e demarcações de terras oriundas das invasões do Nilo por causa das cheias que ocorriam à época. Entende-se que o termo, nos dias de hoje, vai muito além, especialmente após a inclusão da Geometria Analítica por René Descartes, que muda, consubstancialmente o foco até então existente. Por outro lado, a Geometria Sintética se encarrega da construção de formas e lugares geométricos por si mesmos, independente de fórmulas, as quais mudam o foco analítico (KLEIN,1927).

Em tempos mais atuais, a Geometria Fractal, ou Geometria da Natureza (YYY, XXXa, 2012), estuda espaços em que a dimensão euclidiana não tinha alcance, como objetos cuja dimensão é fracionária, o que amplia as dimensões associadas à largura, comprimento e profundidade do mundo real euclidiano ou às dimensões inteiras infinitas da Geometria Analítica.

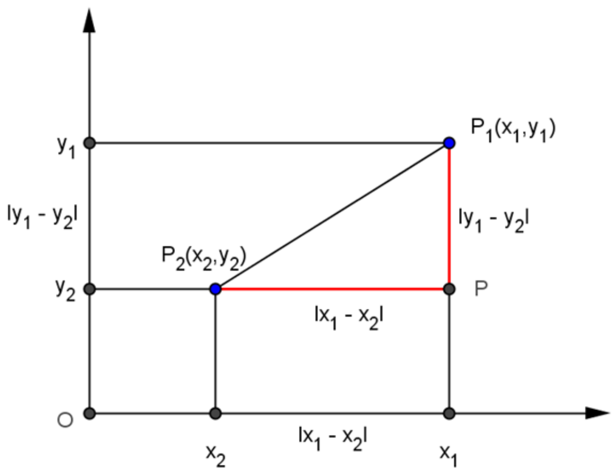
Também recente, a Geometria Topológica envolve outros aspectos, como a questão da continuidade, sendo possível l a obtenção de objetos geométricos com um único lado, ou seja, sem fronteiras como, por exemplo, a Faixa de Möebius ou a Garrafa de Klein. (SILVA, 2013).

Menos recentes são as Geometrias Não-Euclidianas - Elíptica e Hiperbólica, criadas no final do século XVIII e início do XIX, as quais ainda são muito pouco conhecidas e estudadas no Brasil, particularmente na formação inicial dos professores de Matemática e na escola básica. (XXXc,d,e, 2009, 2011, 2013).

Uma geometria que não é euclidiana e que tem chamado a atenção é a denominada Geometria do Táxi ou Geometria Urbana (KALEFF, 2004; FOSSA, 2001), na qual se estuda um espaço geométrico comum, mas que não é refletido via de regra, nos cursos de Geometria, e que está no quotidiano dos indivíduos. É assim designada, pois utiliza uma forma de medir distâncias entre dois pontos que não é a usual, como a usada na Geometria Euclidiana.

Define-se, nessa Geometria, a distância entre dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ como sendo o número real não negativo denotado por $d(P_1, P_2)$.

Figura 1: Métrica dos Catetos.



Observe-se que essa forma de obter a distância entre os dois pontos considerados não é, geometricamente, a medida do segmento que vai de P_1 até P_2, mas a soma das medidas dos segmentos P_1 a P e P a P_2, ou seja, é a soma das medidas dos catetos do triângulo P_1PP_2, sendo por isso sua denominação. Além disso, essa é a forma usual de se deslocar, em uma cidade urbanizada, ao contrário do que ocorreria se a geometria urbana fosse a de Euclides.

É com base nessa métrica que se desenvolveu a presente investigação a partir da própria prática do investigador com alunos de um mestrado profissionalizante em ensino de Matemática. Teve-se como princípio norteador verificar se, ao trabalhar conceitos de distâncias não euclidianas em uma disciplina de mestrado, os alunos, ao final da mesma, tinham adquirido conhecimento suficiente para interpretar analítica e geometricamente elipses, parábolas e hipérboles nessa métrica.

Para autores como Ponte (2004, p.2),

> a investigação dos profissionais sobre a sua prática pode ser importante por várias as razões. Antes de mais nada, ela contribui para o esclarecimento e resolução dos problemas; além disso, proporciona o desenvolvimento profissional dos respectivos actores e ajuda a melhorar as organizações em que eles se inserem; e, em certos casos, pode ainda contribuir para o desenvolvimento da cultura profissional nesse campo de prática e até para o conhecimento da sociedade em geral.

Ainda, segundo o autor, investigar não significa, necessariamente, tratar com problemas muito sofisticados. Para Ponte (2005, p. 126), "Ao realizar um trabalho de investigação, o aluno deve saber que esse trabalho irá ser avaliado, tal como de resto todo o trabalho que realiza na disciplina de Matemática." Dessa forma, entende-se pertinente realizar a investigação juntamente com um processo avaliativo da disciplina, de modo que os alunos demonstrem interesse por sua realização.

Entende-se, como o autor, o papel que a Geometria desempenha nos processos investigativos, pela sua riqueza de problemas e por esses representarem situações da realidade e do quotidiano das pessoas, aliadas à própria Matemática em si e sua compreensão significativa. Além disso, permite "desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação." (Ibidem, p. 71).

Conforme essa visão, refletir sobre investigações em Geometria, de modo a discutir como determinados assuntos em Matemática podem ser acoplados nos currículos, tanto da escola básica, quanto do ensino superior são importantes na formação dos professores, levou à pesquisa que ora se apresenta, a fim de avaliar sua viabilidade nesses níveis, uma vez que aborda o tema "módulo", tratado nesses níveis, cada um em seu devido patamar de profundidade.

Por essas razões, recorre-se aos Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN (BRASIL, 1998), para indicar expectativas a respeito de critérios para avaliação a partir de objetivos e conteúdos relacionados à Matemática, bem como “as possibilidades de aprendizagem decorrentes de cada etapa do desenvolvimento cognitivo [...]” (p. 80). Além disso, o documento ainda indica que

> os critérios de avaliação apontam as experiências educativas a que os alunos devem ter acesso e que são consideradas essenciais para o desenvolvimento e socialização. Nesse sentido, eles devem refletir de forma equilibrada os diferentes tipos de capacidades e as três dimensões de conteúdos (conceitos, procedimentos e atitudes), além de servir para encaminhar a programação e as atividades de ensino e aprendizagem. (Ibidem, p. 80).

Por isso, é fundamental que, em um mestrado profissional, sejam desenvolvidas atividades que verifiquem tais possibilidades de aprendizagem, bem como experienciem processos avaliativos que visem à aquisição e ao desenvolvimento das capacidades citadas. Assim, ao desenvolver uma disciplina, mesmo em nível mais avançado, o professor estimula a reflexão e possibilidades avaliativas para o exercício profissional dos mestrandos, em atendimento ao objetivo do mestrado dirigido aos professores em exercício.

Os PCN indicam, ainda, para o Ensino Fundamental, o objetivo geral: “Selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente” (BRASIL, 1998a, p. 48). Dessa forma, trazer novas formas de obter distâncias é relevante para os indivíduos poderem aplicar conhecimentos matemáticos no cotidiano escolar, como é o caso do tratamento de medidas na denominada Geometria do Táxi, em que a métrica utilizada é a dos catetos. Medir é um dos tópicos encontrados no referido documento, dentro do bloco Grandezas e Medidas, o qual é caracterizado pela sua relevância social. Assim, a forma usual de realizar deslocamentos em espaços urbanizados não é a euclidiana, pois os indivíduos se deslocam ao longo das quadras, assemelhando-se ao deslocamento ao longo dos catetos de um triângulo retângulo e não em uma linha reta.

No sétimo ano do ensino fundamental, ao iniciar o estudo dos números inteiros, em geral, a questão de módulo surge para identificar dois números que se situam na reta numérica, simetricamente em relação à origem. Por vezes, esse conceito não é bem formalizado e os alunos carregam certos obstáculos na sequência de seus estudos como, por exemplo, no ano seguinte, ao abordarem a Álgebra, apresentam dificuldades na compreensão de como determinar os valores da variável, que possuem um certo valor absoluto.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), há indicativo para escolher os conteúdos a serem tratados no ensino médio. Para tal, o documento afirma que devem ser levados em consideração os propósitos da formação básica. “Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano" (p. 69). Dessa forma, saber calcular distâncias em espaços não euclidianos, como o que se está aqui abordando, parece indicar possibilidades de instrumentalizar os estudantes para tais resoluções.

No que diz respeito ao estudo de funções, o documento orienta: "Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido)". (Ibidem, p. 72). Ainda orienta sobre em que deve ser ancorado o bloco de Geometria, o qual deve permitir, a exemplo do conteúdo de funções, a habilidade de resolução de problemas práticos tais como "orientação no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida" (p. 75). Além disso, sugere que se deva desenvolver no aluno do ensino médio a habilidade de "[...] representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas [...]" (p. 75).

Para finalizar a incursão no referido documento, reporta-se ao que ele indica para o ramo da Geometria Analítica a ser trabalhada no ensino médio, a qual possibilita articular com Geometria e Álgebra e, a fim de que tal articulação produza significado para os estudantes, o professor

> deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas[...].
>
> [...] Memorizações excessivas devem ser evitadas; não vale a pena o aluno memorizar a fórmula da distância de um ponto a uma reta, já que esse cálculo, quando necessário, pode ser feito com conhecimento básico de geometria analítica (retas perpendiculares e distância entre dois pontos. (Ibidem, p. 77).

Dessa maneira, para alcançar o objetivo, não se deve, apenas, tratar das equações, como ocorre usualmente esse estudo, desvinculado da interpretação geométrica.

Essas razões justificam pesquisas que envolvam estudos sobre geometrias não euclidianas, objeto principal das investigações do autor. Nesse sentido, a investigação sobre conexões entre Álgebra, oriundas da Geometria Analítica, com Geometria, pelas curvas elipse, parábola e hipérbole, parece seguir a recomendação expressa nos documentos oficiais, sendo adequado seu desenvolvimento num mestrado cuja clientela são professores em ação, em sua maioria, na escola básica.

Além dessa conexão, utilizar a função modular para produzir significado na aplicação a um problema de determinação de distâncias, geralmente não trabalhado na formação inicial dos professores, parece fortalecer e justificar o estudo aqui apresentado.

A Pesquisa

No final do ano letivo de 2012, na disciplina Fundamentos de Álgebra Linear e Geometria Analítica, num curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, após ser trabalhado o conteúdo distâncias no plano e no espaço, em diversas métricas, o professor e autor do artigo propôs a sete alunos, a realização de uma atividade avaliativa, a qual foi constituída de três questões que foram respondidas por duas duplas e um trio, os quais foram escolhidos por sorteio pelo professor da disciplina.

Compreende-se que a pesquisa seja de cunho qualitativo, no sentido apontado por Moreira (2011), pois o pesquisador tem interesse especial nos significados que os estudantes deram para as atividades realizadas. Além disso, reforça-se com o fato de que "Os fenômenos de interesse da pesquisa qualitativa em ensino têm também a ver com ensino propriamente dito, aprendizagem, currículo, avaliação e contexto, mas são analisados sobre outros pontos de vista". (Ibidem, p. 4).

Segundo o mesmo autor, o interesse do pesquisador na presente pesquisa não foi testar determinada hipótese, mas sim desenvolvê-la, o que foi concretizado com a realização correta das atividades das três equipes, consolidando o processo de aprendizagem inicialmente previsto pelo investigador na disciplina, bem como a reflexão do mesmo a própria prática docente na disciplina em questão. Além disso, houve a possibilidade de se discutir como introduzir no currículo escolar e universitário mudanças na forma de abordagem de um dado conteúdo.

Com o objetivo de responder à questão "como alunos de um mestrado profissionalizante em ensino de Matemática interpretam e representam elipses, parábolas e hipérboles utilizando a métrica dos catetos?" foi proposto a cada uma das equipes formadas uma questão envolvendo uma delas, a qual deveria ser resolvida e entregue por escrito ao professor pesquisador. O tempo de duração da atividade foi de duas horas aula e ocorreu sem consulta por parte dos estudantes. Destaca-se o fato de que os alunos tiveram de produzir conhecimentos a partir de pressupostos desenvolvidos na disciplina, uma vez que as questões não tinham sido resolvidas na métrica dos catetos, objeto da presente investigação. Ao discutir as diversas métricas durante o desenvolvimento da disciplina, ela foi apresentada, analisada e aplicada a uma representação em particular, a saber, a relacionada à circunferência no plano, produzindo o que pode ser chamado de "bola quadrada" (XXXb, 2003). Entretanto, não foi mencionado como seriam as representações das cônicas, objeto desta investigação.

Para a primeira dupla, constituída pelos alunos aqui denominados por G e R, iniciais de seus primeiros nomes, coube a atividade a seguir descrita.

1. Considere a base ortonormal canônica do R^2 e use a definição do lugar geométrico chamado elipse para obter sua representação quando a métrica empregada é a dos catetos. Considere o centro na origem, os focos $F_1=(-4,0)$ e $F_2(4,0)$ com o eixo maior medindo 12cm [distância fixa].

Ao trio, denominados por D, E e L, coube a atividade 2, apresentada abaixo.

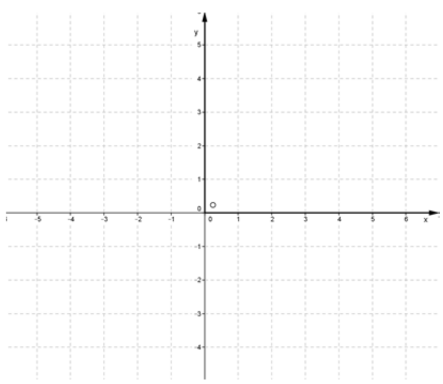
2. Considere a base ortonormal canônica do R^2 e use a definição do lugar geométrico chamado parábola para obter sua representação geométrica quando a métrica empregada é a dos catetos. Considere o vértice na origem, o foco $F=(2,0)$ e a diretriz sendo a reta $x=-2$.

Para a dupla Gui e N coube a atividade 3, conforme segue.

3. Considere a base ortonormal canônica do R^2 e use a definição do lugar geométrico hipérbole para obter sua representação geométrica quando a métrica empregada é a dos catetos. Considere o vértice na origem, os focos $F_1=(0,-5)$ e $F_2=(0,5)$ e o eixo real ou transverso medindo 6cm.

Foi distribuída, juntamente com o enunciado da atividade escrita, uma grade, como a apresentada na figura 2, a seguir, a fim de que fosse uniformizada a representação do lugar geométrico, além de folhas em branco para que os estudantes efetuassem os cálculos necessários.

Figura 2: grade para a representação geométrica.



As três equipes conseguiram realizar as atividades corretamente, comprovando que tiveram um excelente aproveitamento no transcorrer da disciplina, adquirindo os conceitos necessários para o desenvolvimento e aplicação em atividades não rotineiras.

A dupla G e R utilizou o conceito de elipse corretamente para obter a equação a seguir.

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 12$$
$$|x+4| + |y-0| + |x-4| + |y-0| = 12$$

A partir dessa definição, os alunos usaram a função modular

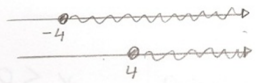
$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases},$$

corretamente, obtendo oito possibilidades de combinação dos valores para os termos que se encontram sob módulo, inclusive, elaborando esquemas gráficos, como pode ser observado nas transcrições a seguir.

- Desmembramento da função modular para $x \geq 4 \; e \; y \geq o$.

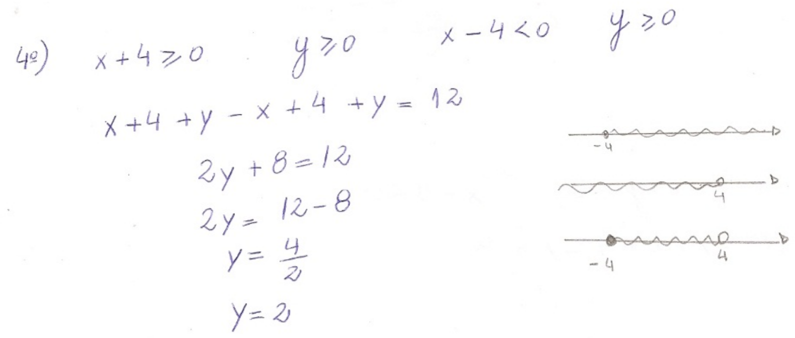
1º) $x+4 \geqslant 0 \qquad y \geqslant 0 \;.\; x-4 \geqslant 0 \qquad y \geqslant 0$

$$x+4+y+x-4+y = 12$$
$$2x+2y = 12$$
$$x+y = 6$$
$$y = -x+6$$



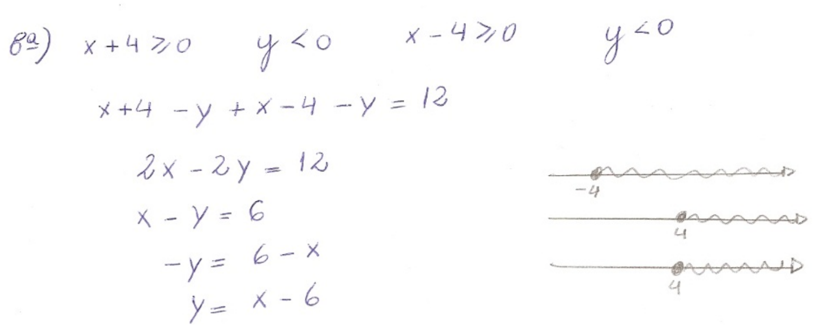
Pode-se notar, desse primeiro desdobramento, que a dupla definiu o lugar geométrico como um segmento de reta com coeficiente angular -1, logo, formando um ângulo de 135º no sentido positivo do eixo horizontal, cujos valores para x são maiores ou iguais a 4 e os valores de y maiores ou iguais a zero (região 1 na figura 3).

- Desmembramento da função modular para $-4 \leq x \leq 4 \; e \; y \geq o$.



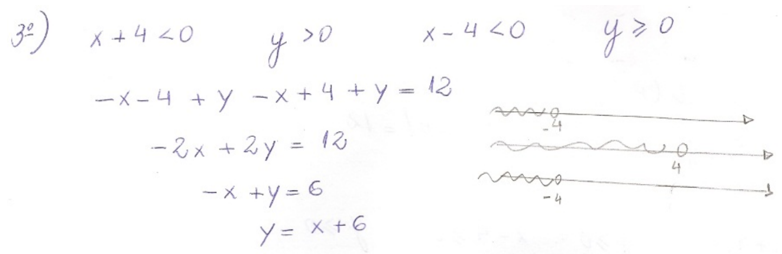
Nessa situação, o lugar geométrico é um segmento de reta horizontal, pois é dado pela função constante y = 2 (região 2 na figura 3)

- Desmembramento da função modular para $x \geq 4 \; e \; y < o$.



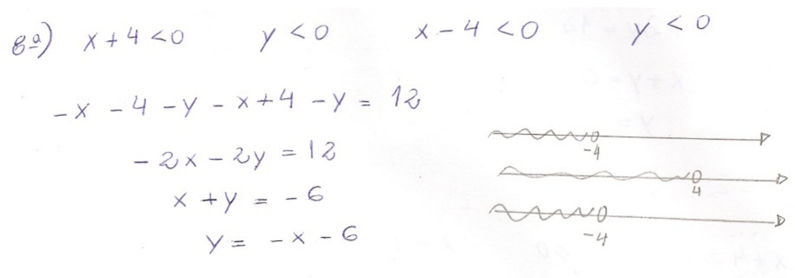
Nessa situação, a dupla verificou que o gráfico é dado por um segmento de reta com inclinação de 45º, uma vez que o coeficiente angular é igual a 1 (região 3 na figura 3).

- Desmembramento da função modular para $x < -4 \; e \; y > o$.



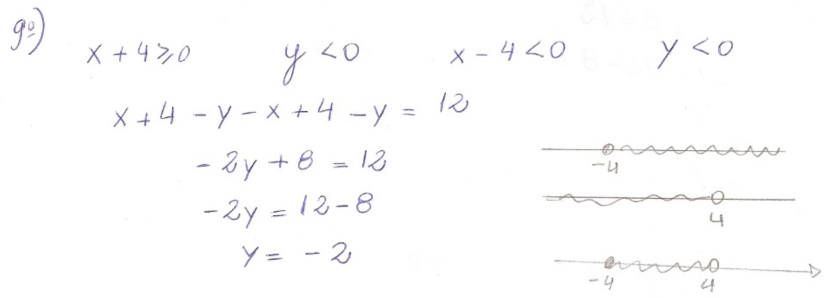
Aqui verificaram que o lugar geométrico se assemelha ao anterior, ou seja, é também um segmento de reta com a mesma inclinação, variando apenas o coeficiente linear, ou seja, o ponto onde corta o eixo vertical. No caso anterior, isso ocorreu para x=6 e neste para x=-6 (região 4 na figura 3).

- Desmembramento da função modular para $x < -4 \; e \; y < o$.



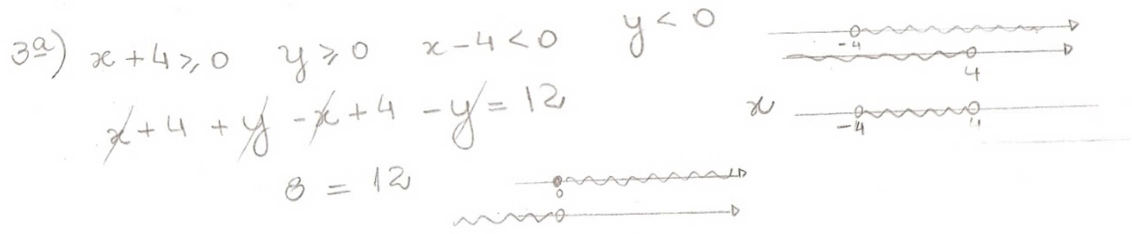
Observa-se que a variação para x, nessa situação, é a mesma do caso anterior, apenas os valores de y é que se tornam positivos, ao contrário daquele. Assim, o segmento de reta tem inclinação de 135º, pois o coeficiente angular é igual a -1 e o linear é igual a -6, ou seja, o eixo horizontal é tocado no ponto x = -6 (região 5 na figura 3).

- Desmembramento da função modular para $-4 < x < 4 \; e \; y < o.$



Nessa situação, o lugar geométrico é um segmento de reta horizontal (função constante), passando pelo ponto y = -2 (região 6 na figura 3).

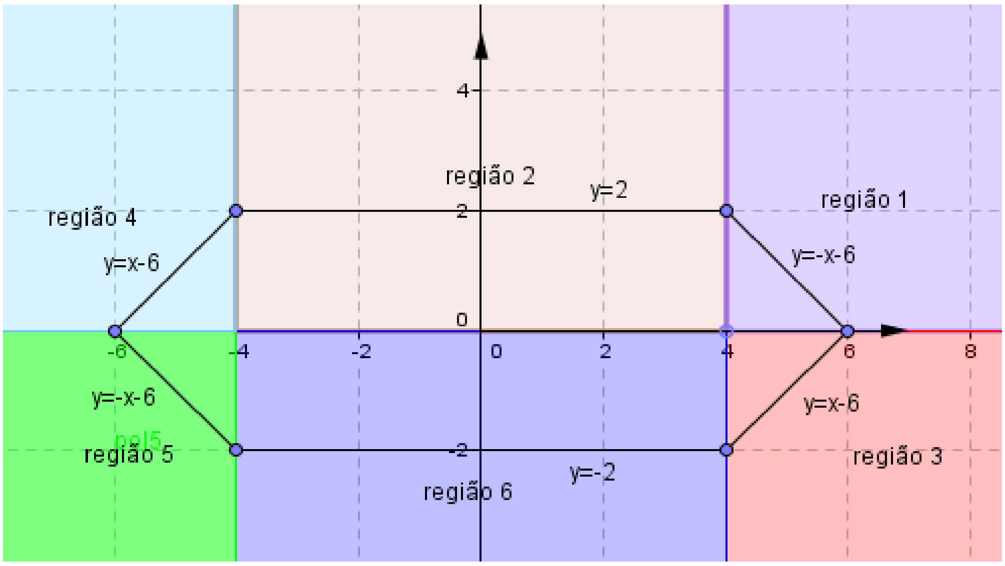
Observa-se que, nas transcrições dos cálculos da dupla, ocorre uma duplicidade na numeração do 8º desdobramento. Indagada sobre isso, posteriormente, a dupla explicou que os cálculos tinham sido feitos em outro espaço e, ao transcreverem, não atentaram para isso. Argumentaram que não apresentaram os demais cálculos nesse espaço pois, nos demais desdobramentos, chegavam a incoerências ou impossibilidades, como no exemplo que segue.



Feita a análise por regiões, a dupla fez o esboço na grade 1, onde há uma elipse. Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é igual a uma distância fixa dada [igual ao eixo maior da elipse]. Muito embora tivesse o conceito de elipse bem formado, o que lhes permitiu realizar os cálculos convictamente, houve incredibilidade na imagem obtida, pois não imaginavam uma elipse, tida como uma curva, sendo formada por segmentos de reta.

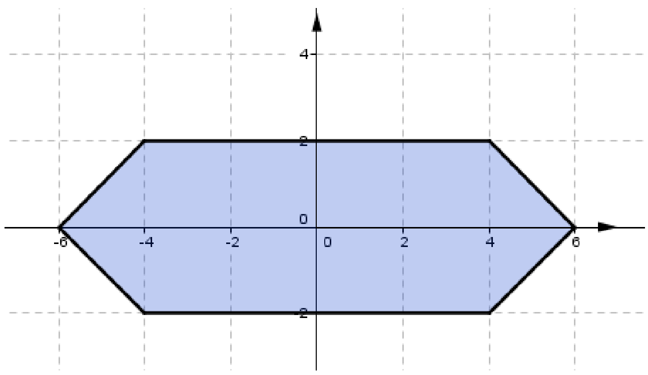
Optou-se por representar os setores utilizando o software GeoGebra, como na figura 3, indicando as respectivas regiões acima descritas. Em cada setor é indicada a respectiva lei de formação.

Figura 3: setores e respectivas leis de formação.



A partir dessa localização oriunda do desmembramento da função modular nos respectivos domínios, pode-se ilustrar a elipse e a região limitada por ela na figura 4, na situação proposta na atividade. Obviamente que, mudando os dados do enunciado, outras configurações aparecerão com novos eixo de simetria, focos e vértices.

Figura 4: elipse e a região limitada por ela.



A equipe formada pelo trio D, E e L realizou a atividade 2, a qual consistia em fazer um estudo da parábola na métrica dos catetos. Para isso, como indicado antes, foi orientado para considerar o vértice na origem, o foco F=(2,0) e a diretriz, sendo a reta x=-2. O grupo foi bem mais sucinto do que o anterior, talvez pelo número menor de possibilidades que deveriam ser levadas em conta ao abrirem os módulos oriundos da definição. Partiram dessa definição, como não poderia deixar de ser, como no caso anterior, entretanto, não utilizaram uma nomenclatura adequada, como pode ser notado a seguir.

$$d|FP| = d|P'P|$$
$$|2-x| + |0-y| = |x+2|$$

→ combinações

Observa-se, na seta indicando combinações, que, na página seguinte, o grupo fez o desmembramento dos módulos a partir da variação para x. Uma questão de forma que chama a atenção é a falta de explicitação do que representa cada uma das letras, bem como as respectivas coordenadas. Por sua vez, distingue-se a organização na maneira de encadear o desenvolvimento, como pode ser constatado no que segue.

1º) $\begin{array}{ll} 2-x \geqslant 0 & x \leq 2 \\ -y \geqslant 0 & x \geqslant -2 \\ x+2 \geqslant 0 & y \leq 0 \end{array}$ $\quad y = -2x$

2º) $\begin{array}{ll} 2-x < 0 & \\ -y < 0 & x > 2 \\ x+2 < 0 & y > 0 \\ & x < -2 \end{array}$ $\quad y = -2x$

3º) $\begin{array}{ll} 2-x \geqslant 0 & x \leq 2 \\ -y \geqslant 0 & y \leq 0 \\ x+2 < 0 & x < -2 \end{array}$ $\quad y = 4$

4º) $\begin{array}{ll} +2-x \geqslant 0 & x \leq 2 \\ -y < 0 & y > 0 \\ x+2 < 0 & x < -2 \end{array}$ $\quad y = -4$

5º) $\begin{array}{ll} 2-x \geqslant 0 & x \leq 2 \\ -y < 0 & y > 0 \\ x+2 \geqslant 0 & x \geqslant -2 \end{array}$ $\quad y = 2x$

6º) $\begin{array}{ll} 2-x < 0 & x > 2 \\ -y \geqslant 0 & y \leq 0 \\ x+2 \geqslant 0 & x \geqslant -2 \end{array}$ $\quad y = -4$

7º) $\begin{array}{ll} 2-x \geqslant 0 & x \leq 2 \\ -y < 0 & x \geqslant -2 \\ x+2 \geqslant 0 & y > 0 \end{array}$ $\quad y = 2x$

8º) $\begin{array}{ll} 2-x < 0 & x > 2 \\ -y < 0 & y > 0 \\ x+2 \geqslant 0 & x \geqslant -2 \end{array}$ $\quad y = 4$

9º) $\begin{array}{ll} +2-x < 0 & x > 2 \\ -y \geqslant 0 & y \leq 0 \\ x+2 < 0 & x < -2 \end{array}$ $\quad y = 2x$

Embora tenham alcançado o objetivo, fazendo a construção correta do lugar geométrico, considera-se que um detalhamento maior dos cálculos se faz necessário, uma vez que não fica explicitado que leis e campos de definição foram utilizados na representação, ainda mais considerando-se tratar da formação de professores. Por essa razão, no que segue, apresenta-se um detalhamento do processo construtivo.

Considere que parábola é o lugar geométrico de um ponto que se move num plano de maneira que sua distância a uma reta fixa desse plano (diretriz) é sempre igual à sua distância a um ponto fixo no mesmo plano (foco) e não situado sobre a reta.

Tome a reta x = -2 como diretriz da parábola de vértice na origem e foco no eixo dos x, sendo F(2,0). Obtenha a equação e a representação da parábola usando a métrica dos catetos. Seja P(x,y) o ponto descrevente da parábola e a equação da diretriz x = -2. Da definição, segue que d(P,F)= d(P, r).

Usando a métrica dos catetos tem-se

$$d(F,P) = |x_F - x_P| + |y_F - y_P| \; e \; d(P,r) = |x_P - x_A| + |y_P - y_A|,$$

em que A é um ponto da reta, situado na perpendicular a essa reta que passa pelo ponto P. Como a reta r é perpendicular ao eixo horizontal, segue que tal perpendicular é paralela ao eixo horizontal passando por P. Assim, A = (x_r, y_P) e,

$d(F,P) = |2 - x| + |0 - y| \; e \; d(P,r) = |x - (-2)| + |y - y|$. Igualando tem-se

$$|2 - x| + |-y| \; = |x + 2|.$$

A partir daqui, utilizando-se a definição de função modular, desmembra-se a última igualdade nos seguintes casos:

1º caso: $2\text{-}x \geq 0 \wedge \text{-}y \geq 0 \wedge x+2 \geq 0$ ou, equivalentemente, $x \leq 2 \wedge y \leq 0 \wedge x \geq -2$. Nessa situação, tem-se:

$$2\text{-}x - y = x+2 \Leftrightarrow y = -2x,$$

ou seja, no intervalo [-2,2], o lugar geométrico é um segmento de reta passando pela origem com inclinação negativa. Porém, como os valores de y não podem ser negativos, esse segmento fica reduzido ao intervalo [0,2]. Observa-se que, para x = 2, tem-se y = 0 e, para x = 0, tem-se y = - 4. Portanto, o segmento une os pontos (2,0) e (0,-4).

2º caso: $2 - x < 0 \wedge -y < 0 \wedge x + 2 < 0$ ou, equivalentemente, $x > 2 \wedge y > 0 \wedge x < -2$. Nessa situação, veja que é impossível ter algum lugar geométrico pela variação de x, que não pode, simultaneamente, ser maior do que 2 e menor do que -2, muito embora, resolvendo igualdade,

$$x - 2 + y = -x - 2 \Leftrightarrow y = -2x$$

possa aparentar a existência de uma reta, semirreta ou segmento de reta.

3º caso: $2-x \geq 0 \wedge -y \geq 0 \wedge x+2< 0$, o que significa $x \leq 2 \wedge y\leq 0 \wedge x < -2$. Como a segunda variação de x está inclusa na primeira, então fica restrita a essa. Assim,

$$2 - x - y = -x - 2 \Leftrightarrow y = 4,$$

o que não faz sentindo, uma vez que está definida para $y \leq 0$.

4º caso: $2 - x \geq 0 \wedge -y < 0 \wedge x+2< 0$. Daí, $x \leq 2 \wedge y > 0 \wedge x < -2$. Dessa forma,

$2-x – (-y) = -x – 2 \Leftrightarrow y = -4$ e, como no caso anterior, não atende a condição $y > 0$.

5º caso: $2 - x \geq 0 \wedge -y < 0 \wedge x+2 \geq 0$. Portanto, a variação aqui é $x \leq 2 \wedge y > 0 \wedge x \geq -2$. Nessa situação, a variação de x está no intervalo [-2,2], com valores positivos para y. Assim, a lei resultante é $y = 2x$, que representa um segmento de reta com inclinação positiva e, como no 1º caso, fica restrita, em função da variação de y, ao intervalo [0,2]. O segmento une, nesse caso, os pontos (0,0) e (2,4).

6º caso: $2-x < 0 \wedge -y \geq 0 \wedge x+2\geq 0$. Portanto, a variação aqui é $x > 2 \wedge y \leq 0 \wedge x \geq -2$. Veja que a primeira variação de x está contida na segunda, logo, o lugar geométrico fica definido no intervalo aberto $[2, + \infty)$. Além disso, os cálculos mostram que

$$x - 2 + -y = x + 2 \Leftrightarrow y = -4,$$

indicando ser uma semirreta horizontal passando pelo ponto (2, -4) e dirigida no sentido positivo do eixo horizontal.

7º caso: $2-x \geq 0 \wedge -y < 0 \wedge x+2 \geq 0$. Logo, $x \leq 2 \wedge y > 0 \wedge x \geq -2$. A variação de x está no intervalo [-2,2]. Neste caso, a lei é

$$2 – x +y = x + 2 \Leftrightarrow y = 2x,$$

ou seja, uma reta, uma semirreta ou um segmento de reta. No caso, pela limitação aos pontos (0,0) e (2,4), é um segmento de reta.

8º caso: $2-x < 0 \wedge -y < 0 \wedge x+2 \geq 0$. Reorganizando a variação tem-se $x > 2 \wedge y > 0 \wedge x \geq -2$. Portanto, $x \in[2, + \infty)$. A lei será

$$x – 2 + y = x + 2 \Leftrightarrow y = 4,$$

novamente uma semirreta horizontal no sentido positivo do eixo horizontal, porém, agora passando pelo ponto (2, 4).

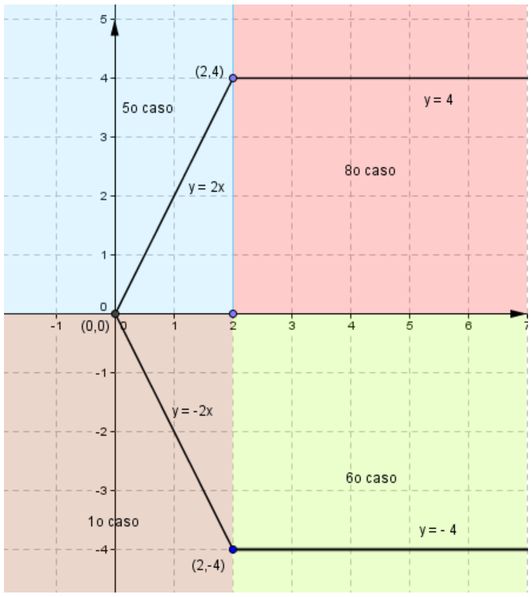
9º caso: $2-x < 0 \wedge -y \geq 0 \wedge x+2 < 0$. Portanto, $x > 2 \wedge y < 0 \wedge x < -2$. Embora a lei seja $y = 2x$, ela não representa lugar geométrico, em função da impossibilidade de existência de valores para x.

Descreve-se, suscintamente, como se utiliza o desmembramento da função modular, a fim de analisar a variação e a definição do lugar geométrico em cada uma das regiões do plano no qual está definido. Julga-se importante esse fato para mostrar que não basta ter a lei de formação de um lugar geométrico mas, também, deve ser atendida a condição de existência e isso é decorrente da função modular. Essa função é bem pouco explorada no ensino fundamental e médio, a partir da definição, bem como sua utilização apresentada por duas sentenças. Tal dificuldade é, muitas vezes, enfrentada pelos estudantes que ingressam nos cursos de Cálculo nas Universidades, especialmente no estudo de limites e continuidade.

Por outro lado, julga-se oportuno esse desmembramento, a fim de que o estudante possa fazer analogias com as sentenças que definem os lugares, pois são todas de primeiro grau ou constantes e esse assunto, geralmente, é abordado no início do Ensino Médio, no estudo de funções. Além disso, apresentar a resolução da equipe, que resolveu a atividade proposta e o detalhamento do investigador para a questão é importante, pois ela mostra que, até certo ponto, professores em ação continuada em mestrado, em geral, não descrevem os procedimentos realizados, priorizando os cálculos e fórmulas, o que fica comprovado na correta resolução e na também correta representação geométrica.

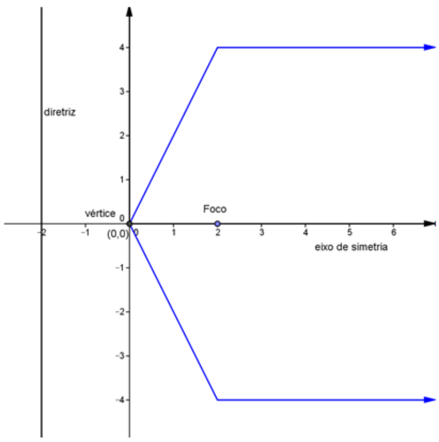
A figura 5 ilustra as regiões que compreendem os casos em que o lugar geométrico fica definido para cada uma das sentenças obtidas. Observa-se que os nove casos analisados pela equipe de três mestrandos e detalhados pelo investigador ficaram reduzidos a quatro, cada um deles representado por uma cor diferente na figura com as respectivas leis em cada uma dessas regiões.

Figura 5: regiões onde estão definidas as respectivas leis que definem o lugar geométrico.



Observou-se, também, muita estranheza do grupo, pois não imaginavam a existência de uma parábola formada por segmentos de reta e semirretas, como ilustra a figura 6, a seguir, mesmo que eles tenham feito os cálculos corretamente. Esse fato corrobora as investigações sobre a falta de conhecimento de geometrias que não a Euclidiana. Aqui, tem-se um exemplo claro da denominada Geometria do Táxi ou Geometria Urbana, ou seja, uma em que a forma de medir não é a euclidiana e sim a dos catetos.

Figura 6: parábola na métrica dos catetos.



Em função dos dados fornecidos, a parábola apresenta sua concavidade para a direita, vértice na origem e eixo de simetria o dos x.

A terceira equipe, formada pela dupla Gui e N, trabalhou na 3ª atividade acima mencionada, que consistia em determinar a equação da hipérbole com o vértice na origem, os focos

$F_1=(0,-5)$ e $F_2=(0,5)$ e o eixo real ou transverso medindo 6cm, considerando a métrica dos catetos.

Assim como as equipes anteriores, essa realizou todos os cálculos e obteve a representação correta da hipérbole nessa métrica. Entretanto, foi mais detalhista do que elas, ao denotar o ponto móvel descrevente P(x,y), os focos e a função modular com a definição correta a partir da variação de x. Utilizaram a definição da métrica para obter as equações do lugar geométrico procurado, como indicado a seguir.

SEJA $P(x,y)$ UM PONTO DESCREVENTE, F_1 E F_2 OS FOCOS.
E 6 O EIXO TRANSVERSO MEDINDO 6.

$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 6$

$d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 6$

O QUE É A HIPÉRBOLE NESTA MÉTRICA?

EQUAÇÕES:

$d(P,F_1) = |x-0| + |y-5|$

$d(P,F_2) = |x-0| + |y+5|$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

No que segue, foi apresentado o desdobramento da equação. Num primeiro momento, a dupla utilizou a igualdade com o valor positivo 6 no segundo membro e obteve oito situações, das quais se apresentam as quatro primeiras, uma vez que as outras se repetem. Nessas, encontra-se o primeiro e segundo casos, nos quais a igualdade não fica satisfeita, a saber, não há lugar geométrico satisfazendo. No terceiro, encontra-se a função constante y = 3, a qual é representada por uma reta horizontal, ou seja, é uma função constante, a qual é válida para todo $x \geq 0$. No quarto caso, função análoga é encontrada, y = -3, a qual é válida também para $x \geq 0$. No sétimo e oitavo casos, aparecem as duas funções novamente, porém no campo $x < 0$. Abaixo, encontram-se as quatro primeiras situações.

1º) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y-5 \geq 0 \\ y+5 \geq 0 \end{cases}$ $|x-0| + |y-5| - (|x-0| + |y+5|) = 6$

$\cancel{x} + \cancel{y} - 5 - \cancel{x} - \cancel{y} - 5 = 6$ NÃO SATISFAZ!

2º) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y-5 < 0 \\ y+5 < 0 \end{cases}$ $|x-0| + |y-5| - (|x-0| + |y+5|) = 6$

$\cancel{x} - \cancel{y} + 5 - \cancel{x} + \cancel{y} + 5 = 6$ NÃO SATISFAZ!

3º) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y-5 \geq 0 \\ y+5 < 0 \end{cases}$ $|x-0| + |y-5| - (|x-0| + |y+5|) = 6$

$x + y - 5 - x + y + 5 = 6$

$2y = 6$

$\boxed{y = 3}$

4º) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y-5 < 0 \\ y+5 \geq 0 \end{cases}$ $|x-0| + |y-5| - (|x-0| + |y+5|) = 6$

$+x - y + 5 - x - y - 5 = 6$

$-2y = 6$

$\boxed{y = -3}$

Num segundo momento, a dupla utilizou a igualdade com o valor negativo -6, no segundo membro, e obteve oito situações, das quais se apresentam as quatro primeiras, pois as demais reproduzem o procedimento adotado e conclui-se a existência das duas leis já mencionadas na situação anterior e a do não atendimento à condição existencial.

1º) $|x-0| + |y-5| - (|x-0| + |y+5|) = -6$ $\quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y-5 \geq 0 \\ y+5 \geq 0 \end{cases}$

$x + y - 5 - x - y - 5 = -6$

(NÃO SATISFAZ)

2º) $|x-0| + |y-5| - (|x-0| + |y+5|) = -6$ $\quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y-5 < 0 \\ y+5 < 0 \end{cases}$

$\cancel{x} - \cancel{y} + 5 - \cancel{x} + \cancel{y} + 5 = -6$

(NÃO SATISFAZ)

3º) $|x-0| + |y-5| - (|x-0| + |y+5|) = -6$ $\quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y-5 \geq 0 \\ y+5 < 0 \end{cases}$

$x + y - 5 - x + y + 5 = -6$

$y = \frac{-6}{3}$

$\boxed{y = -3}$

4º) $|x-0| + |y-5| - (|x-0| + |y+5|) = -6$ $\quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y-5 < 0 \\ y+5 \geq 0 \end{cases}$

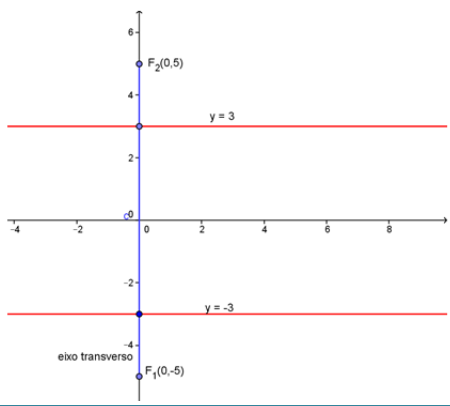
$-2y = -6$

$\boxed{y = 3}$

Gui e N concluíram os dezesseis casos afirmando: “Encontramos y = 3 e y = -3 (retas). Implica que a hipérbole são suas retas paralelas ao eixo x, na métrica dos catetos”.

Considerando que: hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é igual a uma distância fixa dada (igual ao eixo real ou transverso); o ponto P(x, y) é o ponto descrevente do lugar geométrico; $F_1(0,-5)$ e $F_2(0,5)$ são os focos e o eixo real ou transverso mede 6cm e, utilizando-se a métrica dos catetos, a partir da análise dos dois mestrandos, tem-se sua representação geométrica dada na figura 7, a seguir.

Figura 7: hipérbole na métrica dos catetos.



Portanto, a curva chamada hipérbole, na métrica dos catetos, é dada por duas retas, neste caso, paralelas ao eixo imaginário ou transverso (eixo dos x).

Considerações Finais

Neste artigo apresentaram-se resultados de uma pesquisa qualitativa realizada com sete estudantes de um mestrado profissionalizante em ensino de Física e de Matemática que teve por objetivo investigar como esses estudantes interpretam e representam elipses, parábolas e hipérboles utilizando a métrica dos catetos, a qual está ligada a uma geometria que é não euclidiana – Geometria do Táxi ou Geometria Urbana. A coleta de dados mostrou que os estudantes, após terem estudado na disciplina, diversas métricas, explorado a euclidiana na determinação de lugares geométricos, como circunferência, elipse, parábola e hipérbole, conseguiram interpretar corretamente os problemas propostos numa outra métrica que não é tão usada como a anterior. Também conseguiram representar, de forma correta, os três lugares geométricos.

O investigador comprovou, também, que nem todos os estudantes expressaram-se formalmente durante a realização das atividades, pois os mesmos priorizaram cálculos e não detalhamento sobre notações empregadas e explicações em linguagem natural no desenvolvimento das questões, o que, até certo ponto, não é novidade em função da forma como as disciplinas, na formação inicial, são desenvolvidas. Em grande parte, dão prioridade aos cálculos algébricos e numéricos, segundo a experiência do pesquisador. Entretanto, essa forma de resolução em nada impediu de se alcançar o objetivo proposto, culminando com a representação correta dos três lugares geométricos.

Durante a investigação, os estudantes puderam perceber que há várias possibilidades de representação de um objeto geométrico, como os três aqui estudados, e não somente a euclidiana. Um dos fatores que caracterizam essa geometria é de que há uma dependência de “medidas” e, assim o sendo, o estudo de métricas é justificado na formação dos professores, seja ela inicial ou continuada, o que irá proporcionar visão de outras geometrias, além da euclidiana. Por outro lado, é importante, também, salientar a existência da Geometria Topológica, por exemplo, em que a questão de medidas não é o fator principal e sim a continuidade, como já expressado no artigo.

Não foi discutido, no artigo, uma generalização de cada uma das cônicas, ou seja, uma discussão teórica. O que se fez foi partir de um problema concreto com valores particulares para os dados que permitiram aos estudantes resolvê-lo. Assim, o que se obteve foi uma elipse com focos no eixo dos x e centro na origem, não se discutindo outras possibilidades de coordenadas do centro e dos focos, o que geraria outras representações similares. De forma análoga, o procedimento foi feito para os outros dois casos, obtendo-se uma parábola com vértice na origem das coordenadas, o eixo de simetria sendo o eixo dos x e a concavidade voltada para a direita. No caso da hipérbole, essa teve seu eixo real contido no eixo vertical e o imaginário no eixo dos x, sendo o vértice na origem do sistema cartesiano.

Ao investigar a própria prática em uma disciplina de mestrado, com base num processo avaliativo da mesma, nos resultados que demonstraram a aprendizagem dos estudantes na realização de uma tarefa que exigia, além dos conhecimentos desenvolvidos durante o semestre, a aplicação em uma situação nova, conclui-se que o pesquisador atingiu o seu objetivo.

Espera-se que o artigo traga alguma contribuição e motivação para outros estudos ou leituras a respeito de outras geometrias além, da euclidiana, ainda não conhecidas ou disseminadas, especialmente na educação básica e formação inicial de professores.

Referências

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: terceiro e quarto ciclos de ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais/Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998. 174 p.

__________. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998a. 148 p.

__________. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica.– Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2).

FOSSA, J. A. **Ensaios sobre a educação matemática.** Belém: EDUEPA, 2001.

KALEFF, A. M.; Nascimento; R. S. - Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, nº 44, dezembro 2004, 11-42.

KLEIN, F.. **Matemática elemental desde un punto de vista superior**. Trad. Roberto Araújo. Madrid: Biblioteca Matemática, 1927.

XXXb

XXXc. **Imaginação, Intuição e Visualização:** a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009, 294 p.

XXXd. Triângulos Diferentes: Dos Planos Aos Geodésicos. In: **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.13, n.1, pp.77-93, 2011.

XXXe.

MOREIRA, M.A.. **Metodologias de Pesquisa em Ensino**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

PONTE, J. P. (2004). **Investigar a nossa própria prática**: Uma estratégia de formação e de construção doconhecimento profissional. In E. Castro & E. Torre (Eds.), Investigación en educación matematica (pp.61-84). Coruña: Universidad da Coruña. Republicado em 2008, PNA - Revista de Investigación em Didáctica de la Matemática, 2(4), 153-180. Disponível em < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/04-ponte-corunha.pdf>. Acesso em 01 mai 2014.

PONTE, João P. da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 1 ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

YYY,XXXa.

SILVA, E. S. da. **Intuição e Propriedades Topológicas para um Grupo de Professores, Mestrandos de um Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática**, 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano – UNIFRA. Santa Maria, 2013.