http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11nespp47

Dos conteúdos de ensino à dinâmica do conhecimento: uma aventura pedagógica na "Floresta Matemática"

From teaching contents to the dynamics of knowledge: a pedagogical adventure in the "Mathematical Forest"

José Carlos Cifuentes
jccifa@gmail.com

Resumo

Este artigo visa propor uma abordagem dos "conteúdos matemáticos" nas licenciaturas para desenvolver o que chamaremos o seu 'sentido pedagógico'. Isto se consegue aprimorando a sensibilidade sobre formas do pensamento matemático que não se reduzem a técnicas e algoritmos, que não se reduzem à lógica do processo matemático, mas que são importantes para uma "boa" formação matemática de um professor; e também através de uma visão diferente da história da matemática, a sua "historicidade", que com seu caráter epistemológico põe em evidência a dinamicidade do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Conteúdos de Ensino; Sentido Pedagógico dos Conteúdos; Formação Matemática do Professor; Floresta Matemática; História e Historicidade da Matemática.

Abstract

This paper aims an approach of "mathematical contents" in under graduation to develop what we will call it 'pedagogical sense'. This is accomplished by enhancing sensibility about forms of mathematical thinking that don't reduce themselves to mathematical techniques and algorithms or to the logic of the mathematical process, but that are important for a "good" math teacher formation; and also through a different vision of the history of mathematics, its "historicity", which with its epistemological character highlights the dynamism of mathematical knowledge.

Keywords: Teaching Contents; Pedagogical Sense of Contents; Math Teacher Formation; Mathematical Forest; History and Historicity of Mathematics.

Uma formação técnica e algorítmica em matemática nos capacitaria, sem dúvida, para identificar, nesse campo, milhares de árvores de um bosque nas suas especificidades, porém, não nos educa para "perceber" a floresta.

(Parafraseando Albert Einstein)

Introdução: dos conteúdos matemáticos à floresta matemática

Quando ministro uma disciplina de matemática na graduação ou quando leciono sobre educação matemática na pós-graduação começo dizendo que "mais importante que saber matemática é saber pensar matematicamente". Nessa afirmação entendo, talvez em forma muito simples porém como acho que geralmente se entende, "saber matemática" como ter aprendido, no nível de um "usuário", uma série de "conteúdos matemáticos" da grade curricular correspondente, porém, saber pensar matematicamente envolve uma dinâmica do conhecimento matemático, uma movimentação desses conteúdos, o que será motivo de análise neste artigo.

A noção original de 'conteúdo' aponta para algo que ocupa um "recipiente", um "continente", é uma ideia que traz uma conotação estática de um conhecimento pronto e delimitado. O ensino (técnico) de matemática baseia-se usualmente na apresentação do conhecimento na forma de conteúdos encaixotados ou encapsulados em didáticas e metodologias, base do currículo escolar. Os conteúdos, na medida em que trazem um conhecimento cristalizado, sistematizado, formalizado, são, então, colocados em disciplinas, em áreas, e se lhes atribui, quando colocados em textos "didáticos", o papel principal de informar e não necessariamente o de formar.

Como já podemos observar, as palavras 'conteúdo' e 'currículo' estão intimamente relacionadas, e uma mudança no significado e abrangência de uma trará uma mudança na outra.

Sem pretender debater com concepções tradicionais de currículo, entendemos que todo currículo deve ter uma 'vertente informativa', de natureza técnico-científica, e uma 'vertente formativa', esta última visando o desenvolvimento das capacidades de crítica e de comunicação do conhecimento, apoiadas no tripé que fundamentam a universidade atual Ensino – Pesquisa – Extensão.

Karl Jaspers aponta também para essa dupla vertente na sua concepção de universidade:

> O conhecimento precisa de conteúdos. O conhecer abrangente quer que nada se lhe escape. O que está sempre no universo deve ser trazido à universidade para se transformar em objeto de pesquisa. Não só da mente pode ser extraído o conhecido. Isto só ocorre nos casos limites da matemática e da lógica, nas quais construímos nós próprios o que pensamos; ou achamos já dado a cada instante na experiência cotidiana. O ser cognoscente melhor necessita em toda parte da matéria na intuição empírica. [...] Os objetos inanimados não chegam a constituir todo o domínio do que é possível conhecer. Só a espiritualidade está ai como viva. (JASPERS, 1959, p. 426-427)

No caso da matemática, o que fundamenta essa segunda vertente, a vertente formativa, é o fato desta área do conhecimento ser uma atividade humana traduzida numa forma de pensamento que não se reduz a suas características lógico-dedutivas, nem a técnicas e algoritmos de cálculo que são as que embasam seu caráter científico. Ela também precisa das diversas formas de raciocínio não dedutivo como, notoriamente, a indução, a abdução e a analogia que ligadas às capacidades de intuição e imaginação possibilitam a descoberta e criatividade matemáticas. Isso torna o conhecimento (matemático) um processo dinâmico de pensamento.

O conhecimento matemático escolarizado, especialmente na universidade, deve ter, então, uma importante componente que não consiste apenas de sua dimensão procedimental, instrumental ou algorítmica colocada na forma de conteúdos, senão que enfatize principalmente sua dimensão atitudinal, visando desenvolver no aluno uma postura crítica diante dele.

A ideia de "floresta" no âmbito do conhecimento nos vem sugerida pelo seguinte episódio. Em 1944, o físico Robert Thornton escreveu a Albert Einstein solicitando-lhe conselho para justificar a introdução da história e filosofia da ciência no ensino de física, ao que Einstein respondeu:

> Concordo plenamente consigo quanto à importância e ao valor educativo da metodologia e bem assim da história e da filosofia da ciência. Hoje, muitas pessoas – e mesmo cientistas profissionais – parecem-me alguém que viu milhares de árvores mas nunca uma floresta. Um conhecimento das bases históricas e filosóficas fornece aquele tipo de independência dos preconceitos da sua geração que afetam muitos cientistas. Esta independência criada pelo conhecimento filosófico é – na minha opinião – a marca de distinção entre um mero artesão [um usuário] ou especialista e um verdadeiro pesquisador da verdade. (EINSTEIN *apud* HOWARD, 2006)

A epígrafe deste artigo, então, é uma paráfrase dessa resposta de Einstein que fazia referência à importância da história e filosofia da ciência para a compreensão abrangente de seus alcances, portanto, relevante na formação de um cientista. Nós a adaptamos aqui, sublinhando a palavra 'perceber', para diferenciarmos um ensino de matemática baseado na transmissão de técnicas e algoritmos, de lógica e demonstração, colocados na forma de conteúdos, de uma educação matemática formadora do espírito e do pensamento matemáticos. No mesmo artigo, Howard (2006) assinala ainda a defesa que faz Einstein de uma formação científica com "independência de juízo" antes de com "rapidez de raciocínio".

Esse princípio pedagógico já tinha sido esboçado pelo próprio Einstein no Prefácio à sua obra "A Teoria da Relatividade Especial e Geral" de 1916, nos seguintes termos: "Já os fundamentos físicos empíricos da teoria [da relatividade], conscientemente tratei-os com certa negligência, para evitar que o leitor menos familiarizado com a física fizesse como aquele caminhante que, de tantas árvores, não consegue enxergar a floresta" (EINSTEIN, 1999).

Essa independência, ou autonomia, de juízo no campo da matemática pode ser adquirida aprimorando a nossa percepção da que chamaremos de 'floresta matemática', e a convicção de sua existência baseia-se na nossa crença, e experiência, de que a matemática é muito mais que os conteúdos matemáticos (o que pode ser dito de qualquer ciência ou área do conhecimento), e nos propomos neste artigo chamar a atenção sobre esse fato, principalmente visando a formação do professor de matemática. Para tanto, analisaremos o que chamaremos de ‘o sentido pedagógico’ dos conteúdos matemáticos que nos dará acesso, como a epígrafe sugere, a essa floresta.

A existência da “floresta” no campo da matemática leva implícita uma concepção ou visão de matemática mais abrangente que a usualmente divulgada (mesmo no ensino), isto é, como a “ciência” do cálculo e a exatidão, cujo método é por excelência o lógico-dedutivo.

Qual, então, o sentido pedagógico dos conteúdos matemáticos? A palavra ‘pedagógico’, nessa expressão, aponta para um movimento de “condução dinâmica” do conhecimento através dos conteúdos para uma formação matemática mais abrangente como a vertente formativa do currículo exige, e não para um mero treino em técnicas de matemática para serem usufruídas em algum contexto de resolução de problemas, e é inspirado na função originária do assim chamado ‘pedagogo’ na antiguidade, termo grego conjugação dos termos *paidós* (criança) e *agogé* (condução), que era quem conduzia a criança na direção do saber.

Para responder à pergunta anterior, começaremos referenciando um episódio narrado por Platão, no diálogo *Ménon*. Platão, na voz de Sócrates, perguntava “o que é a virtude” e se ela (e os valores em geral) poderia ser ensinada. E ele concluiu que não, e que para poder ensiná-la não basta dar exemplos de virtudes ou de pessoas virtuosas, seria necessário encontrar uma “definição” do que é a virtude para esse efeito.

“Definir” é encontrar os limites do que está sendo definido. Então, esse requerimento é justamente o que transformaria a virtude num conteúdo. Os valores, parte essencial da floresta do conhecimento, não podem ser ensinados como seria o caso dos conteúdos, pois envolvem atitudes, ações, e não apenas conhecimento pronto.

O problema, então, na noção de ‘conteúdo matemático’, do ponto de vista pedagógico, reside em que ele não permite incorporar diversos aspectos da floresta matemática, como os aspectos epistemológicos, estilísticos, etc., os quais envolvem atitudes de pensamento e visões de matemática, aspectos que não podem ser ensinados como os conteúdos o são, porque os atravessam em forma transversal.

Enxergar a floresta matemática exige colocarmos-nos num nível superior de reflexão, o que significa observar não somente as ideias senão a movimentação das ideias, a dinâmica do conhecimento. Procurar não só a consistência lógica dos conteúdos que é o que os encapsula através da sua exigência de rigor e exatidão, senão a clareza dos métodos e a fluidez do pensamento no campo da matemática.

A floresta matemática está banhada com o conhecimento que vem da história, filosofia e metodologia da matemática (não da história, filosofia e metodologia do ensino de matemática), e é alimentada com as diversas formas de pensamento e raciocínio matemáticos, como o pensamento avançado, o pensamento elementar, o pensamento visual e as formas de argumentação já mencionadas, que não só tomam como recurso senão que também promovem e desenvolvem a imaginação, a sensibilidade, a intuição, e aprimoram a criatividade no campo da matemática.

Essas diversas formas de pensamento, devidamente aprimoradas, são as que nos darão acesso à “experiência matemática”, isto é, acesso a aspectos da paisagem matemática que não dependem apenas da rigidez da razão e da lógica, senão também da sensibilidade, da intuição e da imaginação, um nível superior de percepção.

Pensar que a matemática se reduz a fórmulas, técnicas, algoritmos e demonstrações é como ir a um museu de arte e apreciar apenas as molduras dos quadros e não os próprios quadros, eles trazem a paisagem da floresta matemática cuja percepção envolve faculdades como a intuição e a imaginação.

Eis, então, a diferença entre ser um conhecedor da matemática e ser um usuário da matemática. E essa diferença deve guiar a nossa aprendizagem e o nosso ensino. O conhecimento de um professor de matemática não deve ser apenas o de um usuário da matemática que procura só sua utilidade e não sua compreensão.

Eis, também, a importância, seguindo Einstein, de promover o estudo da história e filosofia da matemática para a compreensão da própria matemática como parte da formação do matemático e do professor de matemática. Essa, acreditamos, é a “missão” de uma Educação Matemática que cumpre um papel formador e não apenas informador.

A finalidade deste artigo é analisar e propor ações, através de exemplos, para desenvolver o “sentido pedagógico” (condução para) dos aspectos da floresta matemática, aspectos que não são puramente conteudísticos. Veremos que esse sentido pedagógico envolve principalmente a epistemologia e história da matemática conjugadas como formas do conhecimento matemático, o que chamaremos de ‘historicidade da matemática’.

Mais ainda, este artigo visa deflagrar a discussão sobre a “formação matemática” do professor de matemática (incluímos aqui o professor formador de professores) trazendo propostas concretas para uma reformulação da formação inicial e continuada em matemática em que seja salientado o “verdadeiro papel” da matemática na Licenciatura. De fato, este artigo traz implícita uma concepção de Licenciatura não apenas como formação do “profissional de ensino”, senão principalmente do formador do cidadão crítico e reflexivo através da matemática.

A Historicidade da Matemática

Neste artigo proporemos uma forma de abordagem dos "conteúdos matemáticos", especialmente na formação do professor de matemática, para desenvolver, como já anunciado, o seu sentido pedagógico.

Isto pode ser feito através de dois caminhos:

1. Pondo em evidência a sua origem conceitual e o percurso de sua construção teórica (sua gênese, suas mutações, sua evolução) o que chamaremos de 'sua historicidade', e que consideramos ingrediente fundamental da dinâmica do conhecimento.
2. Aprimorando a sensibilidade sobre formas do pensamento matemático, formas de argumentação que não se reduzem à aplicação de técnicas e algoritmos, que não se reduzem à lógica do processo matemático, mas que são importantes para uma "boa" formação matemática de um professor no caminho da criatividade. Elas se auxiliam da intuição e a imaginação e reciprocamente as estimulam num processo dialético que fazem dinâmico o pensar matemático.

Para o matemático português José Sebastião e Silva, "ensinar matemática sem mostrar a origem e a finalidade dos conceitos é como falar de cores a um daltônico: é construir no vazio. Especulações matemáticas que, pelo menos de início, não estejam solidamente ancoradas em intuições, resultam inoperantes, não falam ao espírito, não o iluminam" (CARVALHO E SILVA, s/d).

A historicidade da matemática diferencia-se da história da matemática em que exige uma reconstrução teórica das ideias matemáticas na sua dinamicidade incorporando, como veremos, aspectos da epistemologia da matemática. A historicidade da matemática consiste, então, em considerar os objetos matemáticos em sua gênese e evolução, cujo significado está muito perto de sua acepção na biologia. Enquanto a história da matemática traz e trata aspectos sob uma perspectiva linear temporal a historicidade analisa esses acontecimentos numa perspectiva epistemológica evolucionista.

A dinamicidade das ideias, mencionada acima, talvez possa ser esclarecida, um pouco pitorescamente, aludindo à diferença de pensamento entre Aristóteles e Platão a respeito da abordagem do saber. Para Platão, um assunto de estudo deve ser abordado "vendo" seus objetos e conceitos "vivos" mostrando suas propriedades vitais através de uma movimentação dialética (o que ele faz nos seus *Diálogos*). Já para Aristóteles, um objeto deve ser estudado "morto" para analisa-lo em suas partes e classifica-lo segundo certas categorias. Dessa forma se constitui o conhecimento na concepção aristotélica, e a nossa cultura ocidental, apesar do progresso científico e tecnológico que já promoveu, segue, infelizmente, essa forma de pensamento, especialmente na pesquisa e no ensino.

Como um exemplo introdutório do desenvolvimento orgânico de conceitos matemáticos, apresentaremos brevemente o caso da evolução do conceito algébrico de ‘logaritmo’ na direção de sua versão funcional que dá origem às funções exponencial e logarítmica.

Num primeiro curso de Cálculo, a função exponencial $f(\mathrm{x}) = a^{\mathrm{x}}$ e a logarítmica (na base “a”) $g(\mathrm{x}) = \log \mathrm{x}$ são apresentadas prontas como funções uma inversa da outra e deslocadas, como conteúdos matemáticos, de suas versões algébricas originárias, e o aluno não chega a saber (e às vezes o professor também não tem esse conhecimento) da origem conceitual que essas funções tem nas relações entre as progressões *PA*’s e *PG*’s e, mais ainda, como elas se originaram como consequência da “percepção” e conceitualização metodológica e epistemológica do expoente de uma *PG* como “variável”, sendo esta uma grande revolução, ou melhor, evolução, no pensamento matemático.

Com efeito, no final do século XVII surgem os logaritmos no contexto da álgebra como recursos para obter a solução de uma equação da forma $a^b = c$ onde b é a incógnita, e como técnica de cálculo que permitem transformar produtos em somas (por exemplo, através da regra $\log(\mathrm{xy}) = \log \mathrm{x} + \log \mathrm{y}$). Repare-se que se c for a incógnita, o resultado é obtido por potenciação, enquanto que se a for a incógnita, o resultado é obtido por radiciação. Então, o problema da obtenção de b permite introduzir a operação de ‘logaritmação’ como uma nova operação algébrica. É uma visão instrumental da matemática. Nesta época não se falava em exponenciação em matemática, no sentido de considerar o expoente da potência como variável, apenas como incógnita. Somente no século XIX é que aparece, com a clarificação do conceito de função, o tópico ‘funções exponenciais e logarítmicas’ sucedendo ao de progressões aritméticas e geométricas. As letras a, b e c eram pensadas algebricamente como constantes arbitrárias e não como variáveis, cuja dinamicidade podia ser capturada através da noção de função.

A “historicidade” busca entender, neste exemplo, a gênese das funções exponencial e logarítmica nas suas relações com as *PA*’s e *PG*’s, não focando essas funções só como um “produto final” já consolidado, mas tentando pôr em evidência os “andaimes” que permitiram constituir esse produto final. Um dos andaimes mais relevantes nesse processo foi justamente o reconhecimento do expoente como variável e subsequente surgimento das funções pertinentes.

Sintetizando: a historicidade das funções exponencial e logarítmica procura explicitar a sua relação conceitual íntima com as progressões aritméticas e geométricas como parte da sua gênese, constituindo estas no seu "*DNA* conceitual".

Este e outros exemplos nos induzem a considerar a historicidade como um capítulo da própria matemática e não como um assunto sobre a matemática, ela constitui-se num olhar interno, endógeno, da matemática e não num olhar externo, exógeno. Esse olhar interno não é "história" no sentido usual, porém revela o "lado orgânico" da matemática que usualmente fica velado, quando os assuntos envolvidos são considerados prontos e acabados.

Tanto a história quanto a historicidade da matemática fazem parte desse processo de construção de conhecimentos, porém existem alguns fatores que as distinguem, pois como já citado, a história nos permite uma importante visão externa da matemática e a historicidade a complementa com a visão interna da mesma. A história da matemática, como disciplina de estudo, poderia ser considerada como parte da formação sociocultural do professor, já a historicidade da matemática, com seu viés epistemológico e, na medida em que procura "princípios", metafísico, como parte da formação matemática desse professor.

O viés metafísico da historicidade da matemática, envolve a pesquisa sobre origem, gênese, mutação, evolução, noções orgânicas que podem ser associadas também a uma cosmogonia. A palavra 'cosmogonia' provém de dois termos gregos: *kósmos* (boa ordem) e *gonos* (nascimento). Também, 'gênese' deve ser entendida como uma ação que significa a vinda ao mundo. Nesse contexto, cabem também, discussões sobre o que seria a "fecundidade" da matemática, que usualmente é entendida de um ponto de vista estético.

Michel Paty (2005), com uma interpretação próxima da nossa, aqui adotada, afirma que a *historicidade* torna o objeto de estudo mais inteligível pois permite entender as ampliações da racionalidade que possibilitam as aberturas, as invenções e os progressos do conhecimento.

> A historicidade atravessa todas as formas de pensamento e de ação humanas, e já esta diversidade deixa de ver que cada forma possui suas modalidades e suas justificativas próprias, que não somente não se dissolvem neste caráter histórico, mas que tiveram seu nascimento e desenvolveram-se, constituíram-se, segundo este caráter mesmo, que presidiu à ordenação de seus "materiais" (simbólicos e concretos). Foi ao longo deste desenvolvimento que foram criados e ordenados os elementos (conceituais) de inteligibilidade que permitem a assimilação, num estágio de conhecimento, e estes próprios elementos informam aqueles do estágio seguinte, tornando-o possível. É neste sentido que o matemático Jean Dieudonné, um dos membros eminentes do movimento Bourbaki, escrevia: 'Penso que não é possível compreender as matemáticas atuais se não tivermos pelo menos uma ideia sumária de sua história'. (PATY, 2005, p. 6)

Um estudo complementar sobre diversas abordagens da história da matemática na Educação Matemática pode ser visto em (MIGUEL; MIORIM, 2004).

A Historicidade da Matemática através de Exemplos

Os exemplos que discutiremos a seguir são tomados da matemática superior desenvolvida na graduação em Matemática, especialmente nos primeiros anos da Licenciatura, e procuram ilustrar o processo da pesquisa pela historicidade (o *DNA* conceitual) dos conceitos matemáticos desenvolvidos em diversas disciplinas. A abordagem que propomos pode ser implementada na formação inicial do professor de matemática na medida em que os assuntos tratados tem relação com a matemática elementar.

O contraponto entre a matemática superior e a matemática elementar foi realizado pela primeira vez por Felix Klein em sua obra "A Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior" de 1908. Parte de nossa proposta pode ser vista como uma forma complementar dessa abordagem e, desse ponto de vista, pode ser interpretada como "A Matemática Superior de um Ponto de Vista Elementar", uma forma de traduzir para a Educação Básica a matemática superior que é ensinada nas licenciaturas.

Klein afirma que:

> tive muito gosto em deter-me em considerações históricas em muitas passagens dessas lições; assim pode-se ver quão lentamente se formam todas as ideias matemáticas, como surgem de uma forma confusa, que poderia dizer-se a partir de procedimentos, e só depois de um longo desenvolvimento chega a tomar a força rígida e cristalizada de uma exposição sistemática.

Exemplo Temático 1: Dos conceitos euclidianos aos conceitos cartesianos em geometria

Nesta seção discutiremos as concepções euclidianas de 'ponto' e 'reta' e como elas evoluíram para as definições cartesianas correspondentes.

Considera-se a geometria euclidiana como o estudo do espaço natural, o espaço onde os objetos geométricos se concretizam. Para teorizar sobre esse espaço, os geômetras gregos definiram os conceitos de 'ponto' e 'reta' da seguinte maneira:

a) 'Ponto' é aquilo de que nada é parte.
b) 'Reta' é uma linha sem largura disposta "uniformemente" ao longo de seus pontos.

Mais do que na forma de definir devemos reparar no ímpeto de dar concretude ou substância ao objeto definido, o "objeto-coisa".

A geometria analítica (plana) iniciada por Descartes e Fermat no século XVII, cria um espaço artificial para a geometria euclidiana: o plano cartesiano. Ele constitui-se no novo espaço de concretização-visualização das verdades geométricas transformando intuições geométricas em intuições numéricas sobre os números reais (embora o conceito de 'número real' ainda não estivesse devidamente compreendido e delimitado, o que só se dará no século XIX). Para a geometria cartesiana:

a) ‘Ponto’ é um par ordenado (x , y) de números reais.
b) ‘Reta’ é o lugar geométrico dos pontos (x , y) que satisfazem uma equação linear da forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

onde (x_0 , y_0) é um ponto dado da reta.

Essa concepção de ‘reta’ baseia-se no conceito de ‘declive’ ou inclinação da reta que é dado numericamente pelo coeficiente m.

Qual, então, a historicidade do conceito de ‘reta cartesiana’? Esse historicidade deve explicitar de que maneira se chegou do conceito de reta euclidiana ao de reta cartesiana. A história desse conceito está presente em alguns livros didáticos situando cronologicamente seu surgimento e trazendo já uma definição pronta de reta cartesiana colocada em determinado momento histórico, mas a historicidade nos revelará como ele se desenvolveu, qual foi sua gênese teórica.

Se voltarmos para a definição grega: “reta é uma linha disposta uniformemente em todos os seus pontos”, veremos que a dificuldade em sua compreensão reside no trecho “uniformemente em todos os seus pontos”. No entanto, ai está (acreditamos, como um exercício de interpretação) a raiz de sua conceptualização por Descartes. Ele entendeu “uniforme” como tendo a mesma inclinação ao longo de seu percurso, o que traduziu matematicamente através do seguinte conceito de ‘declive’: o declive do segmento formado pelos pontos (x , y) e (x_0 , y_0) é o valor do quociente $(y - y_0)/(x - x_0)$. Se esse valor for uma constante m para todos os pontos (x , y) de uma linha, mantendo o ponto (x_0 , y_0) fixo, então, essa linha é uma reta. Daí a equação da reta dada acima.

Neste caso, a definição dada por Euclides poderia ser considerada uma parte do “*DNA* conceitual” do conceito de reta cartesiana, ou seja, um início, uma origem que pode conter o todo necessário para seu desenvolvimento.

A concepção cartesiana de reta tem sua razão histórica e epistemológica na concepção euclidiana de reta. Esse movimento de ideias chamamos de ‘historicidade’.

O advento da geometria analítica tem também um sentido, e não apenas unificador da álgebra com a geometria, senão principalmente de cunho interdisciplinar, pois é possível introduzir (e imaginar) agora a “reta orientada”, isto é, uma reta que adota a direção dada pelo sistema dos números reais que lhe é associada. Esse recurso dá à física clássica a sua “linguagem” capturando o conceito de tempo na modernidade e possibilitando o estudo dos movimentos como percursos ao longo do tempo.

O enfoque adotado neste exemplo, pode nos sugerir uma abordagem histórico-epistemológica para uma primeira disciplina de geometria na graduação em Matemática que pretenda introduzir o método axiomático e sua evolução. Essa disciplina que chamaremos aqui de *Fundamentos de Geometria*, e que pode ser ministrada já no primeiro ano do Curso, poderia discutir, dentre outros, os seguintes assuntos: a) os cinco postulados da geometria de Euclides através de uma abordagem histórico-epistemológica, analisando os principais teoremas e enfatizando a demonstração do teorema que mostra, a partir dos primeiros quatro, a existência (porém não a unicidade) da reta paralela que passa por um ponto fora de uma reta dada; b) o teorema de Pitágoras, mostrando sua afinidade com o quinto postulado, o das paralelas; e finalmente c) o significado epistemológico do aparecimento da geometria analítica salientando sua característica metodológica de criação de um "espaço artificial" matemático para a geometria euclidiana. Uma referência muito boa para (a) e (b) é o livro (EUCLIDES, 2009, Livro I, p. 97-134).

Exemplo Temático 2: A teoria de grupos como base epistemológica para a constituição da geometria moderna

Este exemplo pretende mostrar que a teoria de grupos, notoriamente, a teoria dos grupos de transformações geométricas, longe de ser um assunto puramente técnico, tem suas raízes conceituais nos procedimentos euclidianos de constituição da geometria, procedimentos que, colocados em destaque no método axiomático, permitem revelar o caráter teórico-experimental e construtivo do pensamento geométrico grego.

Talvez o procedimento mais importante adotado por Euclídes na sua apresentação axiomática da geometria, e que lhe dá seu caráter de "ciência experimental", e, em decorrência disso, sua possibilidade de visualização, é o de "superposição de figuras". Ele é de caráter experimental na medida em que permite "manipular" os objetos geométricos referenciando-os ao espaço natural. Esse procedimento aparece num dos primeiros axiomas comuns de Euclides que estabelece o chamado hoje 'critério de igualdade ou congruência de figuras': "as coisas que se ajustam uma à outra (isto é, que coincidem quando superpostas) são iguais entre si". Repare-se que a superposição leva implícita a imagem mental de um movimento.

Além disso, uma das primeiras consequências desse axioma, na geometria plana, é a proposição conhecida hoje como 'teorema *LAL*' (lado-ângulo-lado) que estabelece o primeiro critério de congruência de triângulos. Essa proposição tem a seguinte consequência epistemológica importantíssima quando aplicada a dois triângulos no plano que são um imagem especular do outro: a geometria plana não é independente da geometria espacial, pois, para “realizar” a superposição nesse caso precisa-se retirar um dos triângulos do plano, gira-lo no espaço e voltar a colocá-lo para fazê-lo coincidir com o outro. Eis o caráter “experimental” da geometria tal como desenvolvida axiomaticamente por Euclides.

A partir do século XIX, e usando como recurso o recentemente consolidado conceito de ‘função’, a geometria plana (euclidiana ou não) pode ser estudada pelos efeitos que diversos movimentos, traduzidos através de transformações geométricas, produzem sobre as figuras geométricas: por exemplo, os movimentos que mantém invariante as distâncias entre pontos chamam-se ‘isometrias’ (movimentos rígidos) e fundamentam a chamada ‘geometria euclidiana métrica’, enquanto que os movimentos que mantém invariantes os ângulos entre retas, mas não necessariamente as distâncias entre pontos chamam-se ‘transformações de semelhança’.

Dentre as isometrias temos as translações, as rotações e as reflexões. Por outro lado, são transformações de semelhança, por exemplo, os movimentos de dilatação ou compressão chamadas ‘homotetias’.

Todas essas transformações baseiam-se no conceito de função introduzido na geometria apenas no século XIX e usado extensivamente por Felix Klein (1849-1925) não apenas na apresentação das diversas geometrias no conhecido *Programa de Erlangen*, senão nas reformulações modernas do ensino de matemática, e por David Hilbert (1862-1943) na versão axiomática moderna da geometria euclidiana.

Consideramos, desse ponto de vista, que a teoria de grupos, essencial na fundamentação moderna da geometria, deve ser introduzida na formação inicial dos professores (isto é, na Licenciatura), através dos grupos de transformações geométricas ou grupos de movimentos para assim desenvolver a geometria com esse enfoque, também as geometrias não-euclidianas.

Esse novo enfoque da geometria permite, inclusive, reformular o próprio conceito de ‘simetria de uma figura’ que ganha o seguinte novo significado na teoria de grupos de transformações: uma ‘simetria’ é um movimento (transformação) que deixa invariante a figura!

Olhando retrospectivamente, podemos ainda mostrar, como apontado por Poincaré (1948, p. 78-81), que Euclides já tinha a noção de “grupo de transformações” no caso específico das isometrias.

Vejamos que os axiomas chamados comuns com que se inicia a geometria de Euclides, alguns usados implicitamente, podem ser considerados como precursores dos axiomas da teoria de grupos quando eles são interpretados como propriedades da igualdade (congruência) de figuras: o grupo das isometrias.

Com efeito,

1) o axioma que diz: “duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si”, pode ser parafraseado como: “se há uma isometria que leva uma figura em outra, e outra isometria que leva esta numa terceira, então há uma isometria da primeira na terceira”, isto é, a composição de duas isometrias é uma isometria.
2) O axioma que diz: “se uma coisa é igual a outra, a segunda é igual à primeira”, pode ser parafraseada como “se há uma isometria de uma figura em outra, então, há uma isometria da segunda na primeira”, isto é, cada isometria tem uma inversa que é também uma isometria.
3) O axioma “cada coisa é igual a si própria” (que é um princípio aristotélico implícito em Euclides) pode ser parafraseado como “existe a isometria trivial”.
4) Também, o axioma “se são adicionadas coisa iguais a coisas iguais, os resultados são iguais” diz que as isometrias preservam a adição de figuras.

Enfim, no século XIX passa-se, então, de uma geometria das formas estáticas a uma geometria das formas em movimento através dos grupos de transformações. Do ponto de vista epistemológico, passa-se do sensível e experimental (baseado no procedimento euclidiano de superposição) ao formal e racional (baseado na noção de “transformação”).

Poincaré atribuía extrema importância aos grupos de movimentos como fundamentação da geometria. Para Kant, em finais do século XVIII, as noções de espaço e tempo são capacidades inatas do ser humano, enquanto que para Poincaré, a capacidade mais primitiva do ser humano é a que diz respeito à noção de grupo (pensada como grupo de movimentos), é a partir dela que o espaço e o tempo adquirem significado. Posteriormente, Piaget recupera as ideias de Poincaré para explicar o desenvolvimento psicológico da criança sobre sua “percepção” do espaço e do tempo. Eles, em consonância, sustentam que as noções métricas, isto é, de medida, tão importantes para o desenvolvimento da física, são posteriores pois a possibilidade de fazer medidas baseia-se na movimentação de uma unidade de medida repetidas vezes sobre o objeto medido.

Estas considerações sugerem-nos implementar (talvez mediante duas disciplinas semestrais em sequência) a teoria de grupos na Licenciatura em Matemática como teoria de grupos de transformações (uma primeira disciplina, sem descuidar os aspectos técnicos pertinentes) com vistas a desenvolver com esse ferramental moderno (numa segunda disciplina) um estudo das geometrias não-euclidianas, especialmente a geometria hiperbólica ou de Lobachevski, que ainda tem como base os primeiros quatro postulados de Euclides. Nesse estudo pode-se enfatizar a importância que, nesse momento histórico, cobram os números reais: eles justificam a existência de duas paralelas limites por um ponto fora de uma reta dada, cujos declives são dados mediante o "supremo" dos declives de uma família de retas. Finalmente, consideramos importante o estudo dos grupos de isometrias e de semelhanças da geometria euclidiana e suas consequências geométricas visando estimular no professor, e consequentemente em seus alunos, o aprimoramento dos pensamentos algébrico, geométrico e analítico na escola.

Exemplo Temático 3: A arqueologia do conhecimento matemático: a natureza da "lei dos sinais" antes de sua algoritmação

Um dos grandes problemas didáticos no ensino da matemática elementar é justificar a chamada 'lei dos sinais' da multiplicação de números inteiros. Uma forma de justificar essa "lei" (que é tratada apenas como um algoritmo) é reconstruir as origens (teóricas!) desse sistema de números.

O ponto central na historicidade dos números negativos é entender o significado do sinal de menos (–), por exemplo, em –2 ou em –(–2). Mostra-se que, na realidade, há uma dupla função do sinal de (–) o que é importante observar para a compreensão do assunto abordado, vejamos:

1. Para atribuir uma "negatividade" a um número como em –2.

2. Como uma "operação" que transforma um número em outro como em –(–2), que transforma o número negativo –2 no número positivo 2. Nesse caso, o número –(–2) pode ser interpretado como o "oposto" do número negativo –2, ou também como o oposto do oposto do número positivo 2.

Esse jogo está por trás do entendimento da regra de sinais, sendo parte de sua historicidade.

Considerando que a historicidade de um conceito é parte do conhecimento desse conceito, buscamos investigar como a regra dos sinais, no caso dos números inteiros positivos e negativos, ganhou forma, mostrando, assim, que não é apenas uma convenção.

Do ponto de vista genético ou construtivo tomaremos como base da construção do "sistema" dos números inteiros o sistema dos números naturais **N** = {0, 1, 2, ...} que supomos já bem definido e de cujas propriedades decorrerão as propriedades dos inteiros.

Nesse caso, os números inteiros podem ser introduzidos como diferenças de números naturais, isto é: um "objeto" a será dito um 'número inteiro' se $a = n - m$ para certos n, $m \in$ **N**.

Essa forma de introduzir os inteiros é motivada pela necessidade histórica (e epistemológica) de concretizar soluções para as equações da forma x + $m = n$, formuladas no universo dos números naturais.

Uma primeira observação é relevante: um mesmo número inteiro pode ser representado de muitas maneiras como diferença de naturais, por exemplo:

$$\text{"}2\text{"} = 5 - 3 = 9 - 7 = \mathbf{2 - 0} = \ldots$$

$$\text{"}-1\text{"} = 3 - 4 = 5 - 6 = \mathbf{0 - 1} = \ldots$$

Dessa observação resulta uma propriedade essencial (ilustrada em negrito) que vai nos conduzir à compreensão da lei dos sinais: para todo número inteiro $a = n - m$ existe um único número natural k tal que $a = k - 0$ ou $a = 0 - k$. No primeiro caso a é dito *positivo ou zero* e denotado por $+k$, e no segundo caso a é dito *negativo ou zero* e denotado por $-k$.

É conveniente observar que $+k$ ou $-k$ é uma notação para cada uma dessas situações. Poderíamos denotá-las, e assim o faremos para a discussão que segue, por k^+ e k^- respectivamente. O sinal + ou – respectivamente indica a positividade ou negatividade do número (digamos, seu "grupo sanguíneo").

Antes de chegar à lei dos sinais, mais um passo deve ser dado: a definição da operação ou transformação 'oposto de um número inteiro'.

Se $a = n - m$ é um número inteiro, definimos o 'oposto de a' por $m - n$ e o denotamos por $-a$. Poderíamos, também, denotá-lo por $*a$ pois trata-se apenas de uma notação. O símbolo – aqui utilizado não tem o mesmo significado que o sinal de um número inteiro como introduzido anteriormente. Aqui, esse símbolo tem um sentido operacional, como uma "transformação", e pode ser aplicado a números inteiros positivos ou negativos.

O problema reside, então, em como entender, por exemplo, $-(-a)$ quando a é um número inteiro? O primeiro símbolo – denota com certeza a operação de oposto, mas o símbolo dentro do parêntese pode denotar o oposto ou a negatividade do número a.

Para chegar finalmente à lei dos sinais, devemos nos convencer, primeiro, dos seguintes fatos. Para todo número inteiro, temos duas propriedades que relacionam seu oposto com seu "grupo sanguíneo": se k é um número natural,

$$-(k^+) = -(k - 0) = 0 - k = k^-$$

$$-(k^-) = -(0 - k) = k - 0 = k^+$$

Daí, se a é um número inteiro, então, resulta, por exemplo, que $-(-a) = a$. Com efeito:

$$\text{para } a = k^+: -(-a) = -(-k^+) = -(k^-) = k^+ = a, \text{ e}$$

$$\text{para } a = k^-: -(-a) = -(-k^-) = -(k^+) = k^- = a.$$

Outras leis dos sinais envolvem a multiplicação de números inteiros que é definida da seguinte maneira: se $a = n - m$ e $b = r - s$, então, $ab = (nr + ms) - (ns + mr)$, também uma diferença de números naturais. Com isso, podem ser demonstradas as seguintes propriedades, dentre outras:

$$(n^-)(m^-) = (nm)^+, \; n \text{ e } m \text{ naturais},$$

$$(n^+)(m^-) = (nm)^-, \; n \text{ e } m \text{ naturais},$$

$$a(-b) = -(ab), \; a \text{ e } b \text{ inteiros},$$

$$(-a)(-b) = ab, \; a \text{ e } b \text{ inteiros}.$$

Um estudo análogo pode ser feito sobre a construção dos números racionais positivos a partir dos naturais, começando com a definição das frações n/m ao invés das diferenças $n - m$. Convido o leitor a tentar fazer essa (re)construção utilizando a "analogia" como método.

O assunto da (re)construção dos diversos sistemas numéricos (desde os naturais até os reais) e a devida interpretação de suas propriedades, pode ser abordado numa disciplina que poderíamos denominar de *Fundamentos da Análise*, disciplina que poderia ser a ponte para outras. Para tanto, o seu conteúdo poderia incluir, como eixo central, o chamado de 'processo da aritmetização da análise' através de um estudo histórico-epistemológico e matemático como desenvolvido em (CIFUENTES, 2015). A referida disciplina poderia envolver os seguintes tópicos: a) a construção do sistema dos números naturais através de um tratamento cardinal partindo da teoria de conjuntos finitos (um tratamento ordinal é mais adequado para a abordagem axiomática desses números dada por Peano); b) a construção do sistema dos números inteiros como motivação para a teoria de anéis; c) a construção do sistema dos números racionais como motivação para a teoria de corpos; e d) a construção do corpo ordenado dos números reais, salientado sua completude métrica e de ordem, como primeiro passo na direção da Análise na Reta.

O próximo e último exemplo, visa mostrar como certos conteúdos matemáticos do Ensino Superior podem ser fonte de criatividade para o professor de matemática em formação.

Exemplo Temático 4: A elaboração de um "novo" algoritmo da multiplicação: um exercício de criatividade

Neste exemplo veremos como certos algoritmos numéricos que podem ser desenvolvidos para o seu ensino na Educação Básica têm uma fundamentação adequada e simples em tópicos da graduação. Esses tópicos mostram-se ferramentas para a criatividade, e os algoritmos elaborados fonte de aprendizado, de uma maneira lúdica, para o ensino elementar. Veremos aqui um "novo" algoritmo para a multiplicação de números naturais e sua justificação teórica passará a ser parte de sua historicidade.

As bases desse algoritmo podem ser discutidas com tópicos de uma disciplina elementar de *Teoria de Números* da graduação, matizada com a operação de multiplicação de polinômios para ser usada com as representações polinomiais dos números naturais em diferentes bases de numeração.

Lembrando: se b é um número natural ≥ 2, então, todo número natural a admite uma única representação como um polinômio em potências de b da forma:

$$a = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0,$$

onde a_n, a_{n-1}, ... , a_1, a_0 são números entre 0 e $b - 1$ chamados algarismos ou dígitos do sistema de numeração.

Vamos analisar, então, a multiplicação de números naturais através de suas representações polinomiais na base 10 usual para obtermos um algoritmo de multiplicação que pode ser realizado numa linha só.

Por exemplo, se multiplicarmos os números $(a_1 a_0)$ e $(b_1 b_0)$, dados em base 10, em forma polinomial, obtemos:

$$(a_1 10 + a_0)(b_1 10 + b_0) =$$

$$(a_1 b_1)10^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)10 + (a_0 b_0)$$

o que nos dá, trabalhando apenas com os dígitos, o seguinte algoritmo realizado em uma linha só:

$$\begin{array}{c} (a_1 a_0)\text{x} \\ (b_1 b_0) \\ \hline (a_1 b_1)(a_1 b_0 + a_0 b_1)(a_0 b_0) \end{array}$$

Como poderemos realizar, então, a multiplicação numa linha só com números de três dígitos? Vejamos como seria em forma polinomial com números arbitrários de três dígitos:

$$(a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)(b_2 10^2 + b_1 10 + b_0) =$$

$$(a_2 b_2)10^4 + (a_2 b_1 + a_1 b_2)10^3 + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)10^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)10 + (a_0 b_0)$$

Ou, em forma esquemática:

$$\begin{array}{c} (a_2 a_1 a_0)\text{x} \\ (b_2 b_1 b_0) \\ \hline (a_2 b_2)(a_2 b_1 + a_1 b_2)(a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)(a_1 b_0 + a_0 b_1)(a_0 b_0) \end{array}$$

No algoritmo implícito no esquema anterior, que deve começar pela direita, observa-se a simetria na obtenção de cada dígito do resultado da multiplicação. É claro que, se um determinado número entre parênteses superar o dígito 9, deve carregar para o seguinte o número de dezenas correspondente. Também, é simples observar que com esse algoritmo podem ser multiplicados um número de três dígitos com outro de dois, basta considerar o primeiro dígito do segundo número como zero.

Convido o leitor a estabelecer esse algoritmo para o caso da multiplicação de dois números de quatro dígitos.

Observa-se também, com esse procedimento, a ludicidade na construção do conhecimento matemático elementar e a importância dos estudos superiores para justificar esse conhecimento através de sua reconstrução teórica (historicidade). Esse mesmo algoritmo pode ser utilizado para multiplicar números representados em outras bases de numeração, o que constituiria uma excelente forma de exercitar o cálculo mental na escola.

A disciplina curricular envolvida, como já mencionado, seria a *Teoria de Números*, pré-requisito para as disciplinas posteriores da área de Álgebra.

A Historicidade da Matemática na Busca de "Sentidos": a modo de conclusão

A historicidade pode-nos auxiliar na construção de sentidos para os conceitos matemáticos, que extrapola muitas vezes seu significado definicional, pois faz deles uma análise do seu *DNA* possibilitando o acompanhamento de sua evolução. Essa abordagem conduz o aluno a perceber, reconhecer e identificar o desenvolvimento evolutivo dos conceitos matemáticos, não somente como produtos prontos, o que poderia induzir o aluno talvez a memorizar esses produtos em forma descontextualizada de sua própria história.

Para que possamos diferenciar essas duas questões e argumentar sobre o que entendemos por "sentido", e em que difere de "significado", citaremos o seguinte trecho de (CIFUENTES, 2010, p. 17):

> Um velho exemplo dado por Frege, pode ilustrar essa diferença: 'Vênus' significa (ou refere a) o planeta Vênus, enquanto que as expressões "a estrela da manhã" e "a estrela da tarde", tendo mesma significação (na forma referencial como ela é entendida aqui) têm diferentes sentidos (e intencionalidades), os que põem de manifesto sua racionalidade poética. Um outro exemplo é o seguinte: dizer "o dia seguinte de ontem" não é apenas mencionar seu significado concreto e verdadeiro, "hoje", essa expressão vem carregada de sentidos que, muito além da significação, só são compartilhados com a poesia.

Dessa forma podemos perceber que diversos conceitos matemáticos possuem um determinado significado, geralmente abstrato, mas o sentido atribuído a estes dependerá da relação que o indivíduo estabelece com eles na floresta matemática permeada de epistemologia e historicidade. O sentido está carregado de emoções provenientes da sensibilidade matemática cuja percepção não é apenas racional como o significado poderia ser.

Nesse ponto se estabelece a forte relação do conhecimento com a historicidade para evidenciar o "sentido" possível de um conceito, ou seja, é preciso conhecer as raízes ou a gênese desse conceito para que possamos compreender o modo como ele foi construído, sua intencionalidade, bem como as interpretações que vão se desenvolvendo ao longo do tempo.

Resumindo, então, neste trabalho estabelecemos duas hipóteses que norteiam nossa proposta, primeiro, de que todo conhecimento tem uma historicidade, um "*DNA* conceitual" permeado de sentidos, e segundo, de que a historicidade do conceito é parte da compreensão do próprio conceito, é parte do conhecimento matemático. A historicidade do conceito revela uma característica endógena própria através de sua gênese e evolução orgânica, enquanto que a história do conceito proporciona um enfoque externo ou exógeno dessa evolução.

É possível perceber que a história da matemática descreve hoje o desenvolvimento temporal dos conceitos, no entanto a história mostra só um lado, o externo, desse desenvolvimento, abordando uma passagem organizada de forma cronológica. Nosso estudo, porém, mostra uma face interna do desenvolvimento desses conceitos e visa trazer uma interpretação mais intrínseca a respeito de sua evolução.

Finalizamos ressaltando que o contexto de abrangência deste estudo envolve a Educação Matemática no Ensino Superior, especialmente a "formação matemática" do professor, inclusive a formação de formadores de professores.

Referências

BACHELARD, Gaston. **A Formação do Espírito Científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996, 4ª reimpressão, 2003.

CARVALHO E SILVA, Jaime. **O Pensamento Pedagógico de José Sebastião e Silva.** s/d. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/sebsilva.html>. Acesso em: 02 março 2016.

CIFUENTES, José Carlos. Do Conhecimento Matemático à Educação Matemática: uma "odisséia espiritual". In: CLARETO, S. M.; DETONI, A. R.; PAULO, R. M., (Orgs.) **Filosofia, Matemática e Educação Matemática**: compreensões dialogadas. Juiz de Fora: Editora UFJF, 2010, p. 13-31.

CIFUENTES, José Carlos. O Mito da Análise Real na Formação conceitual do Professor de Matemática sobre os Números Reais e a Análise Matemática. In: KALINKE, M. A.; MOCROSKY, L. F., (Orgs.) **Educação Matemática**: pesquisas e possibilidades. Curitiba: Ed. UTFPR, 2015, p. 95-115.

EINSTEIN, Albert. **A Teoria da Relatividade Especial e Geral**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1999.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

HOWARD, Don. **Albert Einstein como filósofo da ciência.** Crítica 09/04/2006. Disponível em: <http://criticanarede.com/cie_einstein.html>. Acesso em: 01 jul. 2015.

JASPERS, Karl. **La Idea de la Universidad**. Trad. Agustina Schroeder de Castelli. Buenos Aires: Ed. Sudamericana, 1959.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

PATY, Michel. Inteligibilidade racional e historicidade. **Estudos Avançados**. São Paulo, v. 19, n. 54, p. 369-390, 2005.

POINCARÉ, Henri. Los Fundamentos de La Geometría. In: REY PASTOR, J. (Org.) **H. Poincaré – A. Einstein, Fundamentos de la Geometría**. Buenos Aires: Ed. Ibero-Americana, 1948, p. 15-100.