

Avaliação discente: uma proposta utilizando a Lógica *Fuzzy* **Student evaluation: a proposal using Fuzzy Logic**

Graziela Marchi Tiago
grazielamarchi@gmail.com

Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni
mariana.baroni@gmail.com

Rogério Ferreira da Fonseca
rffonseca@ifsp.edu.br

Resumo

Em geral, as avaliações aplicadas por professores tentam quantificar a aprendizagem discente por meio de critérios subjetivos. Essas avaliações são elaboradas conforme o interesse do professor ou da instituição de ensino e geralmente desconsideram habilidades e competências desenvolvidas pelo discente durante o processo de ensino-aprendizagem. Apresentamos aqui o desenvolvimento de uma ferramenta tecnológica, baseada em Lógica *Fuzzy*, que poderá auxiliar o professor na complexa tarefa de avaliar as aprendizagens discentes. No nosso estudo de caso, utilizamos notas de avaliação e atividades desenvolvidas por discentes, onde é possível observar que a Lógica *Fuzzy* propiciou a análise dessas atividades para a composição da nota final a partir de noções imprecisas como Insuficiente, Regular, Bom e Excelente. A principal vantagem do sistema proposto é a possibilidade de classificar o desempenho dos discentes considerando o uso de vários indicadores e não apenas as avaliações tradicionais.

Palavras-chave: Avaliação Discente. Ensino-Aprendizagem. Teoria das Possibilidades. Lógica *Fuzzy*.

Abstract

In general, the evaluations applied by teachers try to quantify student learning through subjective criteria. These evaluations are designed according to the interest of the teacher or the teaching institution and generally disregard skills and competences developed by students during the teaching-learning process. We present here the development of a technological tool, based on Fuzzy Logic, which can help the teacher in the complex task of evaluating the students learning. In our case study, we use evaluations and activities scores of students, where is possible to observe that the Fuzzy Logic enabled the analysis of these activities on the composition of the final score from imprecise notions such as Low, Fair, Good and Excellent. The main advantage of the proposed system that is able to classify the performance of students considering the use of multiple indicators and not just traditional evaluations.

Keywords: Student Evaluation. Teaching-Learning. Possibility Theory. Fuzzy Logic.

1 Introdução

Cada vez mais o uso de novas tecnologias, como ferramenta no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, tem apoiado professores em suas aulas e pesquisadores em suas investigações, entretanto acreditamos que seja importante realizar uma profunda reflexão sobre duas temáticas fundamentais para professores e/ou pesquisadores que utilizam essas ferramentas. Uma delas é a discussão acerca das reais potencialidades do uso de novas

tecnologias no ensino, ou seja, uma análise acerca dos conceitos matemáticos que realmente podem ser abordados por meio do uso de novas tecnologias, considerando também as limitações de tais ferramentas, perante a natureza dos conceitos matemáticos que usualmente são abordados na Educação Básica ou no Ensino Superior. A outra está relacionada aos diferentes usos das tecnologias no trabalho pedagógico do professor, como registros de aulas, agendas, desenvolvimento de materiais didáticos, processo de avaliação, entre outros.

Apesar da relevância das duas temáticas, neste artigo vamos nos limitar a explorar a segunda, mais especificamente, o uso de novas tecnologias como apoio ao processo de avaliação. Para melhor descrever a problemática envolvida na pesquisa, teceremos algumas considerações acerca de aspectos fundamentais sobre as avaliações, apresentaremos algumas noções sobre Lógica Fuzzy e sobre o uso de um modelo *Fuzzy* utilizando o software Matlab. Ambos serão explorados para desenvolver um sistema de avaliação discente que permita tratar de forma mais adequada questões subjetivas ou imprecisas que geralmente estão envolvidas nas avaliações de discentes.

Inicialmente, vamos propor algumas reflexões acerca de aspectos envolvidos nas avaliações realizadas por professores, nossos argumentos sobre esse assunto terão como fundamento as ideais de Perrenoud (1999), Sacristán (2000) e Luckesi (2009). Indicaremos a possibilidade de utilizar a Lógica *Fuzzy* para fornecer subsídios para representar numericamente valores imprecisos, posteriormente indicaremos alguns exemplos de avaliação individual com base nessa Lógica.

Um sistema de avaliação do desempenho do estudante para cursos de ensino à distância baseado na teoria da Lógica *Fuzzy* foi proposto por Faria et al (2011). Este sistema de avaliação foi dividido em duas partes, sendo que a primeira é a avaliação do conteúdo e a segunda é a avaliação do comportamento do estudante durante o processo de ensino/aprendizagem. A utilização da Lógica Fuzzy permite maior flexibilidade ao sistema, pois é possível expressar valores linguísticos como razoável, normal, ótimo, médio, bom e excelente. Portanto, especifica vários conjuntos *Fuzzy*, tornando-se assim uma ferramenta mais eficiente e abrangente. A Lógica *Fuzzy* foi utilizada então como uma ferramenta alternativa para o cálculo das notas dos estudantes, sendo um sistema de propósito geral, podendo ser utilizado em diferentes ambientes de ensino. A integração do resultado da avaliação com o agente pedagógico, que contém as sequências de conteúdo adequadas para cada estudante, fornece dinamismo e possibilidade de adaptação ao processo de ensino/aprendizagem.

Assim, o objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um novo sistema de avaliação discente para cursos presenciais utilizando Lógica *Fuzzy*. Este sistema utilizará diversos tipos de atividades para classificar o desempenho dos discentes, e poderá ser utilizado para apoiar possíveis decisões de educadores em relação ao processo de ensino e aprendizagem.

O grande diferencial deste sistema é a possibilidade de classificar o desempenho dos discentes considerando o uso de vários indicadores, aos quais os professores de disciplinas específicas têm acesso. Este trabalho poderá colaborar, por exemplo, com programas de controle de evasão, devido ao fato de agrupar diversos tipos de atividades e não apenas as avaliações tradicionais (provas).

Dentre os vários desafios que se encontram na prática do professor insere-se uma tarefa importante e complexa, que em alguns casos pode determinar a desistência ou a motivação de estudantes, e em outros pode indicar as diretrizes de uma disciplina ou curso (SACRISTÁN, 2000). Estamos falando aqui do processo de avaliação que é realizado por professores, durante um determinado período, ou seja, a atribuição de notas ou conceitos às produções de seus discentes. Acreditamos que se trata de um processo fundamental por determinar, por exemplo, se um estudante está apto a prosseguir seus estudos em outros níveis, e complexa por envolver a avaliação do desenvolvimento de habilidades e competências, que devem ser desenvolvidas por meio de determinados conteúdos, essa avaliação, em geral, envolve noções imprecisas (PERRENOUD, 1999; SACRISTÁN, 2000; LUCKESI, 2009).

Neste trabalho, vamos considerar como processo de avaliação, por parte do professor, seu julgamento a respeito de diversos tipos de atividades, como avaliações individuais, trabalhos realizados presencialmente nas aulas (individuais ou em grupos), postura do discente frente ao conhecimento e atividades extra-aula, como pesquisas, resolução de problemas, lista de exercícios, entre outras atividades.

1.1 Algumas reflexões sobre aspectos fundamentais sobre avaliação

Não é um exagero afirmar que os processos de avaliação sempre estiveram diretamente relacionados às práticas educativas em diversas áreas do conhecimento, visto que é fundamental verificar e quantificar as aprendizagens dos estudantes. Tais avaliações podem ocorrer em diversas esferas, desde a avaliação do professor às avaliações externas. Luckesi (2009) destaca que os processos de avaliações têm suas raízes em séculos anteriores, com a tradição dos exames escolares sistematizados nos séculos XVI e XVII, com as configurações da atividade pedagógica produzidas pelos padres jesuítas.

Atualmente a avaliação da aprendizagem, na prática escolar, continua sendo conduzida por meio de provas ou exames que são utilizados como instrumentos de aprovação ou reprovação, sendo que o principal aspecto desses instrumentos é a nota, que gera a preocupação dos pais, e mobiliza o olhar atento e apreensivo dos profissionais da educação, pois é a partir dela que o discente vai ser aprovado ou reprovado (LUCKESI, 2009).

Ainda, de acordo com esse autor, o que importa para a grande maioria dos pais é que seus filhos tenham nota suficiente para avançar de série escolar, o que para nós é um aspecto cultural que desencadeia uma série de equívocos. O grande problema encontra-se no fato de que o interesse dos pais não está centrado na análise mais cautelosa de quanto seus filhos aprenderam, ou mesmo se esses têm alguma dificuldade em relação aos conteúdos estudados.

De acordo com Luckesi (2009), as provas que são aplicadas pelos professores podem ser vistas pelos discentes como uma ameaça e nesse caso não auxiliam a aprendizagem e nem o diagnóstico de falhas por parte do professor, isso pode causar uma grande distorção levando os discentes a estudar por medo de ser reprovado e não pela preocupação em aprender. Como a prova se tornou um meio para entrar nas Universidades mais conceituadas, os estudantes que se encontram no final do Ensino Médio passam a resolver provas como preparação para o vestibular, sem ter como foco principal a aprendizagem.

As notas e médias são vistas e calculadas apenas como números sem levar em consideração o que elas significam, sem indicar as principais habilidades e competências que realmente foram desenvolvidas, e na maioria das vezes sem considerar grande parte do trabalho realizado pelo discente em seus estudos (LUCKESI, 2009).

Nesse processo a relação entre o professor e o discente gira em torno das notas e não dos conhecimentos que deveriam ser desenvolvidos; por um lado os discentes necessitam da nota para a sua aprovação, não importando a maneira que se obtém ou se ela expressa uma aprendizagem satisfatória, por outro lado, o professor precisa de alguma maneira atribuir um valor numérico para quantificar as atividades realizadas pelos discentes.

De acordo com Luckesi (2009) e Perrenoud (1999), os professores algumas vezes podem utilizar as notas e provas como um meio de mostrar autoridade para os discentes ou uma forma de discipliná-los. Os discentes são motivados a estudar por estarem constantemente ameaçados pelas provas, isso pode acarretar problemas com a saúde dos estudantes, sejam eles físicos ou psicológicos, fomentados por diversos tipos de stress. Esses autores apontam que um processo de avaliação pautado apenas por provas e exames leva a um resultado

diferente do objetivo de uma avaliação de aprendizagem. A função desta é auxiliar o aprendizado dos estudantes, porém ela está centrada nas provas e nas notas, não cumprindo o papel de melhorar a aprendizagem.

Em relação à democratização do ensino, Luckesi (2009) afirma que, em primeiro lugar, deve-se falar em acesso à educação escolar. Para viver bem economicamente e profissionalmente na sociedade em que nos encontramos é necessário o mínimo instrumental para se chegar a um patamar de compreensão e ação. Isso só é possível por meio da escolarização. Segundo esse mesmo autor, existem três fatores que definem a democratização do ensino, quais sejam: o elemento fundamental da democratização é o acesso universal ao ensino; o segundo é a permanência do discente na escola com a possibilidade de conclusão de seus estudos, e o terceiro fator está relacionado à qualidade de ensino: todos os discentes devem ter acesso ao conteúdo escolar. Este autor afirma que a forma de avaliação tem um papel fundamental na permanência escolar até a conclusão dos estudos em um determinado nível, influenciando diretamente a qualidade de ensino. Provas mal elaboradas, autoritarismo e uso inadequado dos resultados obtidos podem trazer consequências como repetência e evasão, não contribuindo para a permanência e conclusão dos estudos.

Um dos objetivos da avaliação da aprendizagem é possibilitar a qualificação na aprendizagem do discente, auxiliando seu avanço e crescimento em relação à apropriação dos conhecimentos e desenvolvimento de habilidades e competências mínimas necessárias, isso significa que a atual prática de avaliação escolar tem sido no mínimo aplicada de maneira inadequada ou pouco funcional.

De acordo com Luckesi (2009), na prática a avaliação educacional não é utilizada adequadamente no ato do planejamento de ensino, a maioria dos professores não define com exatidão o padrão de qualidade que se espera do discente. Desse modo, existe uma grande possibilidade e arbitrariedade de julgamentos. Ele ressalta que por não haver um padrão estabelecido, fica a critério de cada professor avaliar o discente conforme seu humor e satisfação.

Acreditamos que seja necessário refletir sobre quais são os fatores relevantes que deveriam ser considerados na avaliação docente e buscar o desenvolvimento de um sistema de avaliação que permita considerar diferentes aspectos, e não apenas a nota de uma prova como ocorre usualmente.

A avaliação é um juízo de qualidade, e por isso precisa ser expresso por meio de algum símbolo, seja ele verbal ou numérico. Na prática escolar as notas são símbolos numéricos e os conceitos (péssimo, ruim, regular, etc.) são símbolos verbais e imprecisos ou subjetivos.

Um aspecto central que deve ser considerado refere-se à necessidade de transformar conceitos em notas, sendo que ambos expressam juízos de qualidade sobre a aprendizagem do discente, eles são equivalentes quando se trata da qualificação da aprendizagem, mas se diferem na medida em que as notas passam indevidamente de qualidade para quantidade (LUCKESI, 2009).

A maioria das instituições educacionais necessita dessa transformação de expressões verbais em numéricas por trabalhar com média de notas. Essa transformação de conceitos em notas (quando se considera apenas a prova) pode impossibilitar o professor de analisar a real situação do discente e este não toma consciência de sua situação em termos de aprendizagem (LUCKESI, 2009).

Dessa forma a avaliação não cumpre sua função de auxiliar na construção de conhecimentos do discente.

De acordo com Luckezi (2009), o atual processo de avaliação da aprendizagem não contribui para melhorias no ensino. O objetivo de estudar para construir conhecimento é substituído por estudar para obter nota. Esse comportamento poderá trazer consequências negativas para os discentes, pois vivem sob pressão e ameaça de serem reprovados. A média mínima pode ser enganosa por não deixar claro o que o discente realmente adquiriu de conhecimento, muitas vezes essa nota é calculada com base em apenas um instrumento (prova) ou em poucos que se assemelham às provas.

A legislação educacional necessita de uma forma de registro de aprendizagem. Por esse motivo não é possível eliminar as notas e conceitos da vida escolar, mas podemos tentar sanar algumas dificuldades desenvolvendo um sistema de avaliação que permita avaliar diferentes aspectos na avaliação discente.

Somente será possível que o processo de avaliação aconteça de forma mais legítima, se os profissionais da educação estiverem realmente interessados no que o discente aprendeu e que a prática pedagógica seja conduzida com rigor. A ciência e o uso de novas tecnologias podem fornecer subsídios à condução de um processo de avaliação menos subjetivo. Nesse sentido, indicamos neste artigo a possibilidade de utilizar a Lógica *Fuzzy* no processo de avaliação, pois ela poderá propiciar a análise de várias atividades desenvolvidas pelos discentes

considerando noções imprecisas, como Bom, Ruim, Muito Bom, entre outras. Apresentaremos agora alguns aspectos da Lógica *Fuzzy*.

2 Sobre a lógica fuzzy

O termo “*fuzzy*” foi pela primeira vez citado por Dr. Lotfi Zadeh considerado o pai da lógica *fuzzy*, em um jornal sobre engenharia chamado “*Proceedings of the IRE*” em 1962.

Um paradoxo que pode nos ajudar a entender a lógica *fuzzy* é o “Paradoxo de Epiménides¹”, que pode ser enunciado da seguinte forma: Era uma vez um acusado que disse: "Enquanto a minha mentira não for desvendada, continuarei mentindo". Em seguida o juiz disse: "Se o acusado mentir, seu advogado também mentirá". Por fim o advogado disse: "Quem for capaz de desvendar a minha mentira dirá a verdade". Qual deles está mentindo?

Como analisar este paradoxo? Se Epiménides diz a verdade, então ele está mentindo; e se ele está mentindo, então a sua afirmação é verdadeira. Estas proposições violam o Princípio da Não-Contradição da lógica clássica, pois uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

O professor A. Bauchspiess afirma que em lógica *fuzzy* os paradoxos podem ser reduzidos a “meias verdades” ou “meias mentiras”, dependendo do que se quer analisar, através de uma lógica multivalorada. O conceito de verdadeiro (1) e falso (0) são substituídos por graus de pertinência que podem assumir qualquer valor entre 0 e 1, sendo o valor 0,5 aquele que descreve um paradoxo (BAUCHSPIESS, 2008).

Existem diversos produtos baseados em lógica *fuzzy*, como câmeras fotográficas com foco automático, máquinas de lavar roupas que se ajustam a quantidade de sujeira que devem retirar das roupas, sistemas para controle de motor de carros e programas que ajudam a definir tendências nos mercados financeiros. Mas, apesar de todo este sucesso, a lógica *fuzzy* não é divulgada pelo seguinte motivo: a palavra “*fuzzy*”. A simples divulgação de que uma determinada máquina baseia-se em lógica *fuzzy* para seu funcionamento traria um receio intrínseco às pessoas², além da pouca ou falta de informação sobre o assunto.

O ser humano toma decisões a partir de sua habilidade de exercitar a análise e controle baseado no método *fuzzy*. Um exemplo: suponha que você está dirigindo a uma distância de 1 km do carro a frente, e a sinalização indica 60 km/h. Entretanto, a maioria dos outros carros

¹ Epiménides foi um poeta, filósofo e místico grego, que viveu em meados dos anos 600 a.C. na Cidade de Creta (BOWDER, 1982). Ele aparece também no Novo Testamento na Epístola que o apóstolo Paulo escreveu a Tito (Tito 1:12).

² Em português, a lógica *fuzzy* é chamada lógica nebulosa.

está por volta de 65 km/h. É comum e mais seguro você decidir por “seguir o fluxo”. Como definir com precisão a decisão de “seguir o fluxo”? Este tipo de análise *fuzzy*, o ser humano faz a todo o momento, já que alguns carros estão acima de 65 km/h e outros abaixo. Então, como avaliar?

Lógica *fuzzy* é a forma que o cérebro humano trabalha, e é possível fazer que uma máquina faça algo próximo disso. Sistemas de análise e controle *fuzzy* podem ser eletromecânicos por definição, ou se importar apenas com dados, por exemplo, dados econômicos, mas em todos os casos serão guiados pelas regras “Se – então” (SOWEL, 1998). O uso das regras está associado aos conjuntos *fuzzy*.

2.1 A teoria dos conjuntos fuzzy e a teoria das probabilidades

A teoria dos conjuntos *fuzzy* oferece uma alternativa à teoria das probabilidades no que diz respeito à modelagem da incerteza. Como tal, desde o seu aparecimento, levantou-se uma grande controvérsia sobre a sua razão de existir, utilidade e relação com a teoria das probabilidades. Algumas das questões levantadas são (ZADEH, 1965):

- 1) Quais são as ligações entre a teoria dos conjuntos *fuzzy* e a teoria das probabilidades?
- 2) Estará a teoria dos conjuntos *fuzzy* inserida na teoria das probabilidades ou vice-versa?
- 3) Existe alguma coisa que possa ser feita com a teoria dos conjuntos *fuzzy* que não possa ser feita tão bem, ou melhor, com a teoria das probabilidades?
- 4) Quais são as dificuldades da teoria das probabilidades em lidar com a incerteza?

As respostas a estas e a outras questões têm sido muito variadas. Algumas das afirmações seguintes: “A teoria dos conjuntos *fuzzy* e a teoria das probabilidades são complementares não competindo uma com a outra, uma vez que abordam diferentes tipos de incerteza” (ALMOND, 1995; ZADEH, 1965; KANDEL, MARTINS, PACHECO, 1995; KLIR, ST. CLAIR, YUAN, 1997); “As probabilidades são um caso especial dos conjuntos *fuzzy*” (KANDEL, MARTINS, PACHECO, 1995); e “Tudo o que é feito com a teoria dos conjuntos *fuzzy* pode ser feito, de igual forma, ou melhor, com a teoria das probabilidades” (LAVIOLETTE et al., 1995; CHEESEMAN, 1995) podem ser verdadeiras, dependendo das justificativas utilizadas para esta discrepância de opiniões.

Por um lado, a teoria dos conjuntos *fuzzy* é uma teoria recente, sendo natural que muitos pontos não estejam ainda completamente claros. Por outro lado, para Dubois, Nguyen e Prade (2000), parece em muitos casos haver, tanto dos partidários da teoria dos conjuntos *fuzzy*

como dos partidários da teoria das probabilidades, algum desconhecimento da outra teoria, o que muitas vezes conduz a observações pouco fundamentadas. Podemos dizer que a teoria dos conjuntos *fuzzy* é um corpo consistente de ferramentas matemáticas, que, como tal, não é facilmente comparável com a teoria das probabilidades (DUBOIS, NGUYEN, PRADE, 2000).

Em 1978, começou a ser desenvolvida a teoria das possibilidades (ZADEH, 1978), que pode ser formulada em termos de conjuntos *fuzzy* (KLIR, YUAN, 1995; KLIR, 1999). O principal objetivo da teoria das possibilidades é modelar a incerteza de uma forma flexível (DUBOIS, NGUYEN, PRADE, 2000). Nesta teoria, a incerteza de um acontecimento x , é representada por duas medidas, uma medida de possibilidade, $\Pi(x)$, que representa o grau de possibilidade de ocorrência de um acontecimento, e uma medida de necessidade, $N(x)$, que representa o grau de impossibilidade de ocorrência do acontecimento contrário, sendo

$$N(x) = 1 - \Pi(x).$$

Uma distribuição de possibilidade π_χ , associada a uma variável χ , que toma valores x no universo X , representa o que se conhece sobre o valor da variável, sendo associado aos vários elementos de X um valor no intervalo $[0,1]$ que traduz o fato destes serem mais aceitáveis, plausíveis ou razoáveis. Assim, dada $\pi_\chi: X \rightarrow [0,1]$, caso $\pi_\chi(x)=0$, então x é um valor da variável χ impossível e caso $\pi_\chi(x)=1$, então x é um valor da variável χ completamente possível. É possível associar a diferentes elementos de X um grau de possibilidade igual a um. Dessa forma, é possível estabelecer uma ligação entre a teoria das possibilidades e a teoria dos conjuntos *fuzzy*, quando se considera que o conjunto de valores que a variável χ pode receber é representado por um conjunto *fuzzy* A . Então, dado um valor x que pertence a X , $\mu_A(x)$ representa o grau de compatibilidade de x com o conceito descrito por A . Por outro lado, dada a proposição “ χ é A ”, pode-se interpretar $\mu_A(x)$ como o grau de possibilidade da variável χ assumir o valor x , isto é, considerar para todo o x que pertence a X

$$\pi_\chi(x) = \mu_A(x).$$

Pode-se dizer que uma vez que para todos os conceitos existentes na teoria das probabilidades existem conceitos equivalentes na teoria das possibilidades, é possível fazer uma comparação direta das duas teorias e conseqüentemente entre os conjuntos *fuzzy* e a teoria das probabilidades (DUBOIS, NGUYEN, PRADE, 2000). Nos últimos anos têm sido demonstradas várias ligações entre as teorias das probabilidades, a teoria das possibilidades e a teoria dos conjuntos *fuzzy* que sugerem que estas teorias são complementares e não

antagônicas (KLIR, YUAN, 1995; LIN, LEE, 1996; DUBOIS, NGUYEN E PRADE, 2000; LODWICK, JAMISON, 2003; JAMISON E LODWICK, 2002; JAMISON, LODWICK, 2002).

Uma confusão frequente entre a teoria dos conjuntos *fuzzy* e a teoria das probabilidades é confundir o grau de pertencimento de um elemento $x \in X$ a um conjunto *fuzzy* A , $\mu_A(x)$, com a medida de probabilidade de A , $P(A)$. Quando se considera um grau de pertencimento $\mu_A(x)$ o elemento $x \in X$ é fixo e bem conhecido, não sendo o conjunto A bem definido. A medida de probabilidade $P(A)$, está associada a uma variável χ que toma valores no universo X , sendo $P(A)$ a probabilidade de um determinado valor não especificado dessa variável pertencer ao conjunto A . Neste caso, A é um conjunto bem definido, sendo desconhecido o valor da variável a que a probabilidade está conectada. Além disso, os graus de pertencimento são funções aplicadas a pontos de X e as medidas de probabilidades são funções aplicadas a subconjuntos de X . Na realidade, o grau de pertencimento de um elemento de X a um conjunto *fuzzy* tem mais semelhança com uma distribuição de probabilidade $p(\chi)$, apresentando, no entanto, duas diferenças fundamentais:

1. $\sum_{x \in X} p(x) = 1$ enquanto que $\sum_{x \in X} \mu_A(x)$ pode ser qualquer valor não negativo;
2. em uma distribuição de probabilidade todos os valores são mutuamente exclusivos, uma vez que a variável só recebe um valor. Esta condição não é de forma nenhuma imposta na teoria dos conjuntos *fuzzy*. Um conjunto *fuzzy* não é constituído apenas por um elemento, mas por um conjunto de elementos.

Outros dois pontos podem ser destacados na distinção entre as duas teorias. O primeiro diz respeito aos acontecimentos aleatórios: a teoria das probabilidades é a teoria dos acontecimentos aleatórios, enquanto que a teoria dos conjuntos *fuzzy* não está de forma nenhuma relacionada com acontecimentos, mas sim com conceitos mal definidos, como por exemplo: “perigoso”, “muito perigoso” ou “pouco perigoso”, quantificando-se até que ponto determinado elemento é compatível com o conceito em questão. O segundo ponto refere-se à definição de eventos mutuamente exclusivos: o axioma da teoria das probabilidades que define se A e B são eventos mutuamente exclusivos - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para todos os conjuntos A e B tais que $A \cap B = \emptyset$ - é substituído na teoria das possibilidades por $\Pi(A \cup B) = \sup(\Pi(A), \Pi(B))$, que é um axioma menos exigente (KLIR, YUAN, 1995).

2.2 Conjuntos fuzzy, funções de pertencimento e regras de inferência

Um conjunto *fuzzy* é uma generalização do conjunto clássico. Como vimos, ele pode ser entendido como um conjunto que permite que elementos tenham graus de pertencimento a este conjunto. Além da função de pertencimento, um conjunto *fuzzy* deve ser associado a um conceito linguístico, como por exemplo, “Excelente”. Esta associação é utilizada para facilitar a construção das regras pelo especialista, sendo assim compreensível.

Por exemplo, a relação *fuzzy* “Garoto Esbelto”, que descreve qual o grau de pertencimento de uma pessoa a categoria “Garoto Esbelto” através de dados de altura e peso, pode ser formalizada. Pode-se adotar um conjunto de valores que tenham grau de pertencimento igual a 1, por exemplo, àquela pessoa que possui entre 1,20 e 1,30 metros e pesa entre 40 e 45 quilos. A partir destes valores, pode-se determinar graus de pertencimento para valores próximos a estes.

As regras que definem o grau de pertencimento de um elemento a um conjunto são chamadas de regras de inferência e são utilizadas para inferir informações desconhecidas a partir de um conjunto *fuzzy*, que é resultado de uma função de pertencimento (YEN, 1999). Tendo como base o nosso último exemplo, agora que os graus de pertinência foram determinados, sabendo que um garoto é esbelto e sua altura, é possível inferir qual será o seu peso.

Nas próximas seções apresentamos nossa versão de um modelo *fuzzy* para avaliação discente em cursos presenciais. Os conjuntos *fuzzy*, as funções de pertinência e as regras de inferência foram obtidas a partir da entrevista com um professor e seu método avaliativo.

3 Modelo fuzzy proposto

Neste trabalho, um modelo *fuzzy* é proposto para a avaliação discente em cursos presenciais. A lógica *fuzzy* já vem sendo utilizada com o intuito de avaliar o desempenho de discentes em cursos de ensino à distância, onde o sistema de avaliação foi dividido em duas partes que se interagem de forma que ao final resulte em uma única avaliação (FARIA et al, 2008). Assim a Lógica *Fuzzy* foi utilizada como uma ferramenta alternativa para o cálculo das notas dos estudantes.

Esta seção descreve o modelo *fuzzy* desenvolvido com o auxílio do software Matlab, através de seu *toolbox fuzzy*. O MatLab (Matrix Laboratory) é um software de alta performance, criado no fim dos anos 70 por Cleve B. Moler, com interface amigável, voltado especialmente para o cálculo numérico (MATHWORKS, 2013). A potencialidade desse software está,

principalmente, no seu conjunto de *toolboxes*, que são funções externas e adaptáveis para diferentes aplicações. O toolbox *fuzzy* é comumente utilizado para descrição e modelagem de sistemas baseados em lógica *fuzzy*, e foi aplicado para descrever o modelo deste trabalho.

A estrutura de um sistema baseado em lógica *fuzzy* possui quatro etapas: fuzzificação, base de regras, inferência e defuzzificação. Como vimos anteriormente, na teoria *fuzzy* valores intermediários, chamados de grau de pertinência, são permitidos e a produção destas funções que definem graus de pertinência é chamada de “fuzzificação”. A fuzzificação, então, é o processo no qual são definidas as variáveis de entrada e saída, para as quais são atribuídos termos linguísticos que descrevem seu estado. É nessa etapa do processo que são construídas as funções de pertinência.

Duas variáveis foram definidas como entradas do sistema: Avaliação (notas entre 0,0 e 7,0) e Atividades (notas entre 0,0 e 3,0). A variável de entrada Avaliação foi construída com duas funções de pertinência trapezoidais, chamadas: Insuficiente e Excelente, e 2 funções de pertinências triangulares, chamadas: Regular e Bom. A variável de entrada Atividades foi construída com 2 funções de pertinência trapezoidais, chamadas: Insuficiente e Excelente, e 1 função de pertinência triangular, chamada: Bom. Uma representação gráfica desses conjuntos de entradas *fuzzy* é apresentada nas Figuras 1 e 2. O modelo tem apenas uma variável de saída, chamada Conceito Final (Figura 3). Esta variável foi composta por quatro funções de pertinência triangulares, sendo estas: Insuficiente, Regular, Bom e Excelente.

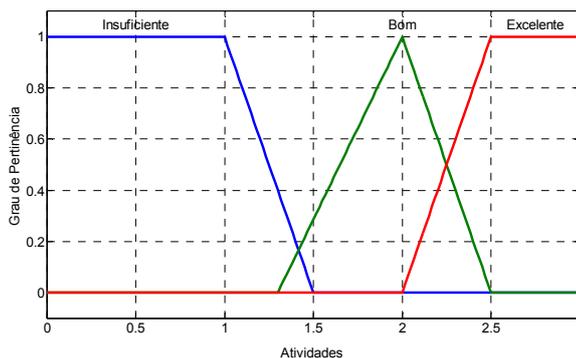


Figura 1 - Funções de pertinência para a variável de entrada Atividades.

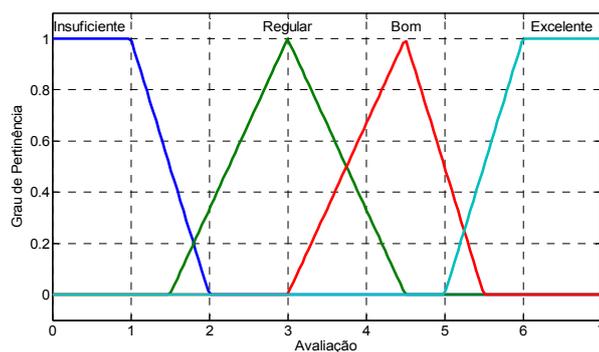


Figura 2 - Funções de pertinência para a variável de entrada Avaliação.

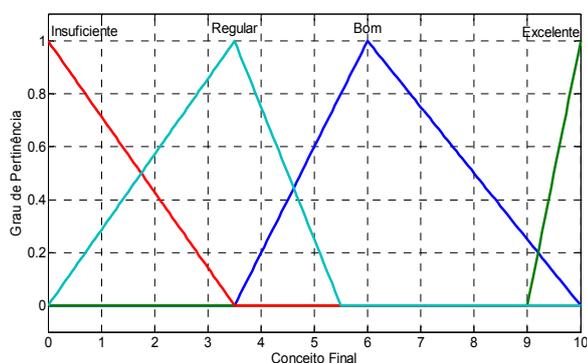


Figura 3 - Funções de pertinência para a variável de saída Conceito Final.

Todos os conjuntos *fuzzy* representando as variáveis relacionadas por funções de pertinência são chamadas de base de conhecimento. Um conjunto de regras de inferência é adotado para manipular a base de conhecimento. O método mais utilizado para representar o conhecimento humano é através de expressões de linguagem natural como: SE (antecedente) ENTÃO (consequente).

A base de conhecimento tem informações incertas, porém significativas para a modelagem do sistema. Esta incerteza é completamente resolvida com a entrada e saída dos conjuntos *fuzzy* e com a estratégia de manipulação da base de conhecimento pré-definidas. A base de conhecimento utilizada neste trabalho foi modelada com informações significativas para o sistema, de acordo com a entrevista feita com o professor. Esta base é composta de 12 regras de mesmo peso, e algumas são listadas a seguir:

1. Se avaliação é Regular e Atividades é Bom, então Conceito Final é Regular.
2. Se avaliação é Bom e Atividades é Bom, então Conceito Final é Bom.
3. Se avaliação é Excelente e Atividades é Bom, então Conceito Final é Excelente.

Em seguida é definido o modelo de inferência utilizado. Os tipos de modelos de sistemas de inferência *fuzzy* são diferenciados pela habilidade em representar diferentes tipos de informação, ou seja, na forma que se representa a base de regras. O modelo de inferência utilizado neste trabalho é o modelo Mamdani (MANDANI, 1975 e 1976), que é o modelo mais utilizado na literatura e que inclui os modelos linguísticos baseados em coleções de regras SE-ENTÃO. Neste modelo de inferência, as quantidades *fuzzy* são associadas com rótulos linguísticos e o modelo é essencialmente uma expressão qualitativa do sistema.

Como as conclusões são baseadas na análise de todas as regras no sistema de inferência, essas devem ser combinadas de alguma maneira, a fim de auxiliar na tomada de decisão, neste caso de estudo, do conceito final do discente. Agregação é o processo pelo qual os conjuntos *fuzzy* que representam as saídas de cada regra são combinados em um único conjunto *fuzzy*.

No método de implicação Mamdani, a saída agregada é:

$$\mu_{B_n^k}(x(i), x(j)) = \max \left(\min \left(\mu_{A_{n_1}^k}(x(i)), \mu_{A_{n_2}^k}(x(j)) \right) \right), \text{ para } k = 1, \dots, r$$

onde $A_{n_1}^k$ e $A_{n_2}^k$ representam conjuntos *fuzzy* antecedentes, μ representam funções de pertinência, B_n^k representa o conjunto *fuzzy* para as entradas consequentes $x(i)$ e $x(j)$.

Após definidas as regras e o método utilizado, ocorre a inferência. Na defuzzificação é necessário um processo de tradução do conjunto *fuzzy* resultante do método de inferência para um número real. Na literatura existem alguns métodos de defuzzificação utilizados, dentre eles: centróide, centro dos máximos, média dos máximos, princípio da máxima associação - também conhecido como método da altura, e bissector.

A escolha da estratégia de defuzzificação utilizada no sistema deste trabalho foi realizada de forma empírica através do desempenho na simulação para o caso em análise. O método de defuzzificação escolhido foi o bissector, o qual divide a área em regiões equivalentes. Este método produziu resultados mais adequados, de acordo com a entrevista com o professor, em comparação com o método centróide, que é também um método bastante utilizado na literatura.

Para a tomada de decisão sobre o sistema escolhido para aplicação em dados reais, foram realizados testes com uma base de dados escolhida aleatoriamente, tentando contemplar a maior quantidade possível de situações para avaliar o desempenho dos estudantes. Neste teste, consideramos a Avaliação de 0,0 a 7,0 aumentando de meio em meio ponto, combinando com as Atividades de 0,0 a 3,0 atribuindo valores aleatórios para esta variável. Na Tabela 1,

apresentamos as notas de Avaliação, Atividades, Índice Clássico e o Índice *Fuzzy* para esse caso teórico.

Tabela 1 - Índice Clássico e Índice *Fuzzy*: dados aleatórios

Caso	Avaliação	Atividades	Índice Clássico	Índice <i>Fuzzy</i>
1	0,00	1,55	1,55	1,40
2	0,50	2,98	3,48	3,10
3	1,00	1,02	2,02	1,00
4	1,50	2,42	3,92	2,90
5	2,00	1,55	3,55	2,90
6	2,50	1,13	3,63	1,10
7	3,00	0,09	3,09	1,00
8	3,50	1,59	5,09	4,60
9	4,00	2,15	6,15	5,80
10	4,50	0,17	4,67	3,10
11	5,00	1,89	6,89	6,60
12	5,50	2,71	8,21	9,60
13	6,00	1,60	7,60	9,60
14	6,50	1,76	8,26	9,70
15	7,00	0,45	7,45	6,40

A influência das variáveis Avaliação e Atividades na variável Conceito Final, que representa a nota do discente, pode ser observada na Figura 4, através da superfície de mapeamento de entrada-saída.

Observe que no caso 4 da Tabela 1, o discente obteria, caso fosse utilizado o índice clássico, o conceito final 3,92. No caso da análise utilizando o modelo *fuzzy*, o discente apresenta conceito final igual a 2,90. Essa redução no conceito final do discente pode indicar qual foi o seu real desempenho. Deve-se considerar que o método utilizado abrange o desempenho do discente nas diferentes atividades que correspondem as variáveis de entrada. Neste caso, em

especial, as notas individuais de cada avaliação mostram que o discente teve um desempenho insuficiente na avaliação, enquanto que nas atividades, seu desempenho foi excelente. Isto pode indicar evoluções diferentes do discente utilizando distintas formas de avaliação. Vale salientar que o conceito do item Atividade, de acordo com a entrevista com o professor, foi gerado a partir de diversas atividades em sala de aula ou não, realizadas individualmente (com consulta) ou em grupo. E o conceito do item Avaliação, foi gerado a partir de uma avaliação individual e sem consulta em sala de aula.

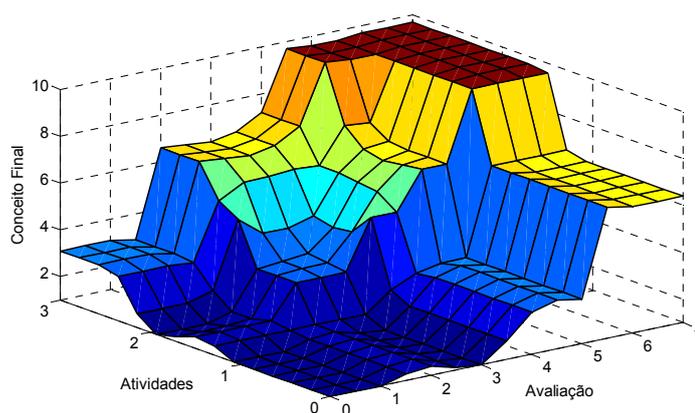


Figura 4 - Mapeamento de entrada-saída entre Avaliação e Atividades.

No caso 13 da Tabela 1, o discente obteria, caso fosse utilizado o índice clássico, o conceito final 7,60. No caso da análise utilizando o modelo *fuzzy*, o discente apresenta conceito final igual a 9,60. Este caso indica claramente a influência das variáveis na modelagem do sistema. A variável “Atividades” com conceito Bom influenciou diretamente no aumento do Conceito Final. Observe na Figura 4 que este caso coincide com a região mais escura e alta da superfície.

4 Análise de casos utilizando o modelo *fuzzy*: possíveis vantagens e desvantagens

A escolha da turma e das notas dos estudantes para esse estudo de caso foi realizada pelo professor entrevistado. De acordo com ele, a escolha por essa turma foi motivada pelo seu conhecimento e relação com os alunos, pois ele ministrou aulas de Cálculo Diferencial e Integral para essa turma por três semestres consecutivos, o que possibilitou reconhecer as estratégias de estudo (realização de atividades, pesquisas, dúvidas e dificuldades, consulta de outras referências, entre outros aspectos) de cada um dos 21 estudantes, assim como identificar a postura dos mesmos frente à construção de conhecimento, a realização das tarefas propostas nas aulas e também nas atividades extraclasse. Faremos a comparação entre

a nota final dos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, ministrada em um semestre, utilizando um método do professor, que denominamos aqui de *índice clássico* e o sistema utilizando o modelo fuzzy, indicado aqui como *índice fuzzy*.

A nota do professor que gerou o índice clássico foi calculada por meio da seguinte fórmula, $NF = 0,3AT + 0,7PR$, onde a sigla AT indica uma nota obtida por meio da realização de diversos tipos de atividades propostas (nota de 0 a 10), e PR à avaliação individual e sem consulta, também de 0 a 10. É considerado aprovado o estudante que obtém nota final (NF) maior ou igual a 5. A coleção de dados (notas) referente a turma citada anteriormente está disposta na Tabela 2, que também apresenta os resultados obtidos com os índices clássicos e *fuzzy*. Faremos algumas considerações acerca dos casos 16, 17 e 18.

No caso 17, observa-se que, considerando o critério de aprovação descrito pelo professor e o cálculo da nota por meio do *índice clássico*, o discente estaria aprovado; o que não ocorreria com o índice *fuzzy*. Ainda em relação a esse caso, salientamos que o professor afirmou que se trata de um estudante dedicado, que costuma realizar todas as atividades, faz pesquisas complementares aos seus estudos, consultando diversos livros, mas teve problemas familiares durante o semestre considerado afetando seu desempenho, em especial na prova (avaliação), pois nos semestres anteriores o rendimento do referido estudante foi muito acima da média, esse fato coloca em questão novamente o peso e a importância das provas nas notas finais dos discentes perante os demais tipos de atividades.

Tabela 2 - Índice Clássico e Índice *Fuzzy*: dados reais

Caso	Avaliação	Atividades	Índice Clássico	Índice <i>Fuzzy</i>
1	0,00	0,00	0,00	1,00
2	6,10	2,20	8,30	9,70
3	0,00	1,50	1,50	1,50
4	4,20	2,00	6,20	6,00
5	0,00	1,50	1,50	1,50
6	0,00	1,50	1,50	1,50
7	5,10	1,50	6,60	6,70
8	3,30	1,70	5,00	3,70

9	3,90	1,50	5,40	5,00
10	4,50	1,50	6,00	6,60
11	3,00	1,50	4,50	2,90
12	2,90	2,30	5,20	5,40
13	0,00	1,50	1,50	1,50
14	2,80	2,20	5,00	4,30
15	3,00	1,50	4,50	2,90
16	6,00	1,80	7,80	9,70
17	3,7	2,00	5,70	4,70
18	3,9	1,50	5,40	5,00
19	2	1,90	3,90	2,90
20	0,4	0,00	0,40	1,00
21	6,4	2,80	9,20	9,70

No caso 18, o discente estaria aprovado por ambos os índices, entretanto de acordo com as informações do professor da turma, esse estudante mostrava vários tipos de dificuldades em relação aos conteúdos e frequentemente recorria aos colegas de turma para conseguir realizar as diversas atividades propostas. Destaca-se ainda a baixa frequência desse estudante nas aulas, o que levou à sua reprovação na disciplina por faltas, independentemente da nota final que obteve. Escolhemos esses dois casos para uma análise comparativa, para destacar a importância do especialista (professor) na modelagem do sistema e na construção das funções de pertinência e das regras da base de conhecimento. Observe que os valores próximos das variáveis envolvidas poderiam indicar desempenho parecido de ambos os estudantes, e não a reprova de um deles.

Analisando as funções de pertinência das variáveis envolvidas (Figs. 1 e 2), ambos os casos apresentam para o conceito de Atividades a contribuição da função Bom. Apesar da diferença entre os valores ser de 0,5 ponto, para que o conceito Atividades tenha uma grande influência no conceito final de algum dos dois casos, a função Excelente ou Insuficiente deveriam também ter alguma contribuição. Isto justifica uma análise criteriosa da outra variável de entrada: a variável Avaliação.

Nos dois casos, para o conceito Avaliação, temos a contribuição da função Bom. O caso 18 tem uma contribuição maior da função Bom do que o caso 17, que também apresenta contribuição da função Regular, como mostra o detalhe da Figura 5. Esta contribuição maior da função Bom no caso 18 causa o aumento na nota final deste estudante em comparação com a nota final do estudante do caso 17. Observe a influência dessa variável nesses dois casos no mapeamento apresentado na Figura 6. Os detalhes desta figura mostram que a região de análise onde se encontram os casos 17 e 18, apresenta uma grande inclinação da superfície devido a variável Avaliação. Essa inclinação indica a influência mais atuante dessa variável na variável de saída Conceito Final, o que justifica a diferença nos índices *fuzzy* desses dois casos, sendo um deles com características de reprovação (conceito final < 5,0).

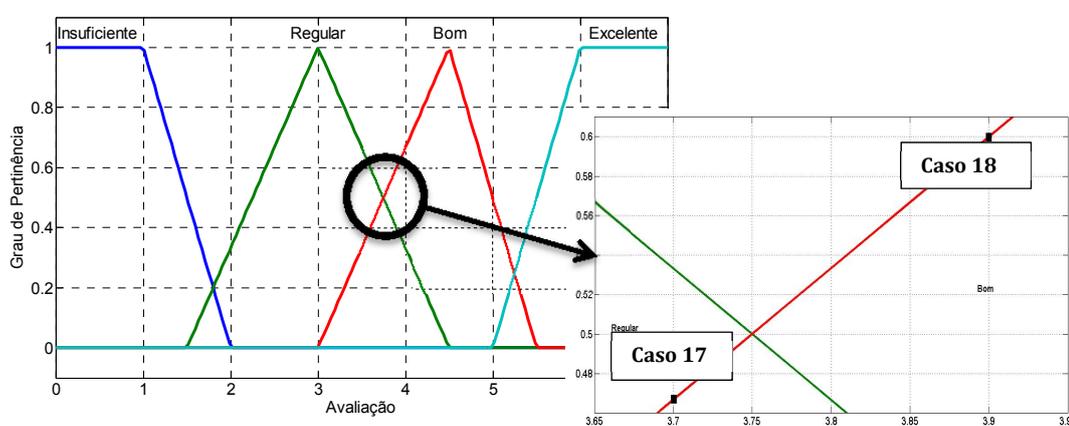


Figura 5 – Região de interesse para análise dos casos 17 e 18.

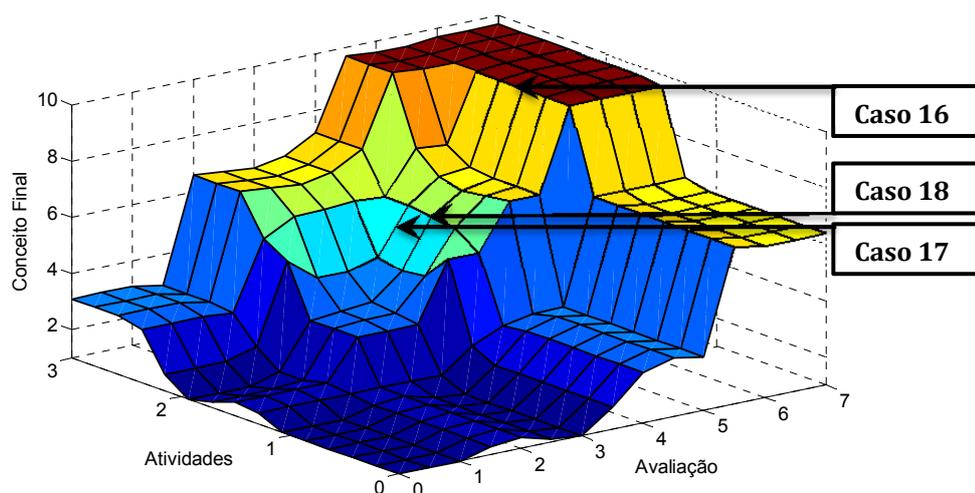


Figura 6 – Região de interesse do mapeamento das variáveis para análise dos casos 16, 17 e 18.

No caso 16, as variáveis Avaliação e Atividades apresentam apenas a contribuição da função Excelente e da função Bom, respectivamente. Neste caso, o professor destacou que se tratava de um estudante muito dedicado, que além de realizar todas as atividades, pesquisava possibilidades de aplicações dos conceitos estudados em outras áreas do conhecimento, fazendo inclusive articulações internas à própria Matemática. No semestre considerado esse estudante manteve o bom desempenho obtido em semestres anteriores, diferentemente do caso 17 citado acima. De acordo com a entrevista feita com o professor, estabeleceu-se uma regra (regra 3 apresentada na seção anterior), cujo Conceito Final resultaria em Excelente para esse tipo de variável de entrada. Isto justifica o aumento do índice *fuzzy* em relação ao índice clássico para este caso. Observe que no mapeamento da Figura 6, a região de análise encontra-se nos ponto mais alto da superfície.

5. Considerações Finais

É consenso entre os trabalhos acadêmicos que a avaliação das aprendizagens discentes apresenta muita subjetividade, por exemplo, o relacionamento do professor com a turma ou a participação dos discentes em atividades extraclasse. Essa subjetividade pode causar desconfortos entre os discentes e os professores no momento da composição quantitativa da nota final. Além disso, destaca-se a grande dúvida em relação aos critérios que devem ser estabelecidos para atribuir maior valor às provas ou a outros tipos de atividades, ou seja, o que deve influenciar mais a nota final de um estudante, seu desempenho em uma prova, ou seu desempenho em outros tipos de atividades?

Para evitar essa subjetividade inerente aos processos avaliativos, ou a inércia dos mesmos em quantificar a aprendizagem de determinada habilidade e/ou conceito, propomos neste trabalho um modelo de composição da nota a partir da Lógica *Fuzzy*. O modelo foi composto a partir de uma entrevista com um professor. Os resultados também foram apresentados a ele, a fim de validarmos o modelo de acordo com a avaliação das aprendizagens dos discentes esperada pelo professor.

Nosso trabalho baseou-se em um estudo de caso de uma turma, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, contando com uma entrevista e discussões com o professor que ministrou a disciplina. A entrevista com o professor motivou principalmente a construção das funções de pertinência. Com os casos abordados na seção anterior, é possível notar que se houvesse uma melhor distribuição na função de pertinência do conceito Atividades, o caso 17, por exemplo, teria um aumento na nota do Conceito Final, se sua nota em Atividades fosse

considerada Excelente. Por isso, consideramos que este modelo encontra-se em desenvolvimento e deverá ser aprimorado para trabalhos futuros.

Ainda de acordo com o professor, os casos 17 e 18 que apresentamos na seção anterior estão de acordo com o esperado pelo mesmo visto que apenas a nota final obtida pelo critério de aprovação descrito pelo professor e o cálculo da nota por meio do *índice clássico*, não refletiu a real situação dos estudantes no semestre considerado. Apesar da proximidade entre as notas finais, a postura dos estudantes frente à construção de conhecimento eram muito distintas. Isso indica a necessidade do desenvolvimento de um processo avaliativo mais completo, que permita considerar outros aspectos além da tradicional prova. Evidentemente, destaca-se a concepção de avaliação, tanto dos pesquisadores quanto do professor entrevistado, esse fato valoriza o modelo *fuzzy* proposto, pois o mesmo permite adequar os parâmetros para melhor representar as diferentes concepções dos professores e ainda contemplar diversas características fundamentais em um processo de avaliação discente. Salientamos ainda que o modelo *fuzzy* proposto foi capaz de detectar as nuances “pessoais” de cada aluno na composição do Conceito Final.

Para pesquisas futuras, serão feitas novas entrevistas com professores para um possível ajuste do modelo, com inclusão de mais processos avaliativos, aplicação a outras turmas, gerando outros estudos de casos e comparações entre as turmas. Também pesquisas mantendo a mesma turma e vários professores aplicando o mesmo processo avaliativo em disciplinas diferentes. Além disso, um dos testes a serem considerados no modelo *Fuzzy* será a aplicação do modelo de inferência Takagi-Sugeno em comparação ao modelo Mandami.

Por fim, ressaltamos que o grande diferencial deste sistema é a possibilidade de classificar o desempenho dos discentes considerando o uso de vários indicadores, aos quais os professores de disciplinas específicas têm acesso. Este trabalho poderá colaborar, por exemplo, com programas de controle de evasão, devido ao fato de agrupar diversos tipos de atividades e não apenas as avaliações tradicionais (provas).

Referências

ALMOND, R. G. Discussion: Fuzzy Logic: Better Science? Or Better Engineering? *Technometrics*, v. 37, n. 3, p. 267-270, 1995.

BARRANTES, A. C; FONSECA, R. F; TIAGO, G. M. **Sistema de Inferência Fuzzy Aplicado na Avaliação Discente**. Anais do Consistec, 2011.

BAUCHSPIESS A. **Introdução aos Sistemas Inteligentes: Aplicações em Engenharia de Redes Neurais Artificiais, Lógica Fuzzy e Sistemas Neuro-Fuzzy**. Universidade de Brasília, 2008. Disponível em <<http://lara.unb.br/~adolfo/ICIN/isi.pdf>>. Acesso em: 23 ago. 2013.

BOWDER, D. **Quem foi quem na Grécia Antiga**. São Paulo: Art Editora, 1982.

CASTANHO, M. J.; PEIXOTO, M. **Teoria dos conjuntos: Fuzzy no Matlab**, 1º Congresso Brasileiro de Sistema Fuzzy, v. único, p. 44, 2010.

CHEESEMAN, P. Discussion: Fuzzy Thinking. **Technometrics**, v. 37, n. 3, p. 282-283, 1995.

COHEN, J. L. **The Probable and the Provable**, Oxford: Oxford University Press, 1977.

DUBOIS, D., NGUYEN, H., PRADE, H. Possibility Theory, Probability and Fuzzy Sets Misunderstandings, Bridges and Gaps. In: DUBOIS, D., PRADE, H. (Orgs.) **Fundamentals of Fuzzy Sets**. Springer: Kluwer Acad. Publ., v.7, The Handbook of Fuzzy Sets Series, 2000. p. 343-438.

FARIA, M. N., MALVA, G. R. O., DORÇA, F. A., LOPES, R. S., FERNANDES, M. A. LOPES, C. R. **Um sistema de avaliação em EAD baseado em lógica fuzzy**. UFU: Horizonte científico, v. 2, n. 1, 2008. Disponível em <<http://www.seer.ufu.br/index.php/horizontecientifico/article/viewFile/3971/2957>> . Acesso em: 01 out 2013.

JAMISON, K. D., AND LODWICK, W. A. The Construction of Consistent Possibility and Necessity Measures. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 13, n. 1, p. 1-10, 2002.

KANDEL, A., MARTINS, A., PACHECO, R., Discussion: On the Very Real Distinction Between Fuzzy and Statistical Methods. **Technometrics**, v. 37, n. 3, p. 276-281, 1995.

KLIR, G. J, ST. CLAIR, U., YUAN, B. **Fuzzy set theory: foundations and applications**. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1997.

KLIR, G. J., YUAN, B. **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic-Theory and Applications**. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1995.

KLIR, G. J. On fuzzy-set interpretation of possibility theory. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 108, n. 3, p. 263-273, 1999.

LAVIOLETTE, M., SEAMAN, J. W., BARRET, J. D., WOODALL, W. H. A Probabilistic and Statistical View of Fuzzy Methods. **Technometrics**, v. 37, n. 3, p. 249-261, 1995.

LEWIS, D. **Counterfactuals**. Oxford: Blackwell Publishers, 1973.

LIN, C.-T., LEE, C. S. G. **Neural Fuzzy Systems: A neuro-fuzzy synergism to intelligent systems**. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1996.

LODWICK, W. A., JAMISON, K. D. Fuzzy Optimization: Computational Methods and Applications to Radiation Therapy of Tumors. **EUFIT - The European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing**, v. 3, 1998, p. 1888-1898.

LODWICK, W., JAMISON, K. Estimating and Validating the Cumulative Distribution of a Function of Random Variables: Toward the Development of Distribution Arithmetic. **Reliable Computing**, v. 9, n. 2, p. 127-141, 2003.

LUCKESI, C. **Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições**. 20. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

MAMDANI, E. H., ASSILIAN, S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. **International Journal of Man-Machine Studies**, v. 7, n. 1, p. 1-13, 1975.

MAMDANI, E. H.. Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers. **International Journal of Man-Machine Studies**, v. 8, n. 6, p. 669-678, 1976.

MATHWORKS. **About MathWorks – Founders – Cleve Moler**. The MathWorks, Inc., 1994 – 2013. Disponível em <<http://www.mathworks.com/company/aboutus/founders/clevemoler.html>>. Acesso em: 08 out. 2013.

PERRENOUD, P. **Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens entre duas lógicas**. Tradução: Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artmed, 1999.

SACRISTÁN, J. G. **O currículo: uma reflexão sobre a prática**. Tradução: Ermani F. da F. Rosa. 3ed. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SHACKLE, G. L. S. **Expectations in Economics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1949.

SOWELL, T. **Fuzzy Logic for 'Just Plain Folks': Plug in to the Systems Control, Financial and Emotional Success Genius Born in You**. Lubbock: Tesco Publishing Company, 1998.

SUGENO, M. **Industrial applications of fuzzy control**. New York: Elsevier Science Pub. Co., 1985.

YAGER, R. R., FILEV, D. P. **Essentials of fuzzy modeling and control**. New York: Wiley-Interscience New York, 1994.

YEN, J. Fuzzy Logic: A Modern Perspective. **IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering**, v.11, n. 1, p. 153-165, 1999.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 100, p. 9-34, 1978a.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. **Information and Control**, v. 8, n. 4, p. 338-353, 1965.

ZADEH, L. A. From Circuit Theory to System Theory. **Proceedings of the IRE**, v. 50, n. 5, p. 856-865, 1962.