http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n1p131

Atividades investigativas: possibilidade de ensino de conceitos trigonométricos no triângulo retângulo na Licenciatura em Matemática

Investigative activities: possibility of teaching of trigonometric concepts on right triangle on Degree in Mathematics

Adelmar Barros Pereira
adelmar_barros@yahoo.com.br

Angélica Vier Munhoz
angelicavmunhoz@gmail.com

Marli Teresinha Quartieri
mtquartieri@univates.br

Resumo

Este artigo é um recorte da pesquisa de Mestrado em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES – Lajeado – RS, que tem por objetivo abordar as conjecturas que emergiram de atividades investigativas envolvendo alguns conceitos de trigonometria no triângulo retângulo com alunos da Licenciatura em Matemática. Nessa perspectiva foram elaboradas atividades investigativas com intuito de promover a significação de alguns conceitos trigonométricos no triângulo retângulo, bem como desenvolver a capacidade da escrita Matemática. Foram utilizados referenciais teóricos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) que tratam da Investigação Matemática quanto metodologia de ensino. Para coleta de dados foi adotada a observação, a produção de relatórios pelos alunos, registros em diários de campo e filmagem das apresentações e discussão dos resultados, além de uma avaliação escrita no término das atividades. Os resultados apontam um progressivo desenvolvimento da capacidade de elaboração de conjecturas, bem como da presença cada vez maior da escrita. Além disso, os alunos reconheceram de modo significativo a aprendizagem de alguns conceitos trigonométricos.

Palavras-chave: Investigação Matemática; Licenciatura em Matemática; Trigonometria; Triângulo Retângulo.

Abstract

This article is an excerpt of the Masters Research in Exact Sciences Teaching of the University Center UNIVATES, Lajeado - RS, which aims to address the conjectures that emerged from investigative activities involving some trigonometry concepts in the right triangle with students of the Degree in Mathematics. From this perspective investigative activities have been prepared with a view to promoting the significance of some trigonometric concepts in right triangle, as well as developing the mathematical writing ability. Theoretical reference was used of Ponte, Brocardo and Oliveira (2013) that deal with the Mathematical Investigation as teaching methodology. For data collection was adopted observation, the production of reports by students, field diaries and records footage of the presentations and discussion of the results, and a written evaluation at the end of the activities. The results show a progressive development of the elaboration of conjectures capacity and the increasing presence of writing. Moreover, students recognized significantly learning trigonometric some concepts.

Keywords: Mathematical Investigation; Degree in Mathematics; Trigonometry; Right Triangle.

Introdução

Na educação básica e superior o ensino e a aprendizagem da Matemática são considerados desafios a ser superados. No entanto, para Demo (2011), a tendência é da experiência acadêmica se tornar apenas teórica e distante da capacidade reconstrutiva. Além do mais, esse contexto é representado por aulas em que ensinar é apenas copiar. Em lugar da aula copiada, esse autor indica a pesquisa como elemento capaz de desenvolver competências tanto no aluno quanto no professor.

Entre outros, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) defendem a pesquisa inclusive como método de ensino. Neste sentido, esses autores desenvolveram pesquisas em torno da tendência metodológica Investigação Matemática. Para esses pesquisadores, a Investigação Matemática possibilita o desenvolvimento na sala de aula do espírito da atividade Matemática em sua essência, ou seja, o aluno é convidado a atuar como um matemático, formulando questões, conjecturas, realizando provas e refutações, bem como apresentando resultados e discutindo-os, além de argumentar com seus colegas e o professor. Como tendência metodológica de ensino a Investigação Matemática pode ser utilizada no desenvolvimento dos diversos conteúdos da disciplina Matemática. Entre eles as noções básicas de trigonometria.

Em geral, os alunos apresentam dificuldades de compreensão dos conteúdos de trigonometria. Essa situação pode ser explicada com base na experiência de Miranda, Padilha e Ciani (2013). Nos seus relatos, as autoras afirmam que sabiam muito pouco de trigonometria quando ingressaram na Licenciatura em Matemática. Segundo as mesmas, o que foi visto no Ensino Médio foi de forma superficial, o conteúdo abrangia ínfima parte do conhecimento historicamente construído em trigonometria. Esse fato decorre do modo de abordagem do conteúdo em sala de aula que, geralmente, consiste na resolução de exercícios baseada na memorização e aplicação mecânica de fórmulas.

Ávila (2009) chama atenção para a necessidade de uma ação que desfaça o sentimento presente nos alunos recém-saídos do Ensino Médio de que a trigonometria é um conteúdo difícil. Nesse sentido, Ávila (2009) argumenta que os conhecimentos trigonométricos são úteis em diferentes áreas em que ocorrem fenômenos vibratórios, bem como nas ciências aplicadas.

Por considerar relevante o ensino e a aprendizagem dos conhecimentos trigonométricos, esta pesquisa foi delimitada como: Investigação Matemática e o ensino de trigonometria no triângulo retângulo com alunos de Licenciatura em Matemática. A partir do tema delimitado, o estudo buscou responder ao seguinte problema: Quais as conjecturas que emergem de um grupo de alunos de Licenciatura quando envolvido em atividades investigativas de alguns conceitos de trigonometria no triângulo retângulo?

A seguir apresenta-se alguns fundamentos teóricos, bem como os procedimentos metodológicos adotados e as atividades efetivadas e a análise dos dados emergentes no estudo.

Fundamentação Teórica

Consoante às diretrizes curriculares para os cursos de Matemática, o licenciado em Matemática, deverá ter, entre outras, a capacidade de "desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos" (BRASIL, 2001, p. 4). Desse modo, a formação de professor de Matemática deveria almejar a preparação de um futuro docente autônomo, criativo, reflexivo com domínio dos conceitos e capaz de gerar e modificar o conhecimento de acordo com o contexto.

Nessa perspectiva, novas tendências metodológicas de ensino têm sido incorporadas na formação docente, entre as quais a Investigação Matemática. Para Ponte (2003) a atividade investigativa se distingue de outras tarefas matemáticas. Segundo o autor, na investigação a questão não está bem definida, cabendo ao investigador o papel principal na sua definição. Assim, os pontos de partida podem não ser precisamente os mesmos para todos os alunos, por conseguinte, os pontos de chegada podem ser também diferentes.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), nos processos de ensino e de aprendizagem investigar não significa trabalhar com problemas muito difíceis, mas equivale formular questões para as quais ainda não se tem respostas; procurar responder a essas questões de modo mais fundamentado e rigoroso possível; é também lidar com questões que se apresentam inicialmente confusas, mas que devem ser clarificadas e estudadas de modo organizado. Além do mais, investigar não é produto da aplicação de técnicas de levantamento de dados e de análise estatística ou de conteúdo, mas pressupõe acima de tudo "uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo" (PONTE, 2003, p. 21).

A realização de uma Investigação Matemática envolve quatro momentos principais que podem surgir simultaneamente: primeiro momento – "o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões"; segundo momento – processo de formulação de conjecturas; terceiro momento – realização de testes e refinamento das conjecturas; e quarto momento – ocorre a argumentação, a demonstração e avaliação do trabalho realizado (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 20).

Para os autores, as atividades desenvolvidas durante os diversos momentos da Investigação Matemática estão ao alcance dos alunos na sala de aula de Matemática. Segundo Ponte (2003), as atividades investigativas conduzem o aluno a sucessivos graus de generalização e de abstração que possibilitam a justificação das conjecturas elaboradas no trabalho investigativo. Mas a justificação de conjecturas pode não ser simples, como destaca Saraiva (2012). Segundo a autora, uma das dificuldades no desenvolvimento das tarefas investigativas se refere a comunicação oral e escrita, pois como observou em seu estudo, os alunos do quarto ano da Licenciatura em Matemática "não estavam acostumados a escrever e formalizar conceitos matematicamente" (SARAIVA, 2012, p. 57).

Procedimentos Metodológicos

A intervenção pedagógica da pesquisa foi desenvolvida em sete encontros no formato de minicurso de vinte e uma horas-aulas em que participaram os alunos do 2º ano de Licenciatura em Matemática. Os encontros tiveram duração de três horas aulas, de cinquenta minutos cada. As atividades investigativas foram realizadas por pequenos grupos de alunos, em que cada participante recebeu para seu uso régua, compasso e transferidor. Além disso, os grupos socializaram no final de cada encontro os resultados decorrentes das atividades realizadas com a turma e o professor.

As atividades exploradas com os discentes foram elaboradas conforme o propósito de promover a significação de alguns conceitos trigonométricos no triângulo retângulo, os quais convergem para o objetivo geral da pesquisa. Além disso, as mesmas foram distribuídas nos encontros de acordo com os conceitos a que estavam relacionadas. Por isso, as questões tiveram como pretensão por em evidência as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, em particular dos ângulos de 30º, 45º e 60º.

Com a exploração das atividades investigativas, além do espírito investigativo, o intuito foi instigar o trabalho em grupo e a escrita matemática. Para registro dos diversos aspectos da realização da Investigação Matemática e levantamento de dados foram procedidas observações do desenvolvimento das atividades, filmagens e diário de campo tanto do pesquisador quanto dos próprios discentes.

A análise das informações foi considerada fundamental, pois garante que os resultados finais se mostrem consistentes. Na fase inicial da análise ocorreu a organização das informações obtidas por meio de observações, das respostas das atividades aplicadas, dos diários de campo dos discentes, da transcrição das filmagens dos encontros e dos relatórios dos grupos de cada encontro.

Segundo Yin (2005) as evidências emergentes no estudo de caso devem ser analisadas com base em três estratégias gerais: corresponder às proposições teóricas aos objetivos da pesquisa; definir e testar explanações correntes, principalmente fazendo avaliações do estudo de caso, e desenvolver de modo organizado a descrição do caso. Para o autor, independente da estratégia analítica, deve-se voltar a atenção a qualidade do estudo. Nesse sentido, quatro princípios devem nortear a análise: a) a análise deve demonstrar todas as evidências coletadas; b) a análise deve ressaltar as intepretações concorrentes relevantes; c) a análise deve priorizar os aspectos significativos do caso estudado; d) deve-se usar o conhecimento prévio das discussões e do debate atual em torno da temática do caso (YIN, 2005).

A triangulação dos dados coletados é indicada por Yin (2005), entre outros autores, como procedimento essencial à validação da pesquisa. Segundo o autor, o estudo de caso possibilita a triangulação de dados como estratégia de validação. Nesse aspecto, o mesmo autor orienta que sejam utilizadas múltiplas fontes de evidência relativas ao mesmo fenômeno. Além da criação de uma base de dados, por meio de documentos e narrativas de interpretações e descrições dos eventos observados e registrados; deve-se também estabelecer uma cadeia de evidências de modo a tornar perceptíveis as evidências que legitimem o estudo.

Atividades Efetivadas e Análise dos Dados Emergentes

Nesta seção, pretende-se relatar as atividades exploradas, bem como os resultados obtidos no quarto e quinto encontros do estudo realizado. Nestes encontros foram desenvolvidas atividades investigativas em torno dos conceitos de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Ressalta-se que nos três primeiros encontros as atividades versaram sobre a semelhança entre triângulos. Nos últimos encontros as atividades voltaram-se para exploração das razões trigonométricas no círculo.

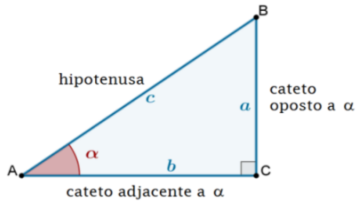
Além de observar e anotar os fatos relevantes, durante os encontros, procurou-se acompanhar todos os grupos na realização das atividades. Em cada equipe, buscou-se compreender o raciocínio adotado pelos alunos. Algumas vezes, o grupo foi questionado para entender melhor o procedimento adotado ou, principalmente, para provocar uma discussão entre os participantes que proporcionasse um redirecionamento no procedimento adotado por todos.

As atividades investigativas propostas tinham a pretensão de conduzir os alunos às razões trigonométricas no triângulo retângulo, a partir da exploração das razões entre os lados do triângulo na perspectiva dos ângulos de 30º e de 60º. Inicialmente foram nomeados os lados de um triângulo retângulos na Questão 1 (QUADRO 1).

Quadro 1: Atividades investigativas – Questão 1.

1 – Os lados de um triângulo retângulo são nomeados conforme Figura 1.

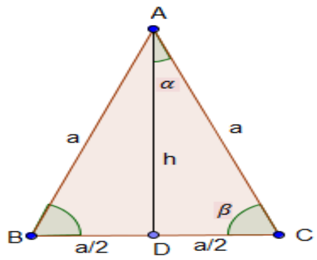
Figura 1 – Triângulo Retângulo



Fonte: <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php/Ficheiro:RelacTrig1.png>

1.1 – Dado o triângulo ABC, equilátero, Figura 2.

Figura 2 – Triângulo equilátero



Fonte: Do Autor

Investigue:

a) quais as medidas dos ângulos internos do triângulo ABC, em A, B e C?

b) se AD é a altura do triângulo ABC, o que se pode afirmar sobre as medidas dos ângulos internos em A, D e C?

c) como pode ser classificado o triângulo ADC? Justifique sua resposta.

1.2 – Com a medida em graus do ângulo α do triângulo $D\hat{A}C$, investigue as relações entre os lados do triângulo $D\hat{A}C$. Variar o tamanho do lado do triângulo $D\hat{A}C$ de acordo com as medidas dadas no Quadro 1.

Quadro 1 – Relações no triângulo $D\hat{A}C$

Medidas						$\frac{Cateto\ Oposto\ a\ \alpha}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ Adjacente\ a\ \alpha}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ Oposto\ a\ \alpha}{Cateto\ Adjacente\ a\ \alpha}$
Lado (a) (em cm)	Altura (h)	α (em graus)	AC	AD	DC			
5								
6								
7								
n								

1.3 – Com a medida em graus do ângulo β do triângulo $A\hat{C}D$, investigue as relações entre os lados do triângulo $A\hat{C}D$. Variar o tamanho do lado do triângulo $A\hat{C}D$ de acordo com as medidas dadas no Quadro 2.

Quadro 2 – Relações no triângulo $A\hat{C}D$

Medidas						$\frac{Cateto\ Oposto\ a\ \beta}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ Adjacente\ a\ \beta}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ Oposto\ a\ \beta}{Cateto\ Adjacente\ a\ \beta}$
Lado (a) (em cm)	Altura (h)	β (em graus)	AC	AD	DC			
5								
6								
7								
n								

1.4 – Com os dados obtidos no Quadros 1 e 2, investigue:

a) o que é determinante nos valores das razões entre os lados do triângulo?

b) quais as conjecturas que podem ser extraídas das relações apresentadas nos Quadros 1 e 2?

c) o que há de semelhança entre os Quadros 1 e 2?

1.5 – Investigue, a partir dos dados obtidos nos Quadros 1 e 2, o que pode acontecer se variar a medida “a” do lado do triângulo ABC?

a) Como ficam as relações entre os novos triângulos e os anteriores?

b) O que ocorre com a medida dos ângulos α e β?

c) O que ocorre com a medida dos novos perímetros em relação aos anteriores?

d) Quais as relações entre os novos lados de cada triângulo novo e os lados anteriores?

1.6 – Com base nos dados dos quadros 1 e 2, o que pode afirmar sobre a semelhança entre os triângulos formados com a variação do lado “a”. Justifique sua resposta.

Fonte: Dos autores.

Ao item “a” da Questão 1.1, os alunos fundamentaram suas respostas em dois fatores: i) o triângulo é equilátero e, portanto, possui seus ângulos internos “iguais”; e ii) o soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º; logo, concluíram que cada ângulo interno era de 60º: “já que o triângulo ABC é equilátero e possui lados iguais, logo cada um de seus ângulos possuem 60º” (ALUNO I3).

Nos itens “b” e “c” da Questão 1.1, os alunos consideraram a formação do triângulo retângulo para fundamentarem suas respostas: “b) Quando se divide o triângulo equilátero as medidas são A30º, D90º e C60º; c) Como um triângulo retângulo, pois possui um ângulo reto” (ALUNO B3).

Nas questões 1.2 e 1.3, os estudantes investigaram as relações entre os lados do triângulo na perspectiva de seus ângulos agudos com o preenchimento de quadros que indicavam a variação dos lados. As respostas podem ser representadas pelas Figuras 1 e 2:

Figura 1: Resposta do Aluno B3 à Questão 1.2

Quadro 1 – Relações no triângulo $D\hat{A}C$

Medidas			hip.	Cat. Ad.	cat. op.	$\frac{\text{Cateto Oposto a } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto Adjacente a } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto Oposto a } \alpha}{\text{Cateto Adjacente a } \alpha}$
Lado (*a*) (em cm)	Altura (*h*)	α (em graus)	AC	AD	DC			
5	4,33	30°	5	4,33	2,5	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
6	$3\sqrt{3}$	30°	6	$3\sqrt{3}$	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
7	≈ 6,06	30°	7	6,06	7/2	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
n	$\frac{\sqrt{3}}{2}m$	30°	m	$\frac{\sqrt{3}}{2}m$	m/2	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$

Figura 2: Resposta do Aluno B3 à Questão 1.3

Quadro 2 – Relações no triângulo $A\hat{C}D$

Medidas			hip	cat. op.	cat. ad	$\frac{\text{Cateto Oposto a } \beta}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto Adjacente a } \beta}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto Oposto a } \beta}{\text{Cateto Adjacente a } \beta}$
Lado (*a*) (em cm)	Altura (*h*)	β (em graus)	AC	AD	DC			
5	4,33	60°	5	4,33	2,5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
6	5,2	60°	6	5,2	3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
7	6,06	60°	7	6,06	7/2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1/2	$\sqrt{3}$
n	$\frac{\sqrt{3}}{2}m$	60°	m	$\frac{\sqrt{3}}{2}m$	m/2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1/2	$\sqrt{3}$

Fonte: Aluno B3.

Com base nos dados das questões 1.2 e 1.3, os discentes elaboram conjecturas à Questão 1.4. Em geral, as respostas ao item "a", desta questão, afirmaram que os valores dos ângulos internos determinaram os valores das razões entre os lados dos triângulos. Em relação ao item "b", as respostas ressaltaram a constância das razões entre os catetos, e no item "c" os alunos afirmaram que a "altura", os "ângulos internos" e a medida da "hipotenusa" eram o que havia de semelhança entre os Quadros 1 e 2, respectivamente das questões 1.2 e 1.3.

É notório que as respostas ao item "c", da Questão 1.4, indicam uma análise superficial da questão. Por isso, na exposição final dos trabalhos, suscitou-se o debate em torno desta questão. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 41), o balanço do trabalho é um momento importante, em que os alunos confrontam "suas estratégias, conjecturas e justificações, cabendo ao professor desempenhar o papel de morador".

Os alunos, na Questão 1.5, foram provocados a elaborar conjecturas sobre a variação da medida "*a*" do lado do triângulo ABC da Questão 1.1. As respostas, de modo geral, enfatizaram que seria mantida a relação de semelhança entre os triângulos; não seria alterada a medida dos ângulos α e β. No tocante, a medida dos novos perímetros em relação aos anteriores, existiria uma alteração, mas a razão permaneceria a mesma. Por último, os alunos afirmaram que as relações entre os novos lados de cada triângulo novo e os lados anteriores, a constante seria a mesma. Pode-se registrar que, mesmo de modo incipiente, os estudantes começaram a produzir generalizações em termos matemáticos.

Na socialização dos trabalhos, os quadros das questões 1.2 e 1.3 foram preenchidos na lousa por um dos grupos. Em seguida, foi perguntado para a turma com base na Questão 1.4: "o que é determinante nos valores das razões entre os lados dos triângulos?":

> O aluno A, respondeu: - "No caso, o lado, o valor de 'a'".
>
> Então, foram interpelados: "Atenção! Vamos ver aqui. Para vocês o que determinou a razão entre os lados?".
>
> Aluno A, afirmou: - "A razão entre os catetos, pois é, foram os lados".
>
> O Aluno A procurou justificar sua resposta argumentando sobre a medida "n" do lado. Então, continuou-se a questionar: - "Mas se observarmos aqui os lados são iguais?".
>
> O Aluno B, respondeu: - "Sim, a altura".
>
> Interpelou-se novamente: - "As alturas são iguais?".
>
> O Aluno B, então replicou: - "É, a altura é a mesma".
>
> Logo, chamou-se atenção para o Quadro 1: "Considerando o primeiro quadro aqui, as alturas são iguais?".
>
> A resposta dessa vez veio da Aluna C: "São diferentes". Em seguida, correram vários questionamentos e argumentos.
>
> Então, o Aluno D, questiona: - "Não seria o ângulo alfa? A medida do ângulo alfa".
>
> Voltou-se o questionamento ao Aluno D: - "Por que você acha?".

Nesse momento, a turma passou a refletir sobre a questão até chegar a conclusão que o determinante da igualdade das razões encontradas não são os lados, mas as medidas dos ângulos internos, no primeiro quadro o ângulo de 30º e no segundo o ângulo de 60º. Na sequência das exposições das respostas os alunos se mostraram surpresos com a revelação dos valores notáveis, como mostra o comentário da Aluna C: "a gente descobriu como faz para achar esses valores notáveis. A gente sempre tinha o quadro feito, agora descobri como chega até esses valores".

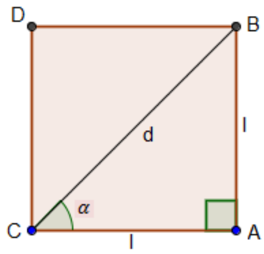
Em relação aos diários um aspecto relevante foram as expressões de motivação dos alunos pela realização das atividades. Conforme Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2004, p. 19) com a Investigativa Matemática "os alunos passam a experimentar uma outra relação com a matemática; uma relação mais prazerosa, motivadora e inquietadora, semelhante ao que experimentam os matemáticos quando criam e produzem novos conhecimentos".

No encontro seguinte, as atividades investigativas tiveram como intuito a exploração das razões trigonométricas, evidenciando os valores de seno, cosseno e tangente do ângulo de 45º. A exploração inicial da atividade decorreu com a análise do quadrado ABCD dado na Questão 2 (QUADRO 2).

Quadro 2: Atividades investigativas – Questão 2.

2 – Em relação ao quadrado ABCD, Figura 3, com lado de medida l e diagonal d.

Figura 3 - Quadrado



Fonte: Do autor.

2.1 – O que se pode afirmar sobre os triângulos formados com a diagonal d? Justifique sua resposta.

2.2 – Qual a medida do ângulo α do triângulo ABC?

2.3 – Os triângulos formados no quadrado ABCD são semelhantes? Justifique sua resposta.

2.4 – O que acontece se variar a medida l do lado do triângulo ABC? Investigue preenchendo o Quadro 3.

Quadro 3 – Relações no triângulo ABC

Medidas						$\frac{Cateto\ Oposto\ a\ \alpha}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ Adjacente\ a\ \alpha}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ Oposto\ a\ \alpha}{Cateto\ Adjacente\ a\ \alpha}$
Lado (*l*) (em cm)	Diagonal (*d*)	α (em graus)	AC	AB	BC			
5								
6								
7								
n								

2.5 - Com os dados obtidos no Quadro 3, investigue:

a) como ficam as relações entre os triângulos novos e os anteriores?

b) o que ocorre com a relação entre as novas diagonais e as anteriores?

c) o que ocorre com a medida do ângulo α?

d) o que ocorre com o perímetro do quadrado e dos triângulos novos em relação ao anterior?

e) o que é determinante nos valores das razões entre os lados do triângulo ABC?

f) quais conjecturas podem ser extraídas das relações entre os catetos e os catetos com a hipotenusa?

8.6 Com base nos dados do Quadro 3, o que pode afirmar sobre a semelhança entre os triângulos formados com a variação do lado l. Justifique sua resposta.

Fonte: Dos autores.

Em relação as respostas para a Questão 2.1, a maioria das conjecturas afirma que os triângulos são retângulos e semelhantes, sem a devida justificativa. Poucos alunos procuraram justificar suas conjecturas entre eles o Aluno A4 “são triângulos semelhantes, pois possuem os mesmos ângulos internos e o mesmo perímetro”.

Na Questão 2.2 os alunos deram prosseguimento a análise da Figura 3 da Questão 2. Em sua maioria, as respostas foram expressas apenas com o algarismo “45º”, entre as exceções esta a resposta: “O ângulo α tem 45º por que ele é metade de um quadrado que foi cortado na diagonal, assim cada canto do quadrado tem 90º e se cortados ao meio passa a ter 45º como no caso da figura” (ALUNO C4).

Os discentes na Questão 2.3 foram instigados a discorrer sobre a semelhança entre os triângulos formados no quadrado da referida questão e justificar suas respostas. Nessa questão, entre as conjecturas registradas está a do Aluno C4 “são sim, por que o quadrado está sendo dividido na diagonal de forma simétrica fazendo com que seus ângulos tenham o mesmo valor”.

Nas questões 2.2 e 2.3, os alunos não apresentaram dificuldade, pois estas apenas necessitavam de conhecimentos elementares trabalhados nos encontros anteriores. Além disso, as respostas indicaram um progresso dos alunos na compreensão dos conceitos trabalhados nos encontros.

Na Figura 3 está um exemplo do preenchimento do Quadro 3 da Questão 2.4.

Figura 3: Resposta do Aluno H4 à Questão 2.4.

Quadro 3 – Relações no triângulo ABC

Medidas			cat. Ad.	cat. op.	hip	$\frac{\text{Cateto Oposto a } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto Adjacente a } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto Oposto a } \alpha}{\text{Cateto Adjacente a } \alpha}$
Lado (*l*) (em cm)	Diagonal (*d*)	α (em graus)	AC	AB	BC			
5	$\sqrt{2}.5$	45°	5	5	$\sqrt{2}.5$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
6	$\sqrt{2}.6$	45°	6	6	$\sqrt{2}.6$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
7	$\sqrt{2}.7$	45°	7	7	$\sqrt{2}.7$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
n	$\sqrt{2}.m$	45°	m	m	$\sqrt{2}.m$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

Fonte: Aluno B3.

Os alunos, com base nos dados obtidos no Quadro 3, da Questão 2.4, investigaram as relações no triângulos retângulo ABC, Questão 2, na perspectiva do ângulo α. As conjecturas, de modo geral, em cada item da Questão 2.5 foram as que seguem.

Quanto ao item “a” - como ficam as relações entre os triângulos novos e os anteriores? – entre as respostas está a do Aluno D4 “a relação entre os triângulos anteriores só alteram os valores de seus lados, pois a razão entre eles são iguais e aos ângulos internos também”.

Quanto ao item "b" - o que ocorre com a relação entre as novas diagonais e as anteriores? – uma das respostas foi "elas estão ligadas diretamente, pois conforme vai aumentando o valor dos catetos aumenta também sua hipotenusa" (ALUNO B4).

No item "c" - o que ocorre com a medida do ângulo α? – apareceu como resposta: "o ângulo α mantem-se com a mesma medida de 45º" (ALUNO B4).

Quanto ao item "d" - o que ocorre com o perímetro do quadrado e dos triângulos novos em relação ao anterior? – uma das respostas foi: "eles vão ser sempre crescente, e a razão entre eles será a mesma" (ALUNO F4).

Para a letra "e" - o que é determinante nos valores das razões entre os lados do triângulo ABC? - apareceu: "o ângulo α" (ALUNO H4).

E, por fim, na letra "f" - quais conjecturas podem ser extraídas das relações entre os catetos e os catetos com a hipotenusa? – entre as respostas evidenciadas está "$\frac{Cateto\ Oposto\ a\ \alpha}{Cateto\ Adjacente\ a\ \alpha} = k = 1$, $\frac{Cateto\ Adjacente\ a\ \alpha}{Hipotenusa} = k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{Cateto\ Oposto\ a\ \alpha}{Hipotenusa}$" (ALUNO H4).

As conjecturas elaboradas na Questão 2.5 deixam transparecer o apego dos alunos aos algarismos ou aritmética. Apesar do Quadro 3 da Questão 2.4 conduzir para definições algébricas, as generalizações estão limitadas, pois não conseguiram avançar no campo da álgebra. Nesse contexto, o pensamento algébrico[1] dos alunos pode ainda se encontrar na fase de transição do aritmético para o algébrico. Nesta fase o "aluno aceita e concebe a existência de um número qualquer, estabelece alguns processos e generalizações, podendo ou não utilizar a linguagem simbólica" (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2004, p. 6).

Ainda com base nos dados do Quadro 3, os discentes, na Questão 2.6, investigaram se havia semelhança entre os triângulos formados com a variação do lado l e justificaram suas respostas. A maioria das respostas passou a indicar uma crescente segurança dos alunos em registrar suas conjecturas, exemplo: "Pode-se afirmar que com o aumento dos *l* (catetos) aumenta também a diagonal *d*, e os ângulos continuam sempre com as mesmas medidas já que os mesmos são semelhantes" (ALUNO B4).

As anotações indicam que, mesmo correndo o risco de cometer erros, os alunos passaram a se expressar de modo mais discursivo. Além disso, os registros sugerem haver melhor compreensão dos alunos sobre razões entre os lados dos triângulos retângulos. Esse fato pode ser ratificado a partir da análise das anotações nos diários de campo:

[1] Segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2004) a evolução do pensamento algébrico possui três fases: a fase pré-algébrica; a fase de transição algébrica e a fase do pensamento algébrico mais desenvolvido.

> Um quadrado quando é dividido em sua diagonal é criado dois triângulos retângulos perfeitos com ângulos de 45º, 45º e 90º esses triângulos são semelhantes e possui as mesmas medidas tanto em seus lados quanto de seus ângulos. A proporção de sua diagonal é de 1,4 tendo como relevância o fator de que seus lados serão aumentados progressivamente em 1 ou +1 (ALUNO 02).

Os registros no diário de campo sugerem que os estudantes conseguiram criar vínculo entre "os conhecimentos adquiridos na aula passada" (ALUNO 01), e a atividade explorada no encontro, indicando a ocorrência de reflexão sobre o próprio conhecimento aprendido. Segundo Powell (2001) com a inclusão da escrita nas aulas de Matemática o aprendizado é potencializado, pois o aluno passa a refletir criticamente sobre suas experiências matemáticas e começa a reagir a situações matemáticas. Na fase de discussão, as conjecturas elaboradas na aula e as dúvidas geradas durante as apresentações dos trabalhos foram debatidas e sanadas pelos próprios alunos, tendo o professor como moderador.

Avaliação das atividades pelos alunos

No último encontro, com o intuito dos alunos realizassem uma avaliação das atividades desenvolvidas durante a intervenção pedagógica, foram propostas três questões que em seguida são descritas com suas respectivas respostas.

1) Descreva sua experiência durante as atividades. Nesta questão, alguns alunos registraram ter encontrado dificuldades no início dos trabalhos, mas que as mesmas foram sendo superadas no todo ou em parte. Em sua avaliação o Aluno A7 destaca que essa dificuldade é por que a trigonometria é um "conteúdo complexo". Esta afirmação é corroborada por Ávila (2009) que chama atenção para a necessidade de uma ação que desfaça o sentimento presente nos alunos egressos do Ensino Médio de que a trigonometria é um conteúdo "complicado", isto significa: complexo, difícil.

Segundo o Aluno A11, durante as aulas, foi possível desenvolver uma "base teórica de como se pode ter noções acerca das fórmulas dadas nos livros". Esse relato sugere que o ensino não tem proporcionado aos estudantes o entendimento das "teorias" que envolvem as definições das diversas fórmulas matemáticas. Além disso, pode apontar para um ensino focado apenas em algoritmos.

Com base nas avaliações o processo de aprendizagem pode ser resumido como discorre o Aluno A1: "conforme foi apresentada a atividade, fui descobrindo a trigonometria de uma forma diferente" e corroborada pelo Aluno A10: "percebi que podemos aprender trigonometria de uma forma dinâmica e atraente". Segundo Ponte et al. (1999, p. 4) a investigação “tem proporcionado exemplos interessantes de tomada de consciência, por parte dos professores, das limitações do seu conhecimento processual”.

2) Quais as contribuições dessa experiência para sua formação de professor de matemática? Nesta questão, os alunos evidenciaram o reconhecimento da Investigação Matemática quanto a “forma de repassar”, “transmitir” o conhecimento de modo seguro aos alunos. Além de metodologia de ensino, a investigação foi considerada pelos estudantes um processo viável de aprendizagem, pois desperta, segundo os depoimentos dos alunos, o interesse por meio da curiosidade sobre “diversos caminhos” de chegar aos resultados. De modo particular, o registro do Aluno A2 retrata as diversas anotações: “um exemplo que ficou bem claro foi que cada um pode pensar de uma maneira diferente, porém chega ao mesmo resultado”. Esta citação remete a um dos objetivos da Investigação Matemática que “é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação” (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p.5). Enquanto contribuição profissional, o Aluno A9, fez uma referência a Investigação Matemática:

> para que posso aplicar esses métodos para meus alunos levando assim despertar os interesses deles para que eles passam aderir essa investigação matemática que é muito interessante tanto para mim como professor quanto para os alunos (ALUNO A9).

3) Quais os aspectos que poderiam ser melhorados no decorrer das atividades de investigação? Nesta questão, dos treze alunos presentes apenas dois alunos sugeriram que fossem melhoradas as questões, tornando-as “mais fáceis e claras”. Quatro alunos propuseram uma melhor distribuição das questões num tempo maior para que a investigação fosse mais bem sucedida. Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2004) afirmam que um dos problemas para realização de Investigação Matemática em sala de aula é o tempo disponível. Os autores reconhecem que “o planejamento é importante, todavia, interromper ou apressar a produção dos alunos pode representar um retrocesso e uma ameaça a uma efetiva inclusão das investigações matemáticas no currículo escolar” (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2004, p. 21).

As avaliações dos estudantes sobre o trabalho desenvolvido, durante a intervenção pedagógica, demonstram o desempenho dos alunos na aprendizagem de alguns conceitos de trigonometria. Os resultados obtidos são atribuídos, inclusive pelos alunos, a Investigação Matemática desenvolvida enquanto metodologia de ensino.

Pode-se inferir que as atividades elaboradas demonstraram-se adequadas quanto ao aspecto de provocação dos alunos para iniciar o uso da investigação, além de envolvê-los ativamente em sua execução. Embora, a distribuição das tarefas em alguns encontros não fora adequada ao tempo disponível, exigindo uma reorganização dos encontros, pôde-se verificar a contribuição das mesmas a aprendizagem dos estudantes.

Apesar dos alunos terem utilizado operações aritméticas para expressarem, na maioria das vezes, suas respostas, ficou denotado significativo progresso dos alunos na elaboração de conjecturas e no uso da escrita discursiva. As conjecturas apresentadas durante a pesquisa apontam os limites dos estudantes em termos de conhecimento matemático. Embora demonstrem também, a capacidade desenvolvida pelos alunos em inferir resultados e justificá-los, mesmo de modo, às vezes, equivocado e particularizado dentro de uma situação dada.

As notações nos diversos instrumentos utilizados para registro da pesquisa apontam para o progresso dos alunos no que tange a prática da escrita Matemática. Ademais, foi solicitada aos alunos a utilização de modo intensivo da escrita, principalmente, reflexiva, discursiva, narrativa e argumentativa. Neste sentido, pode-se inferir que as dificuldades foram reduzindo com o passar dos encontros. E como pontua Ponte, Brocardo, Oliveira (2013) a escrita no trabalho investigativo ganha relevância por ajudar os alunos a clarificarem as suas ideias, a explicarem as suas conjecturas, bem como, favorece o consenso e o entendimento de suas realizações.

A partir das avaliações e dos diversos registros constantes no estudo, foi perceptível o reconhecimento produtivo dos alunos em relação à metodologia de ensino utilizada. A Investigação Matemática por meio das atividades elaboradas possibilitou observar o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, bem como permitiu refletir e construir uma nova perspectiva na relação com os conteúdos de Matemática.

Considerações Finais

Este trabalho foi realizado com objetivo de investigar as conjecturas que emergem de um grupo de alunos de Licenciatura em Matemática quando envolvidos em atividades investigativas de alguns conceitos de trigonometria. A intervenção pedagógica demonstrou que esta metodologia de ensino proporciona uma nova interação entre o aluno e a Matemática.

As contribuições da Investigação Matemática tanto para o professor quando para os alunos foram várias. Em primeiro lugar, o professor começou a entender as dimensões que compreendem uma atividade investigativa, bem como o posicionamento necessário para consecução da investigação enquanto metodologia. Isso possibilitou uma nova concepção do saber e fazer matemático. Percebeu-se que as atividades matemáticas podem ser pensadas, levando em conta aspectos antes não considerados importantes, como a escrita reflexiva e discursiva, a possibilidade dos alunos criarem conhecimentos matemáticos, além de buscar compreender os conceitos em contextos lhes der sentido.

Outra contribuição foi o entusiasmo, a surpresa com que os alunos trabalharam as tarefas, que ficou expresso nas diversas anotações realizadas por eles. Além disso, foram registrados autoavaliações em que os estudantes afirmam uma mudança de percepção relativa a trigonometria, a seu processo de ensino e reconhecem sua aprendizagem, como destaca a Aluna C: “a gente descobriu como faz para achar esses valores notáveis. A gente sempre tinha o quadro feito, agora descobri como chega até esses valores”. Segundo Fonseca, Brunheira e Ponte (1999, p. 16) a realização de atividades investigativas “constitui uma experiência tão fundamental para a aprendizagem matemática do aluno como para o desenvolvimento profissional do professor”.

Também foi constatado que o ensino de conceitos da trigonometria pode ser trabalhado com Investigação Matemática. Essa imbricação proporcionou resultados satisfatórios no processo de formação de futuros professores de Matemática, como afirma o Aluno 01 “finalmente compreendi o porquê dos valores dos ângulos notáveis. Jamais um professor havia me explicado o motivo do seno de 45º ser $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Agora eu sei do cálculo que existe atrás dessa ‘regra’”.

A interação entre os alunos, na fase de discussão, se intensifica. O grupo que apresenta seus resultados passa a interagir com a turma, procurando justificar e demonstrar seus procedimentos e resultados. Foi um momento, em que se procurou intervir instigando os alunos ao questionamento, bem como incitando os grupos a perceber a necessidade do avanço de suas conjecturas e a devida correção de quaisquer inconsistências.

Referências

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo das funções de uma variável**. 7 ed., reimpr., Rio de Janeiro: LTC, 2009. v. 1.

BRASIL, Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Brasília: MEC, 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 06 fev. 2015.

DEMO, Pedro. **Educar pela pesquisa**. 9. ed. – Campinas, SP: Autores Associados, 2011.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2004. Disponível em: <www.educ.fc.ul.pt/docentes/...LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>. Acesso em: 06 fev. 2015.

FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. **Actas do ProfMat99**. Lisboa: APM, 1999. Disponível em: <www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm>. Acesso em: 16 dez. 2014.

MIRANDA, S. M. C.; PADILHA, S. L.; CIANI, A. B. Trigonometria, Cálculo, Ensino e Aprendizagem. In: XI ENEM, SBEM, 2013. **Anais...** Curitiba - PR. Disponível em: < http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2756_1868_ID.pdf>. Acesso em: 10 set. 2014.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. In: **Actas do ProfMat 2003**. Lisboa: APM, 2003. Disponível em: <www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte%28Profmat%29.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2014.

PONTE, João P.; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3 ed. ver. ampl., Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**, 1999, 7(2), 41-70. Disponível em:< www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm>. Acesso em: 10 dez. 2014.

POWELL, A. B. Captando, examinando e reagindo ao pensamento matemático. Revista **GEPEM**, n. 39, setembro/2001 – 73-84. Disponível em: < http://www.ia.ufrrj.br/ppgea/conteudo/conteudo-2008-2/1SF/Bairral/Boletim%2039.pdf>. Aceso em 07 jul. 2015.

SARAIVA, L. O. **Atividades investigativas para o ensino e aprendizagem dos conceitos e propriedades de sucessões numéricas**. 2012, 93 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física e Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria – RS, 2012. Disponível em: <http://sites.unifra.br/Portals/13/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2012/disserta%C3%A7%C3%A3o_luc ilene.pdf>. Acesso em 07 jul. 2015.

YIN, Robert K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.