http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n2p109

Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos

Teaching / learning model based on problem situations: theoretical and methodological aspects

Saddo Ag Almouloud
saddoag@gmail.com

Resumo

Este texto é de cunho teórico-metodológico e tem por objetivo discutir, de acordo com a Teoria das Situações Didáticas, os processos de construção/escolha, análise e experimentação de situações-problema cujo objetivo é contribuir na apropriação de conhecimentos/saberes matemáticos por parte do aluno e no aprimoramento da prática docente. Focamos nosso estudo, entre outros aspectos, na noção de variável, mais especificamente de variável didática e de sua importância nestes processos. Apresentamos algumas reflexões sobre como construir/escolher, analisar e experimentar situações-problema que, a priori, permitiriam ao aluno estabelecer uma relação significativa com o saber visado, e definimos algumas etapas que norteiam os processos de construção/escolha, análise e experimentação dessas situações. Em seguida, apresentamos um exemplo de uma situação-problema e uma análise a priori desta situação. Finalizamos nosso texto, apontando as vantagens e desvantagens de um modelo de ensino apoiado em situações-problema.

Palavras-chave: Situação-problema; Variável didática; Ensino e aprendizagem

Abstract:

This text, of theoretical and methodological nature, aims to discuss, according to the Theory of Didactic Situations, the processes of construction /choice, analysis and experimentation of problem situations, which aims to contribute to the appropriation of mathematical knowledge/s by the student and the improvement of teaching practice. We focus our study, among other aspects, on the variable concept, specifically the didactic variable and its importance in these processes. We present some thoughts on how to build /choose, analyze and experiment with problem situations that, in principle, would allow the student to establish a meaningful relationship with the targeted knowledge, and we have defined some steps that guide the processes of construction/choice, analysis and experimentation of such situation. Then, we present an example of a problem-situation and an *a priori* analysis of the situation. We end our text by pointing out the advantages and disadvantages of an educational model based on problem situations.

Key words: Problem situation; Didactic variable; Teaching and learning.

1. Introdução

Neste texto refletimos sobre processos relacionados com a construção, a análise e a aplicação de situações-problema cujo objetivo é o ensino e a aprendizagem de um dado conteúdo matemático. Buscamos estudar como construir situações que, a priori, permitiriam ao aluno estabelecer uma relação significativa com o saber visado. Na realidade, esses processos dependem, em grande parte, do contexto educativo, do professor, e de suas concepções[1] sobre: *O que é a matemática? O que é ensinar Matemática? O que é aprender matemática?* Essas concepções podem ser modificadas em função do desenvolvimento profissional do docente.

Para Showers, Joyce e Bennet (1997), professores trazem para sua prática seus conhecimentos e habilidades, seu estilo de ensino, suas características pessoais tais como estágio de crescimento, flexibilidade conceitual, senso de eficácia e conceitos, além de percepções sobre suas necessidades e preferências por certos tipos de desenvolvimento professional.

Ainda sobre prática docente, Pacheco e Flores afirmam que:

> Na prática, o que os professores pensam, fazem, escrevem, verbalizam deve-se, por um lado, a um conhecimento que é o resultado de um processo aquisitivo e, por outro, a um conhecimento que se consubstancia num discurso sobre uma prática ou um modo de ação. (PACHECO; FLORES, 1999, p. 15).

Para esses autores, a tarefa do professor é selecionar e ordenar atividades didáticas, adaptando-as a uma situação específica, incluindo a elaboração de novas atividades, de acordo com suas concepções, para complementar as já presentes nos materiais curriculares. Nesse sentido, seguindo a concepção atual sobre ensino e aprendizagem, centrada na autonomia do aprendiz, concordamos que o professor assume vários papeis, conforme apresentamos no quadro 1.

Quadro 1: Papéis do professor

	Papéis do professor	**Ação do professor**	**Ação do aprendiz (objetivos visados)**
	Professor	Identificar e escolher os objetivos matemáticos e metodológicos.	Apropriar-se das noções matemáticas trabalhadas; Aprender a aprender.
Didatização	Artesão Designer Facilitador Mediador	Contextualizar os conteúdos a serem trabalhados; Proporcionar ao aluno condições favoráveis à aprendizagem; Organizar tarefas: construir ou fazer emergir um problema que exige solução e apresenta obstáculos a superar; Informar, familiarizar.	Escolher e usar ferramentas fornecidas pela situação de aprendizagem; Procurar situações favoráveis à aprendizagem; Realizar tarefa: tomar consciência dos problemas propostos pela situação de aprendizagem e dos obstáculos inerentes; Ter sucesso (encontrar soluções, compreender na ação).
Mediação	Tutor Conselheiro	Ajudar/ensinar a aprender, organizar a aprendizagem, facilitar, aconselhar,	Tomar consciência de suas estratégias de aprendizagem,

[1] Assumimos o significado de "concepção" como: *a capacidade que cada pessoa tem de conceber ou criar ideias, abstrair, formar modelos mentais e ainda, compreender um assunto, resultante da interação sua com outras pessoas e com o meio que o cerca.* (JOHANSON & Al., 2010, p. 5)

	Guiador Catalizador	guiar, autonomizar, apoiar, preparar a transferência de conhecimentos.	de seus erros e buscar corrigi-los; Descontextualizar: ampliar o campo de sua consciência (metacognição); Compreender e transferir conhecimento.
	Mediador Treinador Animador Interlocutor	Guiar; Treinar; Regular; Comunicar.	Transformar suas representações; Desenvolver suas estratégias de comunicação, estabelecer pontes; Socializar/Recontextualizar.
	Observador Avaliador	Avaliar, apresentar as ferramentas de auto avalição.	Auto avaliar-se.
Educação	Educador	Desmamar; Aprender a fazer sozinho.	Construir permanentemente sua autonomia e sua independência.

Fonte: Adaptação de Rézeau (2001, p.176).

A partir desse quadro, podemos inferir que o professor tem como tarefa maior garantir que seus alunos se apropriem de conhecimento/saber[2] de forma significativa. A análise de vários cenários de ensino e de práticas docentes mostra que estes levam, muitas vezes, à uma perda de sentido de conceitos ensinados/aprendidos provocada pelos tipos de conhecimentos docentes mobilizados e, às vezes, à adoção de uma pedagogia por objetivo. Esta última procura, geralmente, fazer compreender ao invés de fazer agir para regular, para ser capaz de avaliar facilmente e finalizar as abordagens dos conteúdos previstos nos programas. A **perda de sentido** da aprendizagem resulta da dissonância entre os ideais proclamados e a realidade da experiência e assim como da desvalorização de sua substância. Acreditamos que tal perda resulta da dissolução da essência do processo de construção de conhecimento pelo aluno em um conjunto de instruções soltas ou, às vezes, demasiadas. Entre suas consequências, destacamos uma descaracterização do saber ensinado, e também a perda da essência do problema proposto.

De acordo com Dunand (1998, apud MARIETTI, 2009), essa perda de sentido é bastante frequente na aprendizagem da matemática, assim como a abordagem primordial da forma sem conteúdo. O aluno não é convidado a pensar, simplesmente executa algoritmos com base em procedimentos permitidos.

Podemos, assim, apontar como uma das causas potenciais a redução da atividade matemática em

[2] Fazemos a distinção entre conhecimento e saber. O conhecimento diz respeito ao saber-fazer e o saber situa-se no nível da validação matemática que faz apelo a propriedades e definições matemáticas.

manipulações formais, redução contra a qual o professor deve reagir vigorosamente (BATISSE, 2008, apud MARIETTI, 2009). Sua origem é consequência, muitas vezes, de atividades que envolvem uma suposta realidade do aluno e que são escolhidas de uma forma exótica e sem nenhum potencial favorável à apropriação de conhecimentos pelo aluno.

Outra fonte de **perda de sentido** seria o desejo de simplificar, dividir a matéria a ensinar, para alcançar um sucesso obtido em detrimento da construção do significado. Nesse sentido, Peltier (2007, apud MARIETTI, 2009) afirma que as maneiras de alcançar o sucesso são variadas. Entre muitas, citamos: achatamento das dificuldades, modificação de instruções ou de dados (muitas vezes sem o conhecimento do professor) que conduzem à resolução sem implementação de conhecimento visado. Podemos também citar a escolha de contextos familiares, supostamente próximos do quotidiano do aluno, que poderiam induzir formas de resolução na lógica pragmática da vida cotidiana, o que pode ser problemático em outros contextos de resolução de problemas. De acordo com Douady (1994, apud ALMOULOUD, 2014, p.2),

> O trabalho de descontextualização e de despersonalização participa da **capitalização do saber.** O trabalho de recontextualização e o tratamento de problemas oriundos dessas recontextualização permitem ampliar o significado desse saber. As noções, bem como os teoremas, podem ser trabalhadas, modificados de acordo com o tipo de situações nas quais são solicitados e levar à construção de novas noções que necessitem de novas interpretações, modificações e generalizações. Para os teoremas pode-se explorar o domínio de validade: imaginar novas formulações ou ponto de vista e demonstrá-las, ou achar contraexemplos.

Marietti (2009) apresenta ainda outras fontes de perda de sentido, como:

- a simplificação e a fragmentação das tarefas que podem provocar a uma perda do sentido da atividade,
- enfoque em algoritmos que podem reforçar a lógica de conformação cujo efeito, a médio ou longo prazo, pode ser uma perda de autonomia por parte do aluno,
- individualização de tarefas que não permitem a realização das fases de institucionalização,
- valorização, muitas vezes, excessiva, de técnicas, que pode se tornar uma armadilha com relação às habilidades e conhecimentos/saberes dos alunos: eles e suas famílias pensam que tudo está indo bem, pois eles têm "boas notas" e mais tarde, em especial nos níveis escolares posteriores, se dão conta do real nível de conhecimento dos alunos. O que muitas vezes gera uma incompreensão das expectativas da escola, e frequentemente sua rejeição.

Para minimizar essa **perda de sentido**, o professor deve construir situações-problema que contribuam para a formação dos alunos, tanto na construção de conceitos matemáticos, quanto no aprimoramento de conhecimentos que os auxiliem na elaboração de estratégias adequadas para resolução de problemas de matemática. Essas situações-problema devem permitir ao aluno investigar e distinguir caminhos para resolver problemas, adquirir novos conhecimentos/saberes e estratégias de resolução. Essas situações-problema devem auxiliar o aluno na construção de **conhecimentos e saberes**, e no desenvolvimento de habilidades, como, por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar representação matemática em demonstrações de propriedades e teoremas etc.

2. Referencial teórico

A noção de situação-problema que utilizaremos nesse texto será definida no contexto da Teoria das Situações Didáticas (TSD), que apresentamos de forma sucinta.

A "teoria das situações" é uma das teorias fundamentais em Didática da Matemática. Ela foi desenvolvida por Guy Brousseau a partir de 1986. Seu objetivo é caracterizar um processo de aprendizagem por meio de uma série de situações reprodutíveis e que têm potencial para provocar modificações em um conjunto de comportamentos dos alunos. Essas modificações são características da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos/saberes, de ocorrência de uma aprendizagem significativa.

A TSD é uma alternativa às três primeiras concepções clássicas de aprendizagem elencadas no quadro 2, e pode ser caracterizada como sendo um construtivismo didático.

Quadro 2: Diferentes concepções de aprendizagem

DIFERENTES CONCEPÇÕES DE APRENDIZAGEM			
Aprender=	COPIAR	DESCOBRIR	CONSTRUIR SEU SABER
Concepção de aprendizagem	Associacionista (Behaviorista).	Espontaneísta (Cognitivista).	Construtivista (Cognitivista).
Atividade do aprendiz	Repetição, imitação.	Insight.	Experimentação de solução.
Conhecimento transmitido	Conhecimentos factuais.	Conhecimentos espontâneos.	Saberes práticos.
Tipologia	Modelos gestuais.	Lúdicos, globais.	Busca de informações, alternativas de decisões que conduzem à aprendizagem.

Fonte: Construção do autor.

O objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber. Brousseau (1986) procura teorizar os fenômenos ligados a estas interações, visando a especificidade do conhecimento ensinado. Dessa forma, podemos afirmar que o objeto central da TSD é a situação didática definida como

> o conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo meio (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição (BROUSSEAU, 1978, apud ALMOULOUD, 2007 p.33).

A *situação adidática*, como parte essencial da *situação didática*, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar condições favoráveis para a apropriação do novo saber que se deseja ensinar.

Para Brousseau (1986, apud ALMOULOUD, 2007, p. 33), uma situação adidática tem as seguintes características:

- o problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;
- o problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo às **razões didáticas**[3].
- o professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir da(s) atividade(s) propostas.

Vale destacar que o papel de professor como mediador é coerente com o descrito no quadro 1 e também com o tipo de aprendizagem visada em uma abordagem construtivista, apresentada no quadro 2.

A TSD distingue três tipos de "situações", na fase adidática, em termos de relações que o aluno estabelece com o saber e o sistema de ensino:

- O aluno pode ser colocado em "situação de ação" com relação a um problema ou uma tarefa, sem, no entanto, ter que explicar ou se perguntar sobre o significado de suas ações. O aluno deve ter sucesso na tarefa por meio do desenvolvimento de um conhecimento "ferramenta" que permita agir, prever, utilizar conhecimentos contextualizados.
- Ele também pode ser colocado em uma "situação de formulação" na qual ele precisa trocar informações e/ou estratégias de resolução para produzir suas ações com colegas ou professor, usando para isso sua linguagem, ainda sem a necessidade de justificá-la.

[3] O aluno aprende por uma necessidade própria e não por uma necessidade aparente do professor ou da escola.

- Finalmente, ele pode ser colocado em uma "situação de validação", que o leva a produzir enunciados declarativos referentes à sua atividade, sendo essa uma situação que representa mais do que uma simples troca de informações, assumindo o protagonismo de justificativas ou de validação de seu ponto de vista. Nessa fase, permite-se ao aluno argumentar, convencer, provar; elaborar uma 'verdade' coletivamente.

A teoria das situações fornece uma quarta fase que Brousseau (1986) chama de **fase de institucionalização** (parte constitutiva da situação didática), desenvolvida sob responsabilidade do professor: ele define, entre outros, o que o aluno deveria apreender da situação global, dá um estatuto social e científico ao conhecimento/saber; estabelece as convenções, as notações/representações, o vocabulário; evidencia do que o aluno deve se apropriar em termos de conhecimentos/saberes que futuramente podem ser usados na resolução de novos problemas. Ou seja, conhecimentos que passam a fazer parte do milieu do aluno para resolução de novos problemas.

Entre as situações adidáticas possíveis para um determinado conhecimento, Brousseau (1986, p. 49, apud ALMOULOUD, 2007, p.34) define a situação fundamental, sobre a qual afirma que

> cada conhecimento pode ser caracterizado por, pelo menos, uma situação adidática que preserva seu sentido e que é chamada de ***situação fundamental***. Ela determina o conhecimento ensinado a um dado momento e o significado particular que esse conhecimento vai tomar do fato, tendo em vista as escolhas das **variáveis didáticas** - *voltaremos a dissertar sobre o é uma variável didática e sua importância nos processos de ensino e de aprendizagem escolar* - e as restrições e reformulações sofridas no processo de organização e reorganização da mesma.

Assim, uma **situação fundamental** constitui um grupo restrito de situações adidáticas cuja noção a ensinar é a resposta considerada a mais adequada/indicada, situações estas que permitem introduzir os conhecimentos em sala de aula numa epistemologia propriamente científica.

Perrin-Glorian (1999, apud ALMOULOUD, 2007, p.34) afirma que

> a situação fundamental é uma situação adidática característica de um *saber* (saber correspondendo às situações de validação) ou de um *conhecimento* (conhecimento correspondendo às situações de ação). Os diferentes valores dados às variáveis didáticas da situação fundamental devem permitir gerar todas as situações representativas dos diferentes sentidos ou diferentes ocasiões de emprego do saber em jogo.

É neste contexto que definimos uma situação-problema no próximo item.

3. O que é uma situação-problema?

Uma situação-problema (parte de uma situação adidática) é constituída por um conjunto de questões abertas[4] e/ou fechadas formuladas em um contexto mais ou menos matematizado, envolvendo um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber e de conhecimentos. Sua função principal é a utilização implícita, e depois explícita, de novos objetos matemáticos, por meio de questões dos alunos no momento da resolução do problema. Os alunos devem compreender os dados do problema e se engajar na sua resolução usando seus conhecimentos disponíveis. Essas situações devem colocar em jogo um campo conceitual que queremos efetivamente explorar e no qual o conhecimento visado está inserido. É imprescindível que o aluno perceba que seus conhecimentos antigos são insuficientes para a resolução imediata do problema. Além disso, os conhecimentos, objeto de aprendizagem, fornecem as ferramentas convenientes para obter a solução final.

Nos seguintes quadros, reúnem-se as características (cf. M. BILLY et al. 1995, p.14) de atividades de alunos e do professor nas situações didáticas, adidáticas, não-didáticas e "didatizadas". Nos quadros 3, 4, 5 e 6, apresentamos essas categorias supracitadas e caracterizamos os tipos de problemas relacionados (problemas profissionais, problemas escolares clássicos, situação-problema e problema aberto), têm em comum o fato de permitirem que o aluno evolua em uma estratégia de pesquisa.

Quadro 3: Caraterização de Situações não-didáticas: Problemas profissionais

Situação não-didática - Problema profissionais	
Forma	O problema não está claramente formulado; Lógico externo: vencer o desafio do problema para obter uma solução.
Objetivo do aluno **Do profissional**	Obter um resultado ou uma solução técnica (superar os obstáculos) eventualmente compreender para transferir em outras situações.
Objetivo do formador	
Aquisição do aluno/do profissional	Capacidade da análise. Aprendizagem de processos; A aquisição de conhecimentos é relacionada, às vezes, à necessidade da transferência em outras situações técnicas; Os conhecimentos são pouco formalizados.
Avaliação	?
Método e atividade do Professor	?

[4] Segundo Arsac & al. (1988), um *problema aberto* tem as seguintes características: o enunciado é curto e não induz o método, nem a solução (não tem questões intermediárias nem questões de tipo "mostrar que"). Em nenhum caso essa solução se reduz à utilização ou à aplicação imediata dos últimos resultados apresentados nos cursos. O problema encontra-se num domínio conceitual com que os alunos têm bastante familiaridade. Assim, eles podem compreender a situação, encaminhar-se na procura de conjecturas, de projetos de resolução, de contraexemplos.

Método e atividade do Aluno/do profissional	Busca e/ou escolha, dentro dos conhecimentos, de processos eficazes; Tentativa- experimentação/erros - autonomia das escolhas dos meios para atingir o objetivo.
Atitude do profissional com relação à situação	Busca da eficácia, da autonomia; Motivação pelo reconhecimento e a valorização social.

Fonte: Adaptação a partir de Billy, Moutier, Pol e Talfer (1995, p.14).

Quadro 4: Caraterização de Situações didáticas: Problemas escolares clássicos

Situação didática - Problemas escolares clássicos	
Forma	Problema claramente colocado por uma série de questões Lógica interna ao problema; Estrutura pré-determinada por uma estratégia de resolução.
Objetivo do aluno	Obtenção da resposta esperada pelo professor.
Objetivo do professor	Aprendizagem de métodos ou técnicas de resolução pelo aluno.
Aquisição do aluno	Aquisição e reprodução de processos.
Avaliação	- Fácil de modo geral; - Bastante ligada à tarefa e pouco transferível; - Não há avaliação formativa, os critérios não são definidos.
Método e atividade do Aluno	Identificação de uma classe de problemas à qual corresponde uma resolução típica; Restituição de processos.
Método e atividade do Professor	Aprendizagem por reprodução (propor uma coleção de exercícios variados); Método expositivo.
Atitude do aluno Frente à situação	Dependência com a memorização de conhecimentos.

Fonte: adaptação a partir de Billy, Moutier, Pol e Talfer (1995, p.15).

Quadro 5: Caraterização de Situações não-didáticas: Problemas abertos

Situação adidática - Problemas abertos	
Forma	Dupla lógica à situação de formação: • A lógica do aluno: lógica externa ao problema (obter um resultado); • A lógica do professor: lógica interna (aprendizagem do aluno). Encaminhar uma estratégia de pesquisa.
Objetivo do aluno	Obter um resultado (os obstáculos são inevitáveis pela definição da situação-problema).
Objetivo do professor	Desenvolver as capacidades de análise do aluno; Fazer com que o aluno supere os obstáculos identificados, colocar o aluno numa lógica de pesquisa.
Aquisição do aluno	Capacidades de análise; Superação dos obstáculos escolhidos pelo professor.
Avaliação	Os critérios da avaliação são definidos: a avaliação é essencialmente formativa; Para os alunos, a avaliação é exterior à atividade.
Método e atividade do professor	Antes da sessão de ensino: construir um problema prevendo os obstáculos a superar a partir de uma situação que tem significação para o aluno; No momento da sessão: papel de incitação; A posteriori, formalização das aprendizagens por análise e síntese da atividade.

Método e atividade do aluno	Método autônomo de pesquisa: experimentação, tentativa e erros; Autonomia dos meios para atingir o objetivo.
Atitude do aluno com relação à situação	Independência com relação ao professor; Busca da eficácia (superar se possível os obstáculos); A atividade induz o debate e a comunicação...

Fonte: Adaptação de Billy, Moutier, Pol e Talfer (1995, p.16).

Quadro 6: Situação adidática - Situação-problema

Situação adidática - Situação-problema	
Formar	Dupla lógica de situação de formação: - Aluno: lógica externa ao problema (encontrar uma solução); - Professor: lógica interna (aprendizagem do aluno) – uso de uma estratégia.
Objetivo do aluno	Encontrar uma solução (há possibilidade de enfrentar obstáculos devida à característica de uma situação-problema).
Objetivo do professor	Desenvolver capacidades de análise do aluno. Criar condições de o aluno superar os obstáculos encontrados, colocar o aluno em uma lógica de investigação.
Aprendizagem do aluno	Capacidade de análise, superação dos obstáculos visados pelo professor.
Avaliação	Os critérios de avaliação são definidos: a avaliação é essencialmente formativa. Para os alunos, a avaliação é externa à atividade.
Métodos e atividade do professor	Antes da intervenção em sala de aula, construir/escolher e analisar situações-problema no intuito de o aluno superar os obstáculos identificados e visados pelo professor, situação para a qual o aluno dá sentido. O professor tem o papel de mediador no decorrer da fase adidática e de socializador na fase de didática (institucionalização).
Métodos e atividade do aluno	Método de investigação com autonomia: tentativas-erro, autonomia na escolha dos meios para chegar ao objetivo. (Fase adidática).
Atitude do aluno com relação à situação	Independência com relação ao professor, motivação, busca de eficiência para superar os obstáculos na medida do possível, A atividade induz o debate e a comunicação.

Fonte:Aadaptação de Billy, Moutier, Pol e Talfer (1995, p.17).

Quadro 7: Caraterização de Situações “didatizadas”

“Situação didatizada”	
Forma	Para o aluno, uma dupla lógica com relação à situação: Lógica externa ao problema (ultrapassar o problema para obter uma solução); Lógica interna ao problema (adquirir saberes), encaminhar estratégias de pesquisa.
Objetivo do aluno	“*Fazer coisas úteis na vida*” (e na profissão) (situação que tem uma significação); (Identificar os saberes que constituem o contrato).
Objetivo do professor	Utilizar o enunciado dos obstáculos a superar como ferramenta de análise reflexiva e (ou para) transferir essas competências em outros domínios.
Aquisição do aluno	Capacidade da análise: Superação dos obstáculos estudados pelo professor. Tomada em conta de suas estratégias de pesquisa.
Avaliação	A avaliação é completamente integrada à formação. Ela é explícita: - o objeto é definido e comunicado a priori; - a avaliação deve permitir uma auto avaliação no tempo;

Método e atividade do professor	Construir uma situação de aprendizagem levando em consideração os obstáculos a superar; Identificar esses obstáculos (objetivo a atingir) e torná-los comunicáveis; Comunicar os objetivos aos alunos como ajuda à apropriação e à objetivação de saberes e métodos.
Método e atividade Do aluno	Mesma coisa que "situação-problema" ou "problemas abertos"; Apoio na identificação das dificuldades inerentes à situação (obstáculos comunicados) para superá-los.
Atitude do aluno com Relação à situação	Atitude de independência progressiva com relação ao professor; Mesma atitude que numa situação de pesquisa.

Fonte: Adaptação de Billy, Moutier, Pol e Talfer (1995, p.18).

4. O que entendemos por variável didática?

Um dos pontos mais importantes na escolha e/ou construção de situações-problema são as escolhas possíveis que estão à disposição do professor.

A palavra **variável** designa, a priori, aquilo que pode variar nas situações de ensino e de aprendizagem. Nos problemas ou nas situações propostos aos alunos, várias variáveis podem ser escolhidas pelo professor, por exemplo: formulação dos enunciados, a natureza dos números (inteira, decimal, racional, ...) ou a magnitude dos números em alguns problemas, a forma e a posição das figuras escolhidas em problemas de geometria.

O funcionamento do processo de aprendizagem depende de muitas **variáveis** cuja escolha dos valores nem sempre depende da vontade do professor. Entre essas variáveis citamos as variáveis de contexto (cf. quadro 8) e as variáveis constitutivas do saber matemático (quadro 9) que não dependem do professor, mas são elementos essenciais na construção/apropriação de conhecimentos/saberes pelos alunos. Finalmente, as variáveis didáticas (quadro 10) que são aquelas que estão à disposição do professor e que determinam a situação didática.

Quadro 8: Variáveis de contexto

No que diz respeito ao professor	No que diz respeito ao saber	No que diz respeito ao aluno
Escolha dos objetivos do ensino.	Elaboração de novas, ferramentas conceituais.	Origem e história dos alunos.
Concepções de professores e suas relações com a matemática.	Diversificação do saber matemático (álgebra, geometria, probabilidade, estatística, a, etc.)	A vivência das aprendizagens fundamentais.
As escolhas pedagógicas e a prática em sala de aula.	Fenômeno da "moda".	O estado psicológico e sociológico dos alunos.
Concepções sobre seus alunos, o currículo e as escolhas didáticas para o ensino e aprendizagem de um dado conceitos Etc.	Interdisciplinaridade, uso de tecnologias, etc.	Etc.

Fonte: Construído pelo autor

O termo “**contexto**” é entendido, neste texto, como o conjunto das circunstâncias e condições nas quais se processam o ensino e a aprendizagem de um dado conceito matemático, e que interferem nesses processos. O professor, a priori, não tem condições e o poder de interferir na escolha dos valores das variáveis do contexto.

Quadro 9: Variáveis constitutivas do saber

Epistemologia histórica	Epistemologia da matemática	Epistemologia genética
Formação histórica dos conceitos e ferramentas básicas da matemática.	Desenvolvimento e inter-relações dos campos conceituais na matemática contemporânea.	Formação dos conceitos pelas crianças/alunos/aprendizes.
Contradições, rupturas e reestruturações.	Etc.	Criação de sua operacionalidade.
Etc.		Etc.

Fonte: Construído pelo autor

Na dimensão epistemologia, Brito, em sua pesquisa de doutorado sobre prova e demonstração em Matemática, identificou algumas características das mesmas:

- A diferença entre a lógica em que um texto matemático é apresentado e o modo em que ele se desenvolve.
- A abordagem do método dedutivo na graduação ocorre no sentido inverso ao de seu desenvolvimento.
- A não distinção entre os termos ‘prova’ e ‘demonstração’ pode contribuir para a ausência de seu ensino.
- A demonstração com a exclusiva função de validação pode contribuir para a falta de estímulo do aluno em demonstrar, dando preferência a validações empíricas.
- Falta de conhecimento dos alunos com relação ao método dedutivo e seus termos próprios. (FERREIRA, 2016, p.156)

Quadro 10: Variáveis didáticas

Variáveis de situação	Variáveis de contrato	Variáveis de transposição
Aulas expositivas ou escolha de atividades	Contrato passado entre o professor e os alunos.	Apresentação da noção estudada.

Resolução de problemas ou ensino de regras.	Relações particulares estabelecidas entre professor - alunos ou/e alunos - alunos	Adaptação de pré-requisitos.
Trabalho individual ou em grupo.	O que o professor espera do aluno.	Gestão de erros.
Tempo previsto para a Aprendizagem.	Condição da avaliação do trabalho de cada um.	Uso de material específico.
Etc.	Etc.	Importância do saber proposto e aceito, etc.

Fonte: Construído pelo autor

Em primeiro lugar definimos o que é uma variável cognitiva. É um parâmetro de uma situação que, de acordo com os valores que são atribuídos a ele, altera o conhecimento necessário para a resolução de um problema e/ou os processos de aprendizagem.

Brito (2016), por exemplo, em sua tese de dourado sobre prova e demonstração, identificou as seguintes variáveis cognitivas associadas às características dos alunos de um curso de licenciatura em matemática:

> - O nível de escolaridade do aluno diferindo do nível de pensamento geométrico.
> - Problemas na transição da geometria empírica à dedutiva.
> - Dificuldades na leitura de um problema e na redação de uma demonstração.
> - Inabilidades na manipulação de argumentos de um dado problema.
> - Falta de consciência a respeito da distinção entre as apreensões sequencial, perceptiva e discursiva.
> - Dificuldades na conversão entre os registros em língua natural, figural e algébrico. (FERREIRA, 2016, p.156)

Esta autora identificou algumas variáveis relacionadas à dimensão didática associada ao funcionamento do sistema de ensino de provas e demonstrações em geometria:

> - O tipo de abordagem dada à demonstração na graduação não estimula o futuro professor a implementar a demonstração em suas aulas.
> - Não reconhecimento, pelo futuro professor, de que a demonstração tem importância para o desenvolvimento intelectual de seu aluno, postura essa que pode contribuir para que esse professor não inclua demonstrações em sua prática.
> - Falta de uma metodologia que aproxime o aluno à prova matemática
>
> Em uma tarefa de aprendizagem, as variáveis didáticas são parâmetros que, quando ajam nelas, provocam adaptações, regulações e mudanças de estratégia. Esses parâmetros permitem simplificar ou tornar complexa a tarefa e assim fazer avançar a "construção" do saber pelo aluno. (FERREIRA, 2016, p.156)

Uma **variável didática é uma variável cognitiva** que pode ser modificada pelo professor, e que afeta a hierarquia das estratégias de resolução (pelo custo, validade, complexidade). Dito de outra forma, uma **variável didática** de um problema ou situação é uma variável cujos **valores podem ser alterados pelo professor** e cujas modificações podem provocar sensivelmente o comportamento dos alunos em termos de aprendizagem, assim como provocar procedimentos ou tipos de resposta distintos. É apoiando-se na escolha judiciosa dessas variáveis que podemos provocar aprendizagens significativas, visando fazer emergir nos alunos novos conhecimentos como ferramentas necessárias para resolver um problema. Na realidade, a noção de variável traduz a necessidade de distinguir, classificar e modelizar as situações em uma perspectiva didática.

Os valores dessas variáveis podem ser modificados no decorrer do processo de aprendizagem para interferir na escolha do conhecimento necessário à resolução do problema. Isto exige, por parte do professor, uma identificação previa dessas variáveis e uma avaliação dos recursos do aluno a cada modificação nos valores assumidos por elas. A definição clara dessas variáveis permite diferenciar entre as exigências e restrições da tarefa e os conhecimentos mobilizáveis do aluno, isto é, criar condições e possibilidades de “perturbações máximas” para a transformação de comportamentos desse aluno em termos de aprendizagem e/de estratégias de resolução de tarefas enfrentadas.

Em um trabalho de análise de documentos pedagógicos e de ferramentas disponíveis para o professor, a identificação das principais variáveis didáticas propostas é muito importante. Tal identificação e/ou caracterização permite evidenciar os objetivos anunciados e os procedimentos que poderiam ser implementados pelos alunos. Isto auxilia na identificação de fatores relevantes para avaliar a abordagem didático-pedagógica escolhida, assim como para prever as condições de utilização do material preparado. Na interpretação da produção de alunos, a análise das variáveis didáticas escolhidas permite evidenciar em que uma estratégia é adequada: podemos falar de eficiência, custo (tempo, cálculos...) e relevância.

Da alteração dos valores das variáveis pode resultar, a partir do desenvolvimento de uma situação,

- um campo de problemas correspondente a um mesmo conhecimento; assim, o professor pode criar condições para o aluno enfrentar, várias vezes, o mesmo conhecimento, por intermédio de uma situação cujo “milieu” é conhecido, sem que as respostas sejam conhecidas pelo aluno: são situações de elaboração/construção de novos conhecimentos;
- uma gama de problemas que envolvem diferentes conhecimentos. Assim, o professor pode usar, em primeiro lugar, os valores das variáveis que correspondem aos conhecimentos adquiridos, o que permite que um estudante compreenda o problema, e em seguida, modificar a variável para fazer o aluno enfrentar a construção de novos conhecimentos

De acordo com Brousseau (1986, apud ALMOULOUD, 2007, p.36-37)

> Uma mudança significativa nos valores assumidos por certas variáveis, é chamada ***salto informacional***, e pode levar a uma mudança qualitativa nas estratégias pertinentes para resolver o problema. A determinação dessas variáveis e o "valor" do *salto* a ser efetuado para potencializar a aprendizagem são pontos marcantes na construção das situações. Uma primeira escolha da(s) variável(eis) e os valores a serem assumidos por elas pode servir à **devolução** do problema e ao encaminhamento de uma estratégia básica. Novas escolhas se farão necessárias (tanto de valores das mesmas variáveis já em jogo como de outras variáveis) para o desenvolvimento da situação adidática pretendida.

Muitas vezes, a partir de uma mudança no valor da variável didática em jogo, o aluno prefere adaptar um procedimento previamente eficaz e familiar a utilizar um procedimento pesado e confiável. O salto informacional determina o limite de rejeição de um procedimento familiar.

Na construção, análise e experimentação de situações-problema, distinguimos dois tipos de variáveis potenciais: *as variáveis macro didáticas* ou *globais,* relativas à organização global da sequência didática[5]; e as *variáveis micro didáticas ou locais,* relativas à organização local da sequência, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase da experimentação. **As variáveis didáticas potenciais** são as que permitem provocar perturbações máximas nas transformações dos comportamentos dos alunos em termos estratégias de resolução da situação proposta e na apropriação de forma significativa de conhecimentos/saberes visados.

4.1 Exemplo de variáveis globais

Como exemplo de variáveis globais, referimos ao trabalho de Ferreira (2016, p.155-158), que, depois da caracterização de variáveis relacionadas às dimensões epistemológica, cognitiva e didática, evidenciou as variáveis globais importantes para sua fase experimental. Ela destaca as seguintes variáveis, consideradas na concepção da sequência:

a. **Referencial:**

- *Teoria das situações didáticas* – A escolha da adoção de aspectos da teoria das situações didáticas tem como objetivo controlar constatações das dimensões epistemológica e didática referentes à abordagem dada às demonstrações na graduação. Visa também provocar conjecturas e valorizá-las, o que é um aspecto dessa teoria, em que visamos estimular os alunos a elaborar argumentos de um problema e chegar à construção de uma demonstração, controlando constatações da dimensão cognitiva.

[5] Uma sequência didática é um esquema experimental apoiado em uma ou várias sessões de ensino desenvolvidas a partir de uma ou várias situações-problema construídas (ou escolhidas), analisadas a priori no intuito de ensinar (o professor) e fazer aprender ao aluno um determinado conceito e/ou metodologia de resolução de problemas.

- *Concepção de provas e demonstrações, segundo Balacheff (1988), e funções da prova, segundo De Villiers (2001)*, distinguindo as concepções de prova e demonstração[6] segundo Balacheff e a funções da prova[7] segundo De Villiers. Com essa escolha, a autora buscou ampliar o conceito de provas para o aluno e apresentar outras funções da demonstração, além da validação de propriedades, controlando constatações da dimensão epistemológica a respeito das concepções dos alunos sobre provas e demonstrações.
- *Teoria dos registros de representação semiótica* – A autora buscou articular os registros língua natural, simbólicos e figurais, pois a compreensão em matemática depende da coordenação de ao menos dois registros de representações para um mesmo objeto, uma vez que permanecer em um único registro induz a confundir o objeto com sua representação.

b. **Ambiente de realização:** A autora optou pela escolha de tarefas de construções geométricas em um ambiente de papel e lápis. A autora parte da hipótese de que este "têm potencial para provocar conjecturas pelo aluno, conscientizá-lo das apreensões perceptiva, sequencial e discursiva[8], aproximá-lo da prova matemática e criar condições para que perceba a função de explicação da demonstração. Esta escolha visa controlar constatações das dimensões epistemológica, cognitiva e didática" (FERREIRA, 2016, p.158).

---

[6] Balacheff (2000) distingue os termos "explicação", "prova" e "demonstração":
Explicação: Um discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade, adquirido pelo locutor, de uma proposição ou de um resultado, os quais podem ser discutidos, refutados ou aceitos.
Prova: Uma explicação aceita por dada comunidade em dado momento. Essa decisão pode ser objeto de um debate voltado a determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.
Demonstração: Um tipo de prova dominante em matemática, com uma forma particular. Trata-se de uma série de enunciados que se organizam segundo um conjunto bem definido de regras.

[7] As funções da demonstração de acordo com De Villiers (2001) são: *Verificação* (diz respeito à verdade de uma afirmação); *Explicação* (quanto ao fato de ser verdadeira); *Sistematização* (organização de vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas); *Descoberta* ou invenção de novos resultados; *Comunicação* do conhecimento matemático; *Desafio intelectual* (realização pessoal ou gratificação resultantes da construção de uma demonstração).

[8] Na perspectiva de Duval (1995), definimos as diferentes apreensões de uma figura. A **Apreensão perceptiva** de uma figura é aquela que permite identificar ou reconhecer imediatamente um objeto matemático ou a forma de um objeto no plano ou no espaço. A **Apreensão perceptiva** de uma figura é aquela que permite identificar ou reconhecer imediatamente um objeto matemático ou a forma de um objeto no plano ou no espaço. A **Apreensão sequencial** de uma figura é uma apreensão solicitada na construção de uma figura geométrica com a ajuda de um instrumento (régua, compasso, software). A **Apreensão operatória** de uma figura é aquela que corresponde a transformar (a modificar) a figura dada em outras figuras para obter novos elementos que poderão nos levar à ideia da solução de um problema ou de uma prova.

c. **Organização dos alunos:** Realização das atividades em duplas ou trios. Esta escolha, segunda a autora, “visa proporcionar um ambiente de discursão e de interação entre os alunos”. (FERREIRA, 2016, p.158)
d. **Formato de entrega das atividades para os alunos:** Ela optou “por entregar as atividades impressas, a fim de otimizar o tempo e garantir que os textos referentes às atividades estariam transcritos corretamente, assegurando as informações necessárias para o entendimento do enunciado de cada atividade”. (FERREIRA, 2016, p.158)

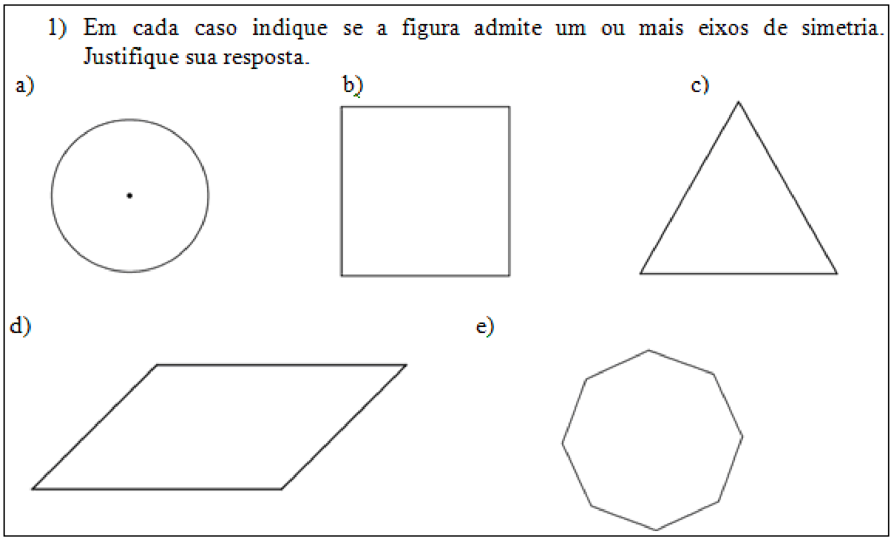
4.2 Exemplo de variáveis micro didáticas ou locais

Como exemplo de variáveis micro didáticas, apoiamo-nos em uma situação-problema proposta por Silva (2015) em sua tese doutorado, cujo objetivo é realizar um estudo sobre a atividade do professor, apoiando-se em uma sequência didática sobre a simetria ortogonal. A fase experimental realizou-se em três etapas: experimentação com os professores, em que estes resolveram, analisaram e discutiram por meio de um debate coletivo a sequência didática pré-elaborada; a aplicação da sequência didática analisada e modificada pelos professores a alguns de seus alunos que cursavam o 8º ano do Ensino Fundamental; e a análise dos professores nos registros fornecidos por algumas duplas de alunos ao resolverem o conjunto de atividades propostas na sequência didática.

Para nosso exemplo, escolhemos a seguinte situação-problema apresentada para a pré-análise dos professores. Não discutiremos a análise didática mais apurada realizada por Silva, e apresentaremos apenas as variáveis didáticas relacionadas à situação-problema proposta pela autora.

A situação-problema teve por objetivo o reconhecimento de figuras que têm eixo de simetria e a construção dos eixos de simetria em figuras geométricas planas, caso eles existam.

Figura 1: Situação-problema 1 do instrumento aplicado aos professores



Fonte: Silva (2015, p. 172)

Silva, na sua análise, evidenciou as variáveis didáticas apresentadas no Quadro 11, que foram consideradas durante a escolha e construção desta situação-problema:

Quadro 11: Variáveis didáticas e valores identificados na situação-problema 1

Variáveis didáticas	**Valores**
As direções dos elementos que compõem a figura objeto	- horizontais - verticais - oblíquas
As direções dos eixos de simetria sobre a folha	- horizontais - verticais - oblíquas
O tipo de papel	- branco
O tipo de tarefa	- reconhecimento de figura simétrica - construção de eixo de simetria
Número de eixos de simetria da figura	- nenhum - um - mais de um eixo
A complexidade da figura objeto	- circunferência - polígonos regulares - polígonos quaisquer
Ausência da evidência das medidas lados e dos ângulos	-quadrilátero - octógono - paralelogramo

Fonte: Silva (2015, de acordo com GRENIER (1988) e LIMA (2006), p.173).

De acordo com Silva,

> Nos itens (b), (c), (d) e (e) existe a possibilidade de que as direções dos elementos que compõem a figura-objeto influenciem favoravelmente ou não, na identificação de figuras que têm eixo de simetria e de eixos de simetria em cada uma delas, caso existam. Essa possibilidade pode tornar-se mais evidente no item (d). Acreditamos que a direção do eixo de simetria também é uma variável que intervém na resposta dos sujeitos, uma vez que, por meio de outros estudos [..], observamos maior êxito nas situações em que os eixos são horizontais e verticais. (SILVA, 2015, p.173)

A autora considera, ainda,

> que o papel branco e a ausência da evidência das medidas dos ângulos internos em cada uma das figuras interfiram nos procedimentos de resolução, uma vez que não são oferecidos indícios para o sujeito decidir sobre a classificação dos polígonos (regulares ou irregulares) na situação proposta. (SILVA, 2015, p.173)

Silva (2015) afirma que essas variáveis didáticas e seus valores influenciarão nas técnicas escolhidas (dobradura, utilização de instrumentos de construção geométrica (compasso, régua graduada e esquadros)) e, mais especificamente, no tipo de validação (perceptiva, lógico dedutivo) proposta pelo sujeito.

5. Proposta de alternativa para construir, analisar, experimentar e avaliar situações-problema

Para construir situações-problema que, *a priori*, têm um potencial para atender às necessidades dos alunos em termos de aprendizagem, é importante que se busque respostas, oriundas preferencialmente de pesquisas em Educação Matemática, aos sete itens que elencamos a seguir:

5.1 O que fazer antes da construção (ou escolha) de situações-problema?

É imprescindível revisitar os currículos, os documentos oficiais e pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem do conteúdo (ou objeto) a ensinar. Os resultados dessa revisão ajudam o professor nos processos de construção, análise, experimentação das situações-problema almejadas. Além disso, as respostas às questões do item abaixo são instrumentos importantes nesses processos.

5.2 Questões para construir ou analisar uma situação-problema a respeito de um conceito matemático

1) ***Abordagem epistemológica***: Com relação à gênese do objeto matemático estudado, sugerimos que se busque respostas às seguintes questões: Historicamente, quais são os problemas que levaram à construção desse conceito? Qual é a importância desse conceito atualmente, em matemática? Qual é seu papel na compreensão e/ou desenvolvimentos em outras áreas de conhecimentos? Qual é seu papel no quotidiano dos alunos?

2) ***Papel desse conteúdo no ensino****:* É importante estudar a dimensão cultural e social do objeto matemático. Para realizar esse estudo, sugerimos as seguintes questões: Estudo da proposta curricular: quando esse objeto matemático deve ser ensinado/aprendido? Estudo dos livros didáticos: como ele é abordado nos livros? Quais as características dos exercícios e problemas referentes a esse objeto matemático?

3) Concepções prévias dos alunos (antes do ensino)*:* O trabalho do professor se caracteriza por realizações didáticas em sala de aula, isto é, na concepção, na realização, observação e análise de sessões de ensino apoiadas na análise epistemológica dos conteúdos contemplados; a análise do ensino tradicional e de seus efeitos; a análise das concepções de seus alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução. Os resultados dessas análises permitem ao professor tomar as decisões didáticas cabíveis para criar condições favoráveis à construção de conhecimentos/saberes pelo aluno. Para a realização dessas análises sugerimos as seguintes questões: Quais erros, geralmente, os alunos cometem a respeito desse conceito? Quais dificuldades os alunos devem superar para adquirir esse conceito? Quais são as concepções dos alunos a respeito dessa noção antes do ensino?

4) Concepção final desejada*:* É importante ter muita clareza dos objetivos de ensino, pois esses objetivos têm uma função norteadora no momento da construção, análise e experimentação de situações-problema. Trata-se de explicitar quais conhecimentos/saberes novos são objeto de ensino pelo professor e de aprendizagem pelo aluno. As questões seguintes podem ajudar na definição dos objetivos: Quais saberes e saber-fazer o aluno deve aprender? Quais conhecimentos/saberes serão socializados/institucionalizados? Quais comportamentos observáveis atestarão que o aluno adquiriu/construiu esse conceito?

5) Análise a priori da situação-problema

No decorrer da construção das situações-problema, o professor deve fazer uma análise a priori das situações propostas. O objetivo é determinar como as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para fazer uma análise a priori, deve-se **descrever as variáveis didáticas escolhidas (escolhas feitas pelo professor)** no nível local e as características da situação adidática que será desenvolvida; Analisar a importância dessa situação para o aluno, em função, particularmente, das possibilidades de ações, das escolhas, das decisões, do controle e da validação que o aluno terá depois da devolução; Prever campos de comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido e assegurar, em particular, que os comportamentos esperados resultem do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

A *análise a priori é importantíssima*, pois de sua qualidade depende o sucesso da situação-problema. Além disso, permite ao professor poder controlar a realização das atividades dos alunos, assim como identificar e compreender os fatos observados. Assim, as várias *conjecturas* que devem aparecer a partir da análise a priori poderão ser levadas em conta e algumas dentre elas serão objeto de um *debate científico* em sala de aula.

Cabe ressaltar aqui que a análise a priori de uma situação-problema é composta de uma análise matemática e de uma análise didática, nas quais procura-se*:*

a) ***Análise matemática****:* visa identificar os métodos e/ou as estratégias de resolução de cada situação, evidenciando os conhecimentos e saberes matemáticos envolvidos.

b) ***Análise didática****:* deve ser feita levando em conta, pelo menos, os seguintes aspectos: Análise da pertinência das situações propostas em relação ao saber matemático visado e em relação aos saberes anteriormente adquiridos; Identificação das variáveis de comando da situação e escolha, se for o caso, das variáveis necessárias para o estudo; Estudo da consistência das situações. Neste caso é importante verificar se as variáveis escolhidas não levam à construção de conhecimentos incompatíveis, mesmo que seja de modo provisório, para o agente. Além dos aspectos elencados, é importante prever e analisar as dificuldades que os alunos podem enfrentar quando da resolução de cada atividade; identificar os novos conhecimentos e/ou métodos de resolução que os alunos podem adquirir, e prever os saberes/conhecimentos e/ou métodos de resolução de problema que devem ser institucionalizados.

Apresentamos, de uma maneira não exaustiva, algumas questões que precisam ser respondidas pelo construtor de situações-problema.

a) O que os alunos vão fazer? Poderiam engajar-se num processo de resolução? Engajariam bem suas concepções "insuficientes"? Quais critérios os alunos terão para validar suas soluções? A noção que se deseja introduzir é imprescindível para resolver o problema? Como os alunos vão construir a nova ferramenta?

Essas questões permitem evidenciar as variáveis didáticas da situação e escolhê-las em função dos objetivos da aprendizagem.

b) Como gerenciar a sala de aula? O trabalho será desenvolvido em grupo? Se sim, como constituir os grupos? Quais instruções dar aos alunos? Qual será o papel do professor na fase de resolução do problema pelos alunos? Como o professor deve se comportar, entre outros, em caso de bloqueios? Haverá uma fase de formulação? Haverá fase de validação?

c) Quais conhecimentos/saberes serão socializados/institucionalizados? O momento de institucionalização tem por objetivo definir o que é "exatamente" o conteúdo matemático elaborado, distinguindo, notadamente, de um lado, os elementos que, tendo concorrido para sua construção, não serão por ele integrados, e por outro lado, os elementos que entrarão de maneira definitiva na organização matemática visada. O professor deve reconhecer e nomear os conhecimentos/saberes interessantes nas produções dos alunos, e deve esquecer suas próprias formulações e fixar o vocabulário prescrito. Ele deve combinar com os alunos a possibilidade de exigir, no futuro, certos "saberes" como conhecidos e familiares para resolver problemas.

6) Avaliação

O impacto da avaliação (por seu papel e seu desenvolvimento) sobre as aprendizagens é importante. Por essa razão, a avaliação pode ser um meio de estudo de fenômenos de ensino e de aprendizagem, e mais especificamente, do aluno e seus erros.

De acordo com Almouloud (2007, p.103)

> Os professores, de forma geral, não consideram o saber porque o objetivo pretendido, implicitamente pela avaliação, não está sempre relacionado ao saber, como se poderia pensar. Como formador, o saber e seu desenvolvimento nos alunos são as preocupações principais do professor; como avaliador, o professor atende, em primeiro lugar, a um pedido social que não está muito relacionado ao saber.

Distinguem-se três grandes funções da avaliação relativa à prática da classe: as funções formativa, somátiva e predicativa. Mas, neste texto, focaremos a avaliação formativa.

A avaliação formativa deve, ainda segundo Almouloud (2007, p.106)

> autorizar a produção de *erros* e permitir que as concepções, espontâneas ou não, sejam explicitadas e tenham um espaço privilegiado nesse processo. O *contrato didático* relacionado com a avaliação formativa deve valorizar o saber esperado e favorecer um comportamento ativo, ressaltando, para os alunos, a importância das conjecturas e das questões pertinentes, tendo em vista as aprendizagens desejadas.

Cabe lembrar que o contrato didático é o conjunto de relações que se estabelecem entre estudantes e seu professor a propósito do saber. Durante o ensino, as regras de comunicação entre os alunos e o professor sobre os objetos do saber se estabelecem, mudam, são quebradas progressivamente durante as aquisições dos conhecimentos e de sua evolução. Estas regras não se apresentam em um momento único e não são congeladas no tempo, mas são o resultado de uma negociação sempre renovada. As interações entre o professor e os alunos são baseadas em regras localmente estáveis que não são imutáveis. Isso produz uma espécie de jogo cujas regras permitem que os jogadores, e mais especificamente os alunos, tomem decisões com segurança necessária para garantir a independência característica da apropriação do saber

Partindo dessas reflexões, o professor deve buscar respostas às questões: O que deve ser avaliado: saberes e/ou saber-fazer dos alunos? A evolução das concepções dos alunos? Qual instrumento de avaliação construir para isso?

7) Análise a posteriori

Nesta fase deve-se fazer a análise das produções dos alunos considerando as atividades propostas e as informações coletadas no decorrer da experimentação. Ela deve considerar também as diferentes interações dos alunos (aluno-situação, aluno-aluno, aluno-professor etc.) com a situação. Além disso, é preciso estudar as modificações possíveis que podem ser feitas no estudo e os principais resultados em relação aos objetivos pretendidos.

Um ponto importante nessa análise é a avaliação do conjunto de atividades propostas. De acordo com Chevallard (1999), a avaliação tem por ponto de apoio um conjunto de critérios explícitos, cuja análise permitirá inferir em qual medida esses critérios são satisfatórios para avaliar as situações propostas. Segundo esse autor, em primeiro lugar é preciso avaliar as tarefas propostas (situações-problema e atividades de aplicação do conhecimento ensino), a partir dos seguintes critérios:

a) **Critério de identificação**: verifica se os tipos de situações propostas estão postos de forma clara e bem identificada;

b) **Critério das razões de ser**: verifica se as razões de ser dos tipos de tarefa estão explicitadas ou ao contrário, estes tipos de tarefas aparecem sem motivos válidos, ou seja, a situação-problema envolvem questões às quais o objeto matemático estudado poderia vir a dar respostas e, consequentemente, o seu estudo faz sentido para os alunos. De acordo com Lucas et al. (2014), alguns objetos matemáticos e técnicas de resolução de determinados problemas que eram ensinados em uma determinada época perderam a sua "*razão de ser"* na escola, ou seja, as questões às quais esses objetos e/ou técnicas poderiam dar subsídios para sua resolução desapareceram dessa instituição escolar resposta e, consequentemente, o seu estudo na referida instituição deixou de fazer *sentido.*

c) **Critério de pertinência**: verifica se os tipos de tarefas considerados são representativos das situações matemáticas mais frequentemente encontradas e se são pertinentes tendo em vista as necessidades matemáticas dos alunos.

Além disso, é imprescindível avaliar as formas de resolver as tarefas e as justificativas esperadas/apresentadas pelos alunos, apoiando-se nos três critérios discutidos anteriormente para responder às seguintes questões: As técnicas propostas são efetivamente elaboradas, ou somente esboçadas? Qual o grau de dificuldade? Sua importância é satisfatória? Sua confiabilidade é aceitável sendo dadas suas condições de emprego? São suficientemente inteligíveis? Quais conhecimentos/saberes (técnicas de resolução de problemas, definições, teoremas, propriedades...) foram mobilizados para justificar as técnicas usadas para resolver as diferentes tarefas?

A qualidade da análise a posteriori depende da qualidade da análise a priori e desta depende o sucesso da situação-problema. O professor pode controlar a realização das atividades dos alunos, identificar e compreender os fatos observados. As numerosas *conjecturas* sobre a análise a posteriori que podem aparecer poderão ser levadas em conta e para que se tornem objeto de um *debate científico* em sala de aula.

d) No que diz respeito ao professor, algumas questões devem provocar uma reflexão sobre sua prática:

- Seu objetivo foi atingido? Com base em que indicadores pode afirmar isso? Como você vai verificar isso? É muito cedo para afirmar que o objetivo foi alcançado?
- Analisar as alterações feitas na hora, os eventuais deslizes e suas causas.
- Você cometeu erros? Que tipo de erros (conteúdo, método, gestão do tempo, gestão das reações dos alunos,...)?
- Rever o que você pode mudar para alcançar melhor eficiência na ordem das diferentes fases, escolhas das variáveis didáticas, a organização material, compartilhamento das produções dos alunos...
- Como você leva em consideração esta sessão na concepção das próximas sequencias didáticas: continuação da preparação planejada, modificação em que sentido, determinação do que é para continuar, aspectos a desenvolve

5.3 Exemplo: Introdução ao conceito de função definida por sentanças

Devido ao espaço reservado a este texto, tomamos como exemplo, uma situação-problema cujo objetivo é introduzir o conceito de função cuja lei de formação é definida por sentenças. Nossa pretensão não é esgotar o assunto, nem apresentar todas as etapas do processo de construção/escolha, análise a priori, experimentação e análise a priori de uma situação-problema, limitando-nos aos três primeiros aspectos. Com este propósito, tecemos algumas reflexões a respeito das dimensões histórica, epistemológica e didática sobre o conceito de função, depois propusemos a situação-problema seguida de suas análises matemática e didática.

a) O conceito de função: *Conexto histórico*

A idéia de função, de acordo com Leibniz, no final do século XVII, tornou-se uma noção com Euler, no século XVIII, antes de adquirir o estatuto de conceito abstrato no início do século XX. Em primeiro lugar, entendida como um conceito vago de dependência entre as variáveis na qual a univocidade não foi identificada como um critério fundamental. Então, no século XVIII, buscavam-se sistemáticamente fórmulas de cálculo que explicitassem uma "expressão". Exemplo famoso: a expressão $\sqrt{x^2}$ determina uma função da variável x, mas a disjunção lógica, "x se x ≥ 0,-x se x < 0", não é permitida como função.

Uma definição (um gráfico funcional em um produto cartesiano) apareceu no século XX com a teoria dos conjuntos, integrando o conceito de função em uma estrutura teórica. Mas é significativo que os livros não produzam esta definição, tão abstrata que não permite que os alunos alcancem uma compreensão operacional do conceito.

b) Dimensão epistemológica

O conceito de função é um dos mais fundamentais em matemáticas. Seu aprendizado diz respeito a todos os níveis do Ensino Médio e até da Universidade. Os estudantes encontram fortes obstáculos de natureza epistemológica e didática, que são revelados por inúmeras resistências, hesitação e erros na resolução de problemas. O termo "função" em si induz fortemente a ideia de uma relação causal entre uma quantidade variável e a grandeza que ele determina. Este obstáculo epistemológico[9] é, muitas vezes, acompanhado por um obstáculo didático, quando os estudantes iniciante interpretam essa relação como uma relação de proporcionalidade. O abandono desta causalidade, salto decisivo para a aprendizagem em matemática, será vivido como um verdadeiro

[9] A noção de obstáculo epistemológico é entendida no sentido dado por Brousseau (1983, apud ALMOULOUD, 2007, p.133), que afirma que um conhecimento, uma concepção e não uma dificuldade, ou uma falta de conhecimento, produz respostas adequadas, em um certo contexto, frequentemente encontrado, e respostas falsas, fora desse contexto. Além disso, esse conhecimento resiste às contradições com as quais ele é confrontado e ao estabelecimento de um conhecimento novo.

arrependimento intelectual, de uma apreensão ingênua para um verdadeiro conhecimento científico.

c) Dimensão didática

Nosso problema é fazer adquirir aos alunos uma das ferramentas básicas essenciais da matemática sem dar definição ou um roteiro geral. Deseja-se desenvolver estas ferramentas como objetos pertencentes a conjuntos determinados por propriedades características: função linear, algébricas, funções trigonométricas, soluções de equações diferenciais parciais, etc. Tal aquisição será o fruto de um longo processo de aprendizagem, ao longo da escolarização, iniciando do mais simples ao mais complexo, fazendo uso progressivo e experimental, sem esperar por uma apreensão global, explorando as muitas facetas da noção, descobrindo e testando sua eficácia na resolução de problemas.

Em nosso exemplo, focamos, como já dito, a introdução do conceito de função polinomial do 1º grau cuja lei de formação é definida por sentenças. Este tipo de função não é, em geral, objeto de estudo na escola. Ela aparece frequentemente no contexto de resolução de exercícios, ou quando é estudada, o que é feito geralmente a partir de uma definição do tipo: "Uma função pode ser dividida em várias sentenças, onde o domínio dela é a união dos domínios das sentenças", seguido de exemplos e exercícios.

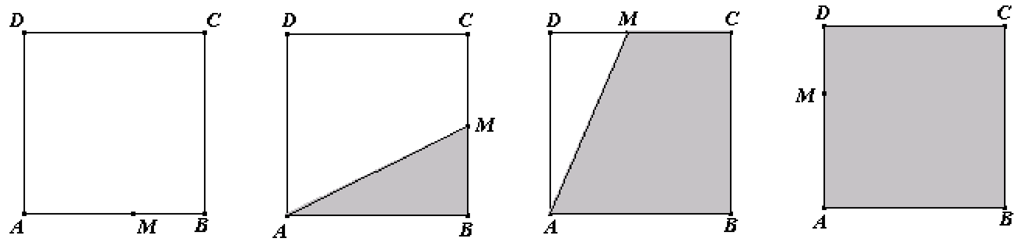
Em matemática, uma função polinomial do primeiro grau definida por sentenças é uma função definida em uma reunião de intervalos reais e cuja restrição a cada um destes intervalos é dada por uma expressão algébrica. Sua curva representativa consiste de segmentos de reta (possivelmente privados de suas extremidades) e/ou de pontos isolados. Com efeito, essa função não é necessariamente contínua.

Uma função polinomial do primeiro grau definida por sentenças permite representar um conjunto de deslocamentos a uma velocidade constante ao longo de um eixo em função do tempo, mas também alguns sinais elétricos, como a onda quadrada ou dente de serra. Em geral, essas funções são de grande importância para mais fácil realização de alguns cálculos, aproximando qualquer função contínua. Mas são, também, muito úteis em análise numérica, por exemplo, no cálculo numérico de uma integral. Porém, também são usadas na prática, quando não há nenhuma formulação simples válida no domínio de valores relevantes, como problemas de interpolação linear.

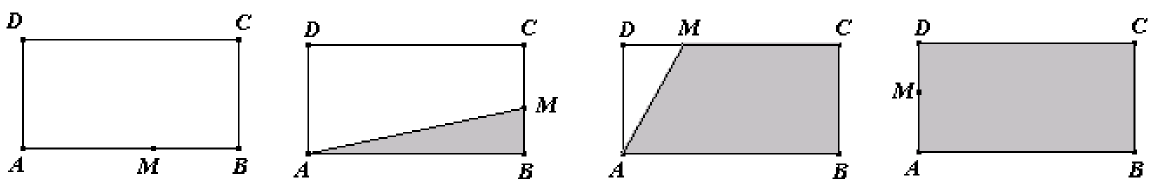
A seguir, apresentaremos um exemplo de uma situação-problema parcialmente discutida no apêndice do artigo “Contexto e contextualização nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática” (ALMOULOUD, 2014).

d) Situação-propblema

1. Um ponto *M* se desloca sobre o lado de um quadrado *ABCDA* cujos lados meçam 4 u.m (fig. abaixo). Chamaremos x a medida em cm do comprimento do trajeto de *A* a *M*.
   - ***a.*** Dê a área *a(x)* da parte colorida, segundo a posição do ponto M.
   - ***b.*** Represente graficamente a aplicação correspondente.



2. Retome as mesmas tarefas dadas na primeira questão, sendo ABCD um retângulo de comprimento 4 e largura 2 (fig. abaixo).



3. Retome as mesmas tarefas dadas na primeira questão, ABCD sendo, agora, um losango, cujos lados medem 4 u.m, e o ângulo $\hat{C}$ mede *60°*.

e) Uma breve análise didática da situação

O problema pode ser proposto a alunos que tenham um bom conhecimento sobre área e perímetro de figuras planas, estruturas aditivas e multiplicativas de números reais e de expressões algébricas, conhecimentos básicos sobre o conceito de função (definição, lei de formação, domínio e contradomínio de uma função, construção de gráfico de uma função), mas nenhum conhecimento sobre uma função polinomial do primeiro grau cuja lei de formação é definida por várias sentenças.

e.1) Contexto do problema (variável didática)

Para que a questão fosse abordada, introduzimos **um contexto da geometria plana**, mais especificamente o conceito de área de figuras planas (quadrado, triângulo retângulo, trapézio retângulo, losango), no qual os elementos que correspondem as medidas a(x) de área têm sentido para os alunos mas, em certas condições, as funções geradas existem só para o professor. O contexto geométrico escolhido (área de triângulos, quadrado, trapézio e losango) já é familiar aos alunos.

Para eles, é uma situação de pesquisa muito rica em razão de vários domínios matemáticos (geometria, álgebra, números e operações) envolvidos, diferentes níveis de interrogação e dos novos conhecimentos que esta situação vai convocar nos diferentes campos da matemática. No item 1 da situação-problema, a função cuja lei de formação é definida por $a(x)=\begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 2x-8, & \text{se } 4 < x < 12 \\ 16, & \text{se } 12 \leq x \leq 16 \end{cases}$ é a ferramenta adequada para responder à questão (a) apresentada no contexto da situação proposta. Portanto, esta função é contextualizada, personalizada no momento da resolução da situação. Depois da institucionalização local, a função polinomial cuja lei é definida por sentenças pode ser institucionalizada, ou seja, o professor deve definir formalmente (fora do contexto da situação proposta) este tipo de função, o vocabulário associado, a notação e a forma de representá-las graficamente. Outras situações podem ser propostas para completar o ciclo de aprendizagem pelo reinvestimento, nos termos de Brousseau (1986).

e.2) Figuras geométricas escolhidas

O problema envolve figuras que representam objetos geométricos que, a priori, são conhecidas. Tratam-se de quadrado, retângulo e losango, e da posição do ponto M que determina configurações (segmento, triângulo, trapézio e a figura dada (quadro, retângulo ou losango), estas também familiares aos alunos.

Essas escolhas vão interferir na construção de estratégias de resolução de cada item da situação-problema.

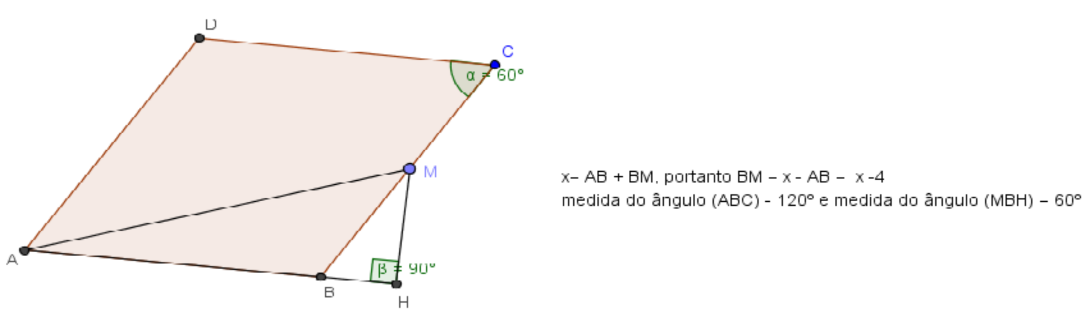
Fizemos a hipótese de que o fato de as figuras dadas na situação-problema e as geradas pela posição do ponto M serem usuais para um aluno de Ensino Médio deve facilitar a aplicação do conhecimento do assunto. Mas, as escolhas feitas têm também o intuito de o aluno pensar sobre o funcionamento dos conhecimentos visados, certas adaptações nos teoremas, propriedades, definições utilizadas, certas articulações entre conhecimentos, certos questionamentos etc.

Outra variável didática importante é a medida dos lados dos quadriláteros, neste caso foram assumidos como números inteiros que variam de 3 a 4 unidades de medida de comprimentos (u.m.c). Estas escolhas justificam-se pelo fato de minimizar o custo em termos de cálculos, pois o objetivo não é testar a capacidade do aluno em manipular números grandes, nem lidar com números fracionários e/ou decimais, mas, sim, de ele conseguir articular os dados do problema com os conhecimentos de seu repertório para montar estratégias que permitam solucionar os diferentes da situação-problema proposta.

e.3) Medidas dos ângulos do losango

Na terceira questão do problema, um parâmetro da figura em jogo é uma variável didática pertinente. Trata-se da medida de um dos ângulos do losango, 60º, que é a medida de um ângulo notável, cujas medidas trigonométricas (cosseno, seno, tangente e cotangente) são conhecidas. Esta medida do ângulo vai ter um papel fundamental no cálculo da medida da área do triângulo ABM, por exemplo, configuração gerada pela posição do ponto no lado $\overline{BC}$ do losango, conforme mostrado na figura 2.

Figura 2: Losango representando o item 3 da situação

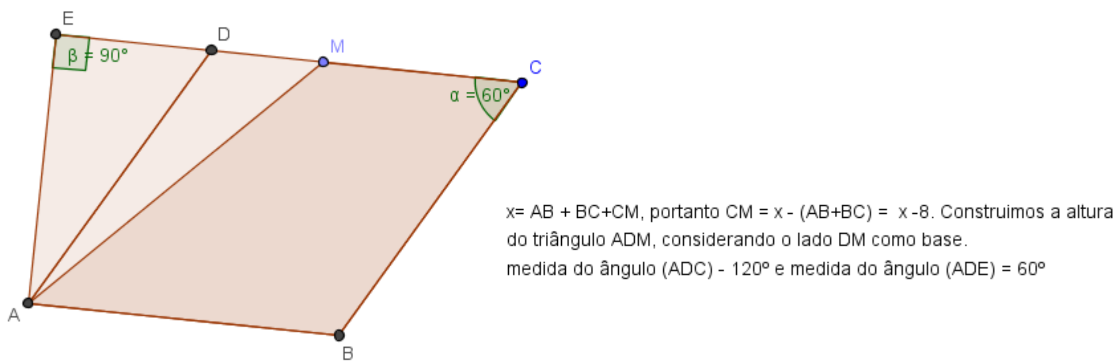


Fonte: Autor deste texto

Uma das estratégias disponíveis no Ensino Médio para calcular a medida da área do triângulo ABM apela à formula $\frac{Base \times altura}{2}$. Neste caso, podemos considerar AB com base e altura, HM= BM • seno(60º), como BM= x- 4, HM=$(x-4)\frac{\sqrt{3}}{2}$ (x-4). Portanto, a medida da área do triângulo ABC será: $a(x) = \frac{AB \times HM}{2} = \frac{4\sqrt{3}(x-4)}{4} = \sqrt{3}(x-4)\ se\ 4 < x \leq 8.$

Essa variável terá também um papel fundamental no cálculo da medida da área do trapézio determinada pela posição do ponto M no lado $\overline{CD}$ do losango (cf. figura 3)

Figura 3: Representação da configuração gerada pela posição de M sobre o lado CD do losango



Fonte: autor deste texto

A medida da área do trapézio ABCD pode ser calculada pela diferença entre a medida da área do losango e a medida da área do triângulo ADM. A medida da área do losango é igual a $2\frac{AE \times DC}{2} = AE \times DC$, com AE= $AD \times sen(60º) = 2\sqrt{3}$, portanto, a medida da área do losango é igual a $8\sqrt{3}\, u.m.a\ (unidades\ de\ medida\ de\ área)$. A medida da área do triâangulo ADM pode ser calculada como segue: $\frac{DM \times AE}{2} = \frac{(4-(x-8)) \times 2\sqrt{3}}{2} = \frac{(12-x) \times 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}(12-x)\ se\ 8 < x < 12.$

A resolução da situação proposta faz apelo a conhecimentos/saberes de diversos campos da matemática, como:

- Geometria plana: Quadrado, retângulo, losango, trapézio, triângulo, conceito de área figura planas;
- Álgebra: Expressão algébrica, cálculos de medidas de áreas, conceito de função polinomial do primeiro grau, estruturas aditivas e multiplicativas no conjunto dos números reais etc.;
- Geometria analítica: representação gráfica das funções de leis a(x), noções de coordenadas, abscissa, ordenada de um ponto no plano cartesiano, eixos ortogonais,

escalonamento, localizar pontos no sistema cartesiano;

- Trigonometria: relações trigonométricas no triângulo (na resolução do item 3 da situação-problema) intervalos em função da variação das áreas.

Globalmente, podemos dizer que a situação deve proporcionar condições para que o aluno se envolva no cumprimento das seguintes tarefas:

- Interpretação do texto e das figuras; calcular o comprimento da trajetória de M;
- Determinar as diferentes configurações (segmento, triângulo, trapézio e a figura original) são formadas de acordo com a posição do ponto M;
- Calcular a medida a(x) da área da configuração formada levando em consideração as restrições sobre a trajetória x (intervalo onde são definidos os valores de x) do ponto M;
- Representar no sistema cartesiano o gráfico de lei de formação a(x).

A situação-problema está centrada em um ponto da álgebra: o conceito de função polinomial do primeiro grau definida por várias sentenças. Mas a realização das tarefas envolvidas amplia a situação didática de modo que outros elementos matemáticos (cálculo de medidas de áreas de figuras planas, relações trigonométricas no triângulo retângulo, métodos de resolução) em diferentes campos da matemática (geometria plana, geometria analítica, álgebra, o campo das funções), possam ser trabalhados do ponto de vista do significado e da técnica de resolução.

Conclusão

O ensino e a aprendizagem de qualquer disciplina são influenciados por vários fatores de difícil controle. Um dos pontos mais importantes que se deve considerar é a possibilidade de escolher um contexto favorável à construção de situações-problema que têm potencial que favoreça a participação efetiva do aluno no processo de apropriação dos conhecimentos/saberes, objeto do estudo. É importante considerar que

> O contexto tem várias facetas como "materiais", sociais, cognitivas, situações escolhidas e suas variáveis didáticas, as interações entre estudantes, as intervenções do professor que se referem ao contexto escolhido sem alterar o significado da situação, os conhecimentos prévios que poderão se constituir em obstáculos. (ALMOULOUD, 2014, p.2)

Além disso, chamamos a atenção sobre as vantagens e as limitações de um modelo de ensino e aprendizagem apoiado nas situações-problema tal como definido neste texto. Uma das vantagens é que ele fornece um status real para o erro. Os erros identificados são pontos de apoio de aprendizagem, pois sua superação é fonte de aprendizagem. Este modelo leva em conta as concepções dos alunos e a construção do significado do objeto matemático em jogo, além de criar condições para que o aluno adapte suas concepções.

No entanto, a noção de situação-problema aplica-se apenas a alguns dos conceitos de uma determinada disciplina. Além disso, não é evidente que esta abordagem seja relevante para todos os conceitos. Gerir situações-problema em uma classe não é fácil, especialmente no contexto de uma classe sobrecarregada. Este tipo de prática leva tempo, porque a gestão da complexidade da diversidade dos alunos aparece nas fases de construção.

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. Contexto e contextualização nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Revista Nova escola (disponível em: http://novaescola.org.br/fundamental-1/contexto-contextualizacao-processos-ensino-aprendizagem-matematica-784403.shtml), março de 2014.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Fundamentos da Didática da Matemática. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

ARSAC, G., GERMI, G., MANTE, M. (1988), *Problème ouvert et situation-problèmes*. IREM de Lyon.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas** (Trad. Pedro Gómez). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes, 2000. Disponível em <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/52/01/33/PDF/Balacheff2000Proceso.pdf>.

BROUSSEAU, Guy. **Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques**. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions, 1986. p.33-115, v.7.2.

CHEVALLARD, YVES. L´analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions, 1999.v. 19.2, p.221-265.

DE VILLIERS, M.D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Shetchpad. Tradução de Eduardo Veloso**. Educação e Matemática**, n. 62, p. 31-36, 2001. Disponível em < http://www.apm.pt/apm/revista/educ63/Para-este-numero.pdf>. Data de acesso: 20 de janeiro de 2013.

DUVAL, Raymond. **Semiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Peter Lang, 1995.

FERREIRA, Maridete Brito Cunha. Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométrica. Tese de doutorado em Educação Matemática pelo PEPG em Educação Matemática da PUC/SP, 2016.

JOHANSON, Tamara; VIEIRA, Emília Melo; BIEMBENGUT, Maria Salett. Geometria e arte decorativa nas series iniciais. In **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Salvador: 2010. Disponível em http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/CC/T14_CC1804.pdf , acesso em 29/05/2016.

LUCAS, Catarina Oliveira, FONSECA BOM Cecilio, GASCÓN PÉREZ, Josep, CASAS, José Manuel. Aspetos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e da Espanha: análise de um questionário. Revista Educação Matemática Pesquisa, PUC/SP, Vol. 16.1, p. 1-24, 2014.

MARIETTI, Julia. le concept de per et sa réception actuelle en mathematiques et ailleurs. Mémoire de 1re année du master de sciences de l'éducation UNIVERSITÉ AIX MARSEILLE 1 – UNIVERSITÉ DE PROVENCE AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE L'ÉDUCATION, 2009.9in http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Memoire_de_MR2_de_Julia_Marietti_2010_.pdf , cassedo em 03/08/2014)

PACHECO, J. A.; FLORES, M. A. **Formação e avaliação de professores**. Porto, Portugal, Porto editora, 1999.

RÉZEAU, Joseph. Médiatisation et médiation pédagogique dans un environnement multimédia. Le cas de l'apprentissage de l'anglais en Histoire de l'art à l'université. THÈSE pour le DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 2, 2001. (in http://joseph.rezeau.pagesperso-orange.fr/recherche/thesePDF/acrobat.htm , acessado em 03/08/2014)

SHOWERS, B.; JOYCE, B.; BENNETT, B. Synthesis of research on staff development: a framework for future study and a state-of-the art analysis. Educacional Leadership. 1987.

SILVA, Cleusiane Vieira. A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos: um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da Simetria Ortogonal. Tese de doutorado em Educação Matemática pelo PEPG em Educação Matemática da PUC/SP, 2015.