ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

Um Experimento De Ensino Sobre Periodicidade: Fatores Relevantes Para A Aprendizagem

A Teaching Experiment On Periodicity: Relevant Factors For Learning

Nielce Meneguelo Lobo da Costa*
Universidade Anhanguera de São Paulo-(UNIAN)
Sonner Arfux de Figueiredo**
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul-UEMS
Salvador Llinares***
Universidad de Alicante – UA

Resumo

Neste artigo discutimos um experimento de ensino que versou sobre periodicidade de funções trigonométricas e foi aplicado a dezesseis estudantes do primeiro ano de um curso de licenciatura em matemática. Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA, baseada em Simon e Tzur, foi desenhada contemplando o mecanismo cognitivo centrado na relação atividade-efeito, a partir da ideia de abstração reflexiva, de Piaget. Na pesquisa qualitativa, com elementos do Design Based Research, investigamos como a tarefa matemática promoveu a aprendizagem dos estudantes. Destacamos como os licenciandos utilizaram *applets* no software GeoGebra e como caracterizaram as funções em estudo e seus respectivos períodos utilizando as linguagens analítica e geométrica. Os resultados indicaram que houve coordenação de registros enquanto os licenciandos modificaram parâmetros das expressões algébricas das funções e os relacionavam com os períodos das mesmas. Identificamos fatores relevantes para a aprendizagem propiciadas pelo experimento de ensino, os quais explicaram a relação entre a aprendizagem conceitual e as tarefas matemáticas propostas na THA. Concluímos que o mecanismo ofereceu uma estrutura para os licenciandos pensarem e avançarem na aprendizagem conceitual.

Palavras-chave: Trigonometria, Aprendizagem Conceitual, Mecanismo Cognitivo

Abstract

In this article we discuss a teaching experiment that dealt with periodicity of trigonometric functions and was applied to sixteen first-year students of one Mathematics Graduate Course. A hypothetical learning trajectory (HLT), based on Simon and Tzur studies, was designed contemplating the cognitive mechanism centered on the relation activity-effect, from Piaget's idea of reflexive abstraction. In the qualitative research, with elements of *Design Based Research*, we investigate how the mathematical task promoted the students' learning. We highlight how the undergraduate students developed tasks using *applets* in GeoGebra software and how they used the analytical and geometric languages in order to characterize the functions under study and their periods. The results indicated that the records were

*Doutora em Educação: Currículo pela PUCSP. Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNIAN, São Paulo, SP, Brasil. E-mail: nielce.lobo@gmail.com.
**Doutor em Educação Matemática pela UNIAN. Gerente de Unidade Universitária e Professor do Curso de Licenciatura em Matemática da UEMS, Nova Andradina, MS, Brasil. E-mail: sarfux@uems.br.
***Doutor em Educação pela Universidad de Sevilla. Professor do Depto. de Innovación y Formación Didáctica da Facultad de Educación da Universidade de Alicante, Val., SP, Espanha. E-mail: sllinares@ua.es.

coordinated while modifying the parameters of the algebraic expressions of the functions and related them to the periods of the functions. We identified relevant factors for learning provided by the teaching experiment, which explained the relationship between conceptual learning and mathematical tasks proposed in the HLT. We conclude that the cognitive mechanism provided a framework for undergraduate students thinking and advancing in conceptual learning.

Keywords: Trigonometry, Conceptual Learning, Cognitive Mechanism

1 Introdução

O estudo de trigonometria está incluso nos cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Brasileiras e tem sido objeto de debates e investigações nas últimas décadas, dada a preocupação em preparar adequadamente os licenciandos para ensinarem a trigonometria na Educação Básica. O debate envolve a escolha de quais tópicos são interessantes para abordar, o que conjectura credibilidade, como os campos da trigonometria clássica devem ser vistas à luz de novos resultados, tais como a trigonometria racional (Gilsdorf, 2006) e, especialmente, como ensinar trigonometria hoje no Ensino Médio.

Um debate acalorado ocorrido cem anos atrás – com estreitos paralelos com a revolução na trigonometria que Wildberger publicou em seu novo livro, Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry, de 2005 – resultou em grandes mudanças no estudo da Algébra linear, campo da matemática que surge de forma embrionária nos estudos de trigonometria. No entanto, nem sempre os tratamentos dados ao ensino de conceitos trigonométricos são consistentes entre si, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista pedagógico e podem dificultar a construção dos mesmos e a atribuição de significado. Assim sendo, como enfatiza Lobo da Costa (1997, p. 1), do ponto de vista do conhecimento, “a trigonometria, que é uma das formas matemáticas do Homem compreender e interpretar a Natureza pode ser, para nossos alunos, apenas um assunto abstrato e sem utilidade”.

Em relação ao estudo das funções trigonométricas, vale ressaltar que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006) recomendam que as funções seno e cosseno sejam associadas aos fenômenos periódicos, de modo a auxiliar os alunos a atribuir significado ao estudo dessas funções.

No caso do Ensino Superior, o professor que leciona disciplinas que envolvem Matemática para alunos recém-ingressados nesse segmento de e Ensino não tem, em geral, percepção clara das aprendizagens anteriores dos alunos e, por isso, tendem a supervalorizá-las ou a subestimá-las. Entretanto, o professor universitário das disciplinas iniciais de cursos de licenciatura em matemática precisa auxiliar os futuros professores a reconstruírem uma série de

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

conceitos e de procedimentos cuja construção se inicia nos Ensinos Fundamental e Médio: por exemplo, *os conceitos de número e de função*, que são objetos básicos de trabalho em cursos de Cálculo. Inferimos que este professor se pergunte: Com que formas de raciocínio, conceitos e processos matemáticos os meus alunos têm familiaridade? Que posso fazer para criar uma ponte entre o conhecimento já construído pelos alunos e aquele que eu pretendo que construam?

No caso particular do ensino de trigonometria nos cursos superiores de Matemática, é necessário considerar que ela não é usada apenas para estudar triângulos e circunferências ou ainda como um instrumento potente de cálculo, na verdade sua aplicação se estende sendo uma ferramenta para resolução de questões quantitativas e lógicas. A trigonometria é utilizada em várias situações práticas e teóricas; não somente em problemas internos da Matemática, mas também de outras disciplinas científicas e tecnológicas que envolvem fenômenos periódicos, tem aplicações no estudo de eletricidade, termodinâmica, óptica, confecção de eletrocardiogramas, entre outros. Diante disso, é importante que o aluno tenha uma compreensão profunda do assunto "trigonometria", e de suas aplicações.

O ensino e a aprendizagem da trigonometria, exigem articulação entre três tipos de linguagem matemática: *a Geométrica, a aritmética e a algébrica* (Duval,1998), com base nas noções teóricas de representação semiótica, por meio de uma articulação entre os registros de representações nas diferentes abordagens ou dentro de uma mesma abordagem.

O pensamento geométrico sintetiza e utiliza a linguagem de figuras geométricas, linhas e planos, intersecções, assim como suas representações gráficas convencionais. No modo aritmético analítico os objetos geométricos são representados como conjuntos das funções trigonométricas que satisfaçam certas condições, como por exemplo a expressão algébrica. O Pensamento estrutural vai mais adiante, este sintetiza os elementos algébricos das representações analíticas dos conjuntos estruturais.

Duval (2008) indica que construir o significado dos objetos matemático implica, por uma parte, na capacidade de transformação das representações que admite duas formas: a conversão e o tratamento de forma que o sistema semiótico se permute e o mantém; por outra a coordenação interna entre representações já que há uma justaposição simultânea de várias representações em um mesmo objeto, pois se limita a um reconhecimento mediante associação particular em cada caso.

Os três tipos de linguagens (geométrica, aritmética e algébrica) coexistem, entretanto, não são equivalentes. "Saber quando uma linguagem se usa metaforicamente, como se relacionam as distintas representações e modos de pensamentos e quando uma é mais apropriada que outra frente às dificuldades principais dos estudantes" (Sierpinska, 1992).

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

Estas dificuldades relativas às distintas linguagens e modos de pensamentos têm sido discutidas e estudadas por Soto (2002). No sentido de auxiliar a superar as dificuldades de compreensão dos conceitos e da linguagem geométrica, a tecnologia pode ser uma aliada, pois o que difere numa atividade com o recurso de software de geometria dinâmica é a possibilidade de movimentação dos objetos e, a partir desses movimentos, propiciar ao aluno a oportunidade de investigar o que acontece com as construções. Desse modo, hipóteses tais como: a construção permanece com as mesmas características; um simples movimento muda todas as características originais, podem surgir. O teste das várias hipóteses postas pode levar à percepção de regularidades e a tomadas de decisão na resolução das tarefas e das atividades propostas.

Para auxiliar os alunos a superarem as dificuldades de transitar entre as linguagens matemáticas a tecnologia pode ser usada, como instrumento de mediação semiótica, para introduzir relações e conceitos matemáticos (Maschietto, 2008), pois tem um potencial em apresentar simultaneamente várias representações de um mesmo conceito e favorece a interação e o dinamismo (Lagrange & Artigue, 2009). Nesse sentido, diversas propostas têm surgido, abordando o ensino de trigonometria, particularmente com o uso de software de geometria dinâmica, procurando articular distintas linguagens e combinar diferentes aspectos analíticos e intuitivos por meio de uma aproximação geométrica (Lindegger, 2000; Brito & Morey, 2004, Lobo da Costa, 2004, Figueiredo, 2015, Orfão, 2012).

Neste artigo discutimos um experimento de ensino que versou sobre periodicidade de funções trigonométricas e foi aplicado a dezesseis estudantes do primeiro ano de um curso de licenciatura em matemática. Nele destacamos como os licenciandos desenvolveram tarefas utilizando *applets* no software GeoGebra e como utilizaram a linguagem analítica e a geométrica e, a partir dessas tarefas, como caracterizaram as funções em estudo e seus respectivos períodos. Finalizando, identificamos quais foram os fatores relevantes para a aprendizagem propiciadas pelo experimento de ensino.

2 Marco Teórico

A investigação contempla a caracterização do mecanismo cognitivo centrado na relação atividade-efeito em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem - THA (*hypothetical learning trajectory*-HLT), Simon, Tzur, Heinz, Kinzel (2004), com uma taxonomia sobre os processos de generalização Assim podemos explicar a relação entre a aprendizagem conceitual e tarefas matemáticas, e com esta elaboração da THA, o mecanismo oferece uma estrutura para pensar

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

sobre como uma tarefa matemática pode promover o processo de aprendizagem do estudante (Figueiredo, 2015). A perspectiva teórica adotada procede a uma particularização da ideia de abstração reflexiva elaborada a partir das ideias de Piaget (1977) e utilizada por Simon e Tzur (2004). Estes autores apontam que as ações realizadas pelos estudantes ao desenvolver uma tarefa produzem diferentes efeitos que podem ser considerados por eles em seus processos de abstração.

Um enfoque proposto por Simon (1995) e por Simon e Tzur, (2004) é relativo ao desenvolvimento profissional, eles propõem um modelo de análise da prática do professor que permite, com posterioridade, incorporar resultados aos programas de formação docente. Explicam os autores ainda que, enquanto os alunos se concentram nas atividades para atingir suas metas, eles criam registros mentais, assim, a experiência é gravada no intelecto e desenvolve uma interação que produz um efeito.

Este mecanismo baseia-se na descrição de Piaget (1977), sobre dois aspectos: o da reflexão e da abstração. O primeiro aspecto é uma projeção, no qual as ações em um nível tornam-se objetos (entrada) de ações na próxima. O segundo aspecto é um reflexo, no qual ocorre uma reorganização entre ações. O autor faz uma distinção entre os dois tipos de reflexão realizados pelos estudantes em seus registros da experiência.

Simon e Tzur (2004), apoiados na noção de abstração reflexiva de Piaget, assumem que os processos mentais dos estudantes são elementos constituintes da compreensão de um objeto que envolve duas fases: uma fase participativa, na qual o estudante desenvolve diferentes atividades guiadas pelo objetivo de resolver uma tarefa matemática e uma fase antecipativa em que, antes de cumprir uma tarefa cuja resolução envolve o uso de um conceito matemático, o aluno deve perceber a necessidade de usar esse conceito matemático. Neste caso, o aluno pode usar o conceito de forma adequada, independentemente do contexto ou da tarefa.

2.1 A Taxonomia SOLO Como Processo De Generalização De Uma Resposta

Para analisar a atividade cognitiva dos estudantes usamos a taxonomia denominada SOLO (*Structure of the Observed Learning Outcomes)* desenvolvida por Biggs e Collis (1982). Tal taxonomia se apoia em pressupostos piagetianos e fornece um modelo para avaliação do desenvolvimento cognitivo do estudante a partir da observação do pensamento matemático. Na taxonomia é dada ênfase à compreensão de aspectos da qualidade da aprendizagem e como as diferentes experiências influenciam a complexidade do pensamento matemático que surge dessas aprendizagens. A análise pela taxonomia SOLO permite conjeturar sobre maneiras de

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

descrever o pensamento matemático, assim como tentar explicar a forma como esse pensamento é transformado ao longo do tempo, ou ao longo do processo de aprendizagem.

Para Biggs e Collis (1982), alguns dos atributos da teoria dos estágios de desenvolvimento piagetiano foram considerados como pressupostos, tais como: (i) a existência de uma sequência de desenvolvimento cognitivo; (ii) a compreensão em níveis particulares de desenvolvimento das habilidades; (iii) padrões de desenvolvimento e (iv) graus de proficiência na assimilação de certo tipo de experiências. Aqui a qualidade da aprendizagem não é vista apenas como a classificação qualitativa que um aluno obtém quando responde a uma questão, mas também como ocorre o processo qualitativo de produção dessa resposta (raciocínio matemático utilizando fatos, conceitos e capacidades).

O processo de produção de uma resposta por parte do aluno é complexo, pois a qualidade da aprendizagem não depende exclusivamente dele, mas também de outras dimensões como a qualidade do ensino, o conhecimento prévio das ideias matemáticas abordadas, a motivação, a autorregulação da aprendizagem entre outras dimensões mais particulares. A ênfase na análise da qualidade dessas respostas não está no grau de correção das mesmas, mas sim na estrutura (natureza) do processo que conduziu à resposta, codificada em categorias (níveis SOLO) detalhando o desenvolvimento do raciocínio evidenciado.

A taxonomia criada por Biggs e Collis (1982) identifica estágios de desenvolvimento cognitivo classificados por ordem crescente de complexidade: (I) Pré-estrutural; (II) Uni-estrutural; (III) Multi estrutural; (IV) Relacional e (V) Abstrato Estendido.

Para os autores, de acordo com as respostas, os alunos podem exibir em um modo de pensamento níveis distintos de complexidade no seu entendimento. Os níveis podem ser descritos de maneira abstrata e genérica, da seguinte forma:

I. Pré-estrutural (P): Forma de pensar em que as respostas são inadequadas. O aluno não responde ao que lhe é solicitado, distraindo-se ou confundindo-se com aspectos irrelevantes pertencentes a um estádio ou modo de pensamento anterior
II. Uni-estrutural (U): O aluno pensa de forma correta, mas como não utiliza todos os dados, obtém pouca informação e detém-se em um único aspecto relevante para a realização da tarefa. As respostas podem, por isso, ficar sem fundamento ou inconsistentes.
III. Multi-estrutural (M): O aluno foca-se em características mais importantes e corretas, mas elas não se integram totalmente, o que leva a que possam aparecer incoerências nas suas respostas.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

IV. Relacional (R): As informações são facilmente entendidas, os dados são avaliados e as relações são estabelecidas de uma forma correta. Há um entendimento do todo e, este, torna-se uma estrutura coerente.

V. Abstrato Estendido (AE): Agora o aluno generaliza a estrutura coerente para um plano com características mais abstratas, representando um novo e elevado modo de pensar. (Amantes & Borges, 2008. p5).

Os autores sugeriram cinco modos de funcionamento cognitivo em vez dos quatro estágios de desenvolvimento definidos por Piaget. A diferença destas duas visões está no paralelismo destes modos em vez da sobreposição piagetiana, pois os novos modos não se sobrepõem aos anteriores estando assim estruturados como: (i) Sensório-motor; (ii) Iconico; (iii) Concreto-simbólico; (iv) Formal e (v) Pós-formal.

Os modos de pensamento são importantes, mas não fornecem informação suficiente para explicar como a complexidade do pensamento matemático ocorre em cada modo ou o que é necessário acontecer de forma a que as ideias matemáticas progridam para modos mais elevados observando as diferenças existentes entre experiências de aprendizagem e experiências de repetição.

A partir desse arcabouço teórico foi desenhado e desenvolvido o experimento de ensino.

3 Materiais E Métodos

A investigação aqui discutida foi qualitativa, de natureza descritiva e interpretativa, com características da pesquisa-ação e elementos do Design-Based Research proposto por Coob, Confrey, Disessa, Lehrer e Schauble (2003), que permite ajustes tanto para o processo formativo quanto investigativo. A pesquisa-ação tem por pressuposto que os sujeitos envolvidos compõem um grupo com objetivos e metas comuns, interessados em um problema que emerge num dado contexto no qual atuam desempenhando papéis. Constatado o problema, o papel do pesquisador universitário consiste em ajudar o grupo a problematizá-lo, ou seja, situá-lo em um contexto teórico mais amplo e assim possibilitar a ampliação da consciência dos envolvidos, com vistas a planejar as formas de transformação das ações dos sujeitos e das práticas institucionais Thiollent (1994).

A pesquisa se desenvolveu em um Curso de licenciatura em Matemática com dezesseis acadêmicos de uma turma ingressante na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul-UEMS, da Unidade Universitária de Nova Andradina. A pesquisa se desenvolveu em um processo de formação inicial no Curso de licenciatura em Matemática com dezesseis acadêmicos de uma

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

turma ingressante na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul-UEMS, da Unidade Universitária de Nova Andradina. Foi desenhada uma THA sobre funções trigonométricas composta por12 seções de 50 minutos divididos em quatro módulos, sendo que os módulos I e III com duas seções cada e os módulos II e IV com quatro sessões cada. A THA foi desenhada de modo a se adequar ao grupo pesquisado e a atender aos interesses de pesquisa.

Os dados foram coletados por filmagens com uma Câmera Digital e a *Webcam* do notebook e gravações feitas com dois gravadores, um centralizado no Laboratório de Informática e outro com o pesquisador-formador. Além disso, foram feitas anotações de campo e recolha de documentos. Nas seções foram capturadas as telas com as tarefas a serem realizadas, gravados os diálogos com o programa *Gadwin Print Screen*.

O Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da UNIAN autorizou a pesquisa, sob número 289/12 e os participantes assinaram termos de consentimento livre e esclarecido.

Na próxima seção discutimos um experimento de ensino que versou sobre periodicidade de funções trigonométricas e integrou a THA.

3.1 O Experimento De Ensino

O experimento de ensino foi desenvolvido em três seções e utilizou um *applet* construído no software GeoGebra, o qual ofereceu aos alunos funções trigonométricas simultaneamente representadas na linguagem geométrica e analítica, de modo que os estudantes pudessem investigar regularidades.

As tarefas das seções se articularam a partir dos seguintes pontos:

- ✓ Relação entre a função trigonométrica e o ciclo trigonométrico (tarefa I);
- ✓ Exploração e levantamento de conjecturas sobre a variação do arco trigonométrico e do valor da função trigonométrica (tarefa II);
- ✓ Exploração gráfica das propriedades, com o uso do software (tarefa III).

Estes pontos, se articularam em um processo hipotético de construção e consolidação do conceito de periodicidade de uma função trigonométrica, no qual cada tarefa representa uma etapa no processo de entendimento do conceito estudado, caracterizando os estágios específicos para cada domínio na evolução das fases da Taxonomia SOLO (Biggs e Collis, 1982) que, como discutimos em seção anterior, se baseia em princípios piagetianos para explicar a progressão do entendimento conceitual.

Nossa hipótese foi a de que os estudantes de licenciatura em matemática, depois de tratarem e compreenderem as indicações e questões nas tarefas, se familiarizariam com o *applet*

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

e, então, realizariam ações experimentais de forma geométrica e analítica (ver Quadro 1). Estas ações lhes ajudariam a relacionar a atividade com o efeito que surge ao modificar as representações geométricas por meio da expressão analítica e vice-versa. Os alunos também modificariam os arcos das funções e observariam as mudanças no período. Além disso, testariam vários exemplos para verificar suas hipóteses e conjecturar sobre as propriedades das funções.

Quadro 1: Processo hipotético de construção do conceito de periodicidade de funções

<table>
<tr><td colspan="5">PROJEÇÃO: relacionar e buscar
Concreto - simbólico</td></tr>
<tr><td colspan="3">Compreensão da tarefa e realização

Familiarização com o applet</td><td colspan="2">Informações: irrelevantes, relevantes, além das informações da questão
Nível Pré-estrutural</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ações de Generalização</td><td colspan="2">Generalização reflexiva</td></tr>
<tr><td>Nível uni estrutural, Multi estrutural ou relacional de modo Icônico</td><td>Nível Abstrato estendido do modo Icônico</td><td>Fase quantitativa ou aprendizagem superficial</td><td>Fase qualitativa ou aprendizagem profunda</td><td>Nível uni estrutural do modo formal</td></tr>
<tr><td>Nível
Pré-estrutural</td><td>Nível
Uni estrutural</td><td>Nível
Multi estrutural:</td><td>Nível
Relacional:</td><td>Nível
Abstrato Estendido:</td></tr>
<tr><td>Respostas inadequadas apresentando aspectos irrelevantes</td><td>Apresenta foco correto, contudo com poucas informações dos dados fornecidos</td><td>Inferência de propriedade do tipo analítico e do tipo geométrico relaciona propriedades do tipo genérico com expressão analítica</td><td>Generalização justificando as propriedades construção, antecipação e consolidação; estender, afirmar e definir sem ações de relacionar e buscar</td><td>Antecipação e consolidação; estender, afirmar e definir apoiada em ações de relacionar e buscar. Aplicação em novas situações em casos particulares</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelos autores

A partir destas ações, esperávamos que os alunos inferissem propriedades do tipo analítico e geométrico, ao relacionar as propriedades antes citadas e definidas coordenando as linguagens geométricas às analíticas.

Neste sentido, explicitamos a seguir cada uma das tarefas e o que esperávamos em consonância com a taxonomia SOLO.

✓ Tarefa 1. Caracterização da função trigonométrica

Esta tarefa teve como objetivo gerar um conjunto de registros sobre a relação entre a ação de modificar parâmetros relativos às funções seno e cosseno e o efeito produzido.

Para esta tarefa foi disponibilizado o software GeoGebra de forma que os licenciandos o exploraram livremente. Eles iam plotando e conjecturando as propriedades das funções trigonométricas seno e cosseno, observando suas expressões algébricas, comparando

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

graficamente o comportamento de ambas, conjecturando possíveis ligações entre elas e correlacionando as definições.

Consideremos a função seno do ângulo α, definida por sin α = y/r, num círculo trigonométrico de raio r=1. Então, temos sin α = y. A projeção de dois ângulos, por exemplo, $\alpha \in 1^{\circ}Q$ e $\beta \in 2^{\circ}Q$, tal que $\beta = \pi - \alpha$ (ou seja, β somado com α é π), é a mesma, isto é, $\sin\beta = \sin\alpha$, mas, para o ângulo α, a função seno ainda está em crescimento (ramo crescente), e para o ângulo β a função já está em decrescimento. Mas, para um ângulo $\alpha + 2\pi$, a função toma o mesmo valor que para o ângulo α, e também está em crescimento[1]. O mesmo se passa para outro ângulo $\beta + 2\pi$, relativamente a 2π. Ou seja, ao fim de uma volta completa os valores de seno repetem-se, e com a mesma monotonia no caso da função y=sin α. O mesmo se passa para a função cosseno: ao fim de uma volta completa (arco de 2π radianos), a função retoma os mesmos valores, e com o mesmo sentido de crescimento.

- ✓ Tarefa 2. Periodicidade e uma função

O objetivo da tarefa 2 foi associar o conceito de periodicidade de uma função trigonométrica conjecturando suas propriedades. Além disso observar que considerando as funções trigonométricas de domínio real, elas não são injetivas[2]. Para um determinado valor y da função trigonométrica existe uma infinidade de ângulos α possíveis, separados de um número inteiro de períodos da função trigonométrica original (2π no caso do seno, cosseno, secante e cossecante, e π no caso da tangente e cotangente). Desse modo, é necessário restringir o domínio, para definir a função inversa. De fato, porque uma aplicação não pode ter, para o mesmo argumento, dois valores distintos, há que restringir esta classe de aplicações a um domínio onde as funções trigonométricas sejam injetoras. Esse domínio deve também ser escolhido de forma que todos os seus elementos tenham imagem no contradomínio da função trigonométrica, isto é, os contradomínios das funções restringida e não restringida devem ser coincidentes. Por exemplo, sendo [–1; +1] o contradomínio da função *seno* – isto é, a imagem da aplicação da função a qualquer ponto do seu domínio cai sobre este intervalo –, deve-se escolher uma restrição do domínio da função real seno tal que os seus elementos representem todos os valores que é possível a função seno assumir e que caem no intervalo referenciado.

- ✓ Tarefa 3: estender o conceito de periodicidade.

[1] Observe: $\alpha + 2\pi$ corresponde a uma volta completa adicionada ao arco α, assim, a posição coincide com α.

[2] Para uma *função injetora*, qualquer reta horizontal r intercepta *uma única vez* o gráfico de uma função; numa *função não injetora*, existe *pelo menos uma reta* r que intersecta *duas ou mais vezes* o gráfico da função. As funções periódicas são não injetivas, em geral em intervalos de medida igual ou maior ao período da função.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

O objetivo da tarefa 3 foi que os alunos estendessem e fizessem inferências, relativas à periodicidade de uma função, generalizando as suas propriedades, fossem elas representadas na forma algébrica ou geométrica (no ciclo ou no gráfico cartesiano).

Para isso foi disponibilizado inicialmente um *applet* com o objetivo dos licenciandos investigassem posições de arcos no ciclo e seu correspondente gráfico. Supondo que assim eles começassem a movimentar o ponto P, tal que P=A, sobre a circunferência trigonométrica no sentido anti-horário até completar uma volta completa e o correspondente gráfico da função no plano cartesiano, poderiam observar propriedades. No *applet* o licenciando tinha a opção de movimentar o ponto P também pelo controle deslizante, como se pode observar no *applet* representado na figura 1.

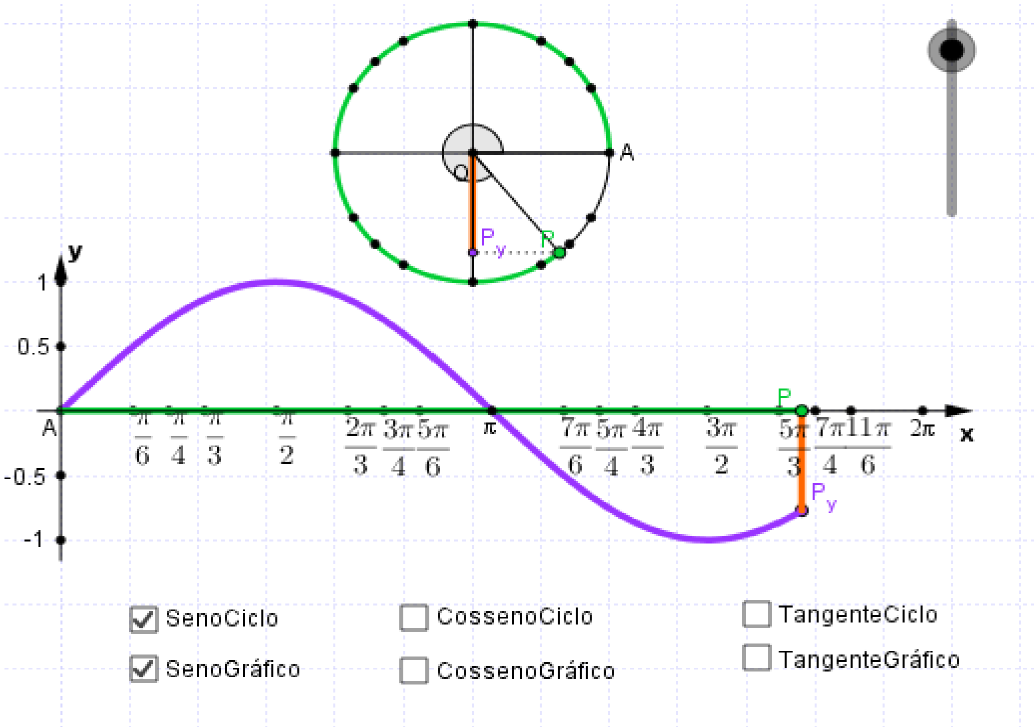

Figura 1: *Applet* com relações trigonométricas no ciclo e os gráficos correspondentes
Fonte: Acervo dos autores

Na mesma atividade os alunos receberam outro *applet* (ver Figura 2) com um recurso a mais, de forma a caracterizar e generalizar suas conjecturas e afirmações do conceito abordado.

Provocamos os estudantes com indagações do tipo: Como você explica o conceito de período em uma função? Qual estratégia pode ser utilizada a fim de proporcionar a construção do significado de periodicidade?

Os alunos poderiam modificar, por meio do recurso “controle deslizante” diversos parâmetros das funções e observar as modificações no gráfico de funções trigonométricas e, particularmente, observar em quais delas ocorreram mudanças de período. Além disso,

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

poderiam modificar a função habilitando a caixa “função” no *applet* e selecionando o tipo de função (seno, cosseno ou tangente)

Os estudantes receberam um protocolo em papel, contendo algumas funções trigonométricas na forma algébrica e, utilizando o *applet*, com o controle deslizante, deveriam plotar tais funções, explorando para cada uma delas qual a amplitude, o deslocamento vertical em relação, por exemplo, à função f(x)=sin x, o domínio e o período.

Neste novo *applet* o aluno tinha a opção de conjecturar também sobre o comportamento do período de uma função trigonométrica modular.

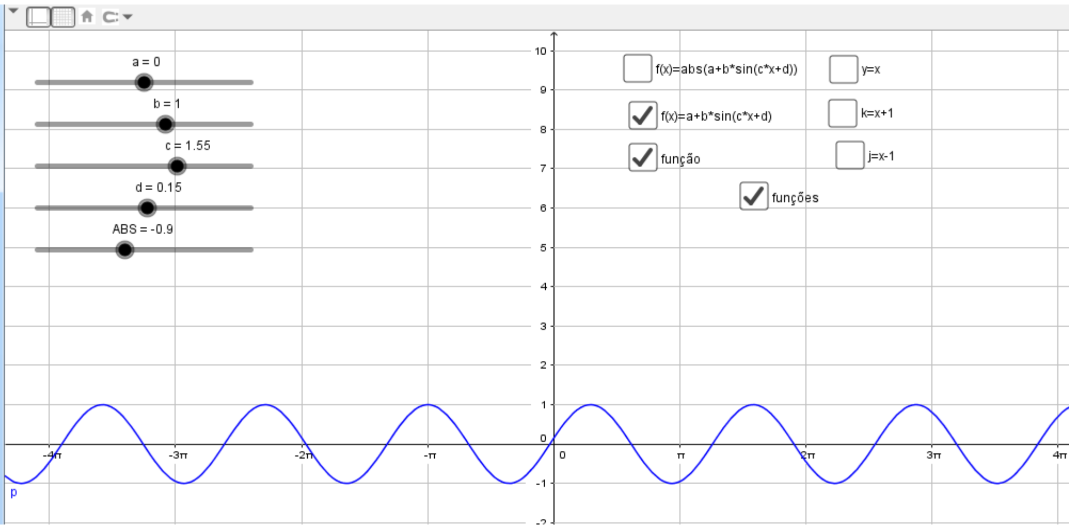

Figura 2: *Applet* para o estudo das funções trigonométricas, incluindo modulares
Fonte: Acervo dos autores

Vale ressaltar que uma função f: R→ R é periódica se existir um número real *t*, t>0, tal que $f(x+t)=f(x)$, para todo x do domínio. Ao menor número positivo *t* que satisfaz essa condição chamamos período fundamental da função.

Assim, por exemplo, a função $f(x)=\sin x$ é periódica, de período t=2π. Isto significa dizer que a curva obtida no intervalo [0,2π] vai se repetir a cada intervalo 2π.

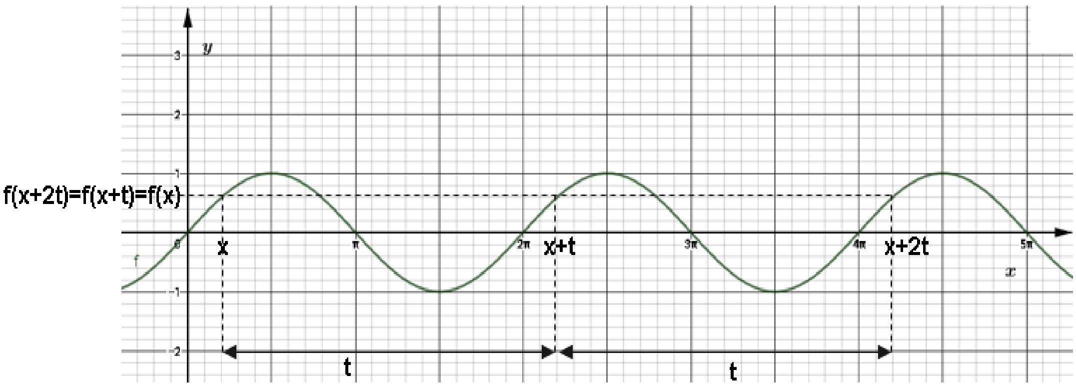

Figura 3: Valores particulares da função f(x)= sin x e a periodicidade
Fonte: Acervo dos autores

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

Ainda, podemos afirmar que em uma função periódica f, se t é um período para uma função f, então para qualquer valor de x do Domínio da função, têm-se

$$f(x) = f(x+t) = f(x+2t) = f(x+3t)$$

ou seja, o valor da função obtido para abcissa x se repete ao adicionar t, 2t, 3t, 4t,..., em x.

É comum utilizar a expressão *período* para designar o período fundamental. Assim, quando dizemos que 2π é o período da função $\sin x$, estamos nos referindo ao período fundamental, pois 4π, -4 π, 6 π, etc., são também períodos de $\sin x$. (Figueiredo, 1977, p.12). Isso porque, quando observamos o gráfico da função seno, por exemplo, a curva obtida no intervalo [0, 4π] se repete a cada intervalo 4π.

Generalizando temos ainda que, se k é um inteiro positivo, negativo ou nulo, podemos afirmar que $f(x+kt) = f(x+t) = f(x)$, sendo t o período fundamental

Este tipo de discussão não está no escopo das empreendidas com um aluno do Ensino Médio, entretanto é fundamental para um futuro professor de Matemática que atuará nesse segmento de ensino. Assim, a partir dos processos de reflexão sobre as ações ao estudar a periodicidade em diferentes funções, os licenciandos poderiam chegar a estender as definições e propriedades de uma função periódica às funções trigonométricas, entendendo que as funções trigonométricas são periódicas e quais são seus períodos. No experimento a intenção foi levar o aluno a chegar a esse nível de abstração, no caso, o nível Abstrato estendido.

No quadro 2 explicitamos e relacionamos as linguagens geométrica e algébrica selecionadas no experimento de ensino.

Quadro 2: Relação entre as linguagens matemáticas ao realizar as tarefas

Cenas	Linguagem Geométrica	Linguagem Algébrica	Ações relacionadas aos Estágios da Taxonomia
Tarefa 1: Caracterização da aplicação	Representação Geométrica da função seno e cosseno. A projeção de dois ângulos, por exemplo, α∈1ºQ e β∈2ºQ, tal que β = π – α	Representação algébrica de *f*(x)=sinx e *g*(x)= cos α = y/r, num círculo trigonométrico de raio r=1.	Digitar no software GeoGebra as funções trigonométricas para o seno e cosseno Observar os pontos do software
Tarefa 2: Definição da função seno x para círculo de raio 1	Projeção para o estudo da variação $\mathrm{f(x)} = \mathrm{y} = \sin x$ e $\mathrm{g(x)} = \mathrm{y} = \cos x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.	Representação plotada no software na janela algébrica do GeoGebra da Função trigonométrica e suas inversas	Verificar se existe periodicidade das funções trigonométricas e identificar se uma função trigonométrica é injetora.
Tarefa 3: Determinação do argumento das funções trigonométricas	Representação Geométrica Uma função f: R→ R é periódica de período *T* se $f(x+t) = f(x)$ para todo x.	Mostrar que a função é periódica se existir um número real *p*, p>0, tal que $f(x+p) = f(x)$, para todo x de seu domínio.	Movimentar sobre a circunferência um ponto P no sentido anti-horário até completar a tabela e o gráfico Identificar o argumento das funções trigonométricas

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

			Modificar os valores c e d no controle deslizante e observar mudanças de período das funções

Fonte: Elaborado pelos autores a partir da articulação dos tipos de linguagem Matemática

Estas generalizações podem ser expressas durante as ações ao realizar as tarefas, estas suturam a subfase de antecipação local (construção do conceito matemático) que transcende o conceito ao buscar a fase de antecipação (consolidação). Assim os estudantes poderiam estender algumas afirmações e definições apoiando-se nas ações de relacionar e estender. Os estudantes também poderiam estender algumas definições, tais como o conceito de periodicidade para outras funções trigonométricas além das propostas na investigação com os dois *applets*. Destacamos no quadro 3 os tipos de generalizações esperadas.

Quadro 3: Tipos de generalizações esperadas nas resoluções das tarefas

Tipos de generalizações	Tarefa: periodicidade
Relacionar	O pensamento geométrico sintetizando e utilizando a linguagem de figuras geométricas com suas representações gráficas e as de modo analítico, ou seja, objetos geométricos que expressam analiticamente a representação geométrica e vice-versa.
Estender	A partir de casos particulares, estender a casos gerais a relação entre o período de uma função seno expressado analiticamente e geometricamente.
Definir	Definir e conjecturar sobre as propriedades sejam elas algébricas ou geométricas.
Afirmar	Afirmar identificando as propriedades além dos casos particulares tais como, estender definições como o conceito de periodicidade para $0 \leq x \leq 2\pi$ em qualquer função trigonométrica.

Fonte: Acervo dos autores

As tarefas propostas no experimento de ensino nos permitiram estabelecer como os acadêmicos empregaram os conceitos de periodicidade de funções trigonométricas e como utilizaram as linguagens analítica e geométrica.

As gravações dos encontros com os alunos foram transcritas e as telas dos computadores capturadas para conhecimento das ações realizadas em cada cena, com o software e o *applet.*

4 Análise e Discussão dos Dados

Consideramos cada cena como uma unidade de análise e associadas ao tipo de ação, segundo a taxonomia de SOLO, seja de generalização ou o produto da generalização. Para isto as relacionamos com o Quadro 1 e aos tipos de generalizações esperadas na tarefa no Quadro 3.

Inicialmente analisamos se os estudantes se adaptaram ao software e ao *applet*. Observamos que com poucas instruções eles conseguiram plotar as expressões algébricas para

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

a função trigonométricas na barra de comando do software e sem dificuldades geraram as representações algébrica e a geométrica para as funções seno e cosseno.

Para analisar as respostas dos alunos dadas nas tarefas sobre periodicidade, seguimos Biggs e Collis (1982) e utilizamos a Taxonomia que leva em conta os dois tipos de aprendizagem: a superficial – ligada à reprodução de detalhes do conteúdo – e a profunda – ligada a um entendimento intrínseco do conteúdo, que permite estabelecer analogias, extensões, abstratos e conexões com os conhecimentos prévios.

Nesta análise o objetivo foi o de identificar o tipo de pensamento exibido pelas respostas de estudantes, submetidos às tarefas sobre o conteúdo periodicidade de funções trigonométricas.

Os autores, a partir das respostas dos alunos descreveram níveis de entendimento do pensamento do aluno, tais níveis podem ser descritos de maneira abstrata e genérica da seguinte forma: Para a discussão dos níveis SOLO de acordo com o diálogo dos estudantes nas operações, o tipo de raciocínio envolvido na resposta e como são estabelecidas as conclusões (uma conclusão já muito experimentada em aula, uma reprodução de uma generalização realizada anteriormente ou trata-se de uma generalização inédita). Analisamos se a resposta é de nível de complexidade adequada ao ano de escolaridade, se é fechada ou não fechada, se é única ou se existe a possibilidade de mais do que uma resposta e, nesse caso, se estas são, ou não, do mesmo tipo.

Quadro 4: Tipos de categorias e respostas esperadas nas tarefas

Categorias	Conhecimento	Operações	Respostas
Abstrato Estendido	Identifica informações relevantes: envolve a elaboração de hipóteses de trabalho. Os conhecimentos envolvidos são de grau adequado ou superior ao nível de escolaridade e estão relacionados entre si.	Os raciocínios são de caráter indutivo e/ou dedutivo. São estabelecidas generalizações imediatas.	Respostas de caráter aberto que permitem diversas alternativas para a solução. Na resolução da questão surgem diversas soluções possíveis.
Relacional	Identifica informações relevantes para que os conhecimentos envolvidos se adequem ao nível de escolaridade. Estabelece relações entre os conhecimentos	Os raciocínios são de caráter dedutivo e/ou indutivo. Há generalização semelhante às já existentes no intelecto.	Respostas únicas ou do mesmo tipo de processo na resolução da tarefa; As inconsistências sugeridas dentro do sistema são resolvidas.
Multiestrutural	Identifica operações relevantes para os conhecimentos envolvidos na resolução de grau adequado ao nível de escolaridade sendo utilizado de forma isolada.	Os raciocínios são de caráter indutivo e/ou dedutivo semelhantes a outros a experimentados. As conclusões também são semelhantes as já experimentadas.	Respostas do mesmo tipo e únicas. As inconsistências sugeridas dentro do sistema proposto são resolvidas, e podem sugerir processos de resolução alternativo.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

Uni-estrutural	Informações fornecidas no enunciado são suficientes para a resolução não necessitando a discriminação mais detalhada dos elementos e estão no nível adequado de escolaridade.	Os raciocínios são de caráter indutivo ou dedutivo, sendo que as conclusões são semelhantes as já existentes em termos de um único conhecimento.	Respostas sempre do mesmo tipo Não sugerem processos de resolução alternativa.
Pré-estrutural	Apresenta conhecimentos inferiores ao nível de escolaridade e utiliza o senso comum podendo ter ou não ter ligação com o conhecimento matemático.	Não se identifica o tipo de raciocínio ou generalização.	Respostas únicas ou do mesmo tipo e dentro do sistema envolvido sem complexidade.

Fonte: Acervo dos autores

A grelha de análise é aplicável a qualquer nível de escolaridade, desde que se tenha em consideração que os conceitos e conhecimentos a que nos referimos em cada caso são os estabelecidos para o ano de escolaridade pelo programa em vigor ao momento e que as operações envolvidas são as próprias do desenvolvimento cognitivo dos alunos submetidos à realização das tarefas.

Melhorias e correções podem ser introduzidas durante a análise de novas questões, já que o grupo de investigação sente a existência de algumas debilidades que ainda não foi possível resolver nos parâmetros Operações e Resposta. Observamos que no caso das operações identificamos que o raciocínio é do tipo dedutivo ou indutivo, e se a resposta envolve algum tipo de generalização, distinguindo as que são inéditas por nunca terem sido experimentadas em aula, das que são idênticas a outras já realizadas e recomendadas pelo programa.

Por fim, categoriza-se a questão formulada por cada um dos itens, tendo como suporte o quadro acima – *Resumo dos critérios estabelecidos para definir as diferentes categorias deste modelo de análise* – construído para o efeito com base na Taxonomia SOLO e que se utiliza para a análise de dados.

Na modelação das ações dos estudantes no experimento de ensino, cujo o objetivo foi de investigar nas respostas dos alunos na realização das tarefas se havia referência no diálogo e se estabeleciam a compreensão do conceito de periodicidade de uma função trigonométrica com um indicador completo de informações generalizadas sobre o processo de construção, a descrição abaixo de um dos alunos na resolução da tarefa I, nos permite entender a situação quando tenta entender os passos de uma interiorização do conceito.

> Aluno: Seremos capazes de encontrar a forma algébrica disto?
> <referindo-se ao gráfico plotado e a expressão algébrica anotada em seu caderno>
> Professor: Sim movimente o ponto P no ciclo e observe o comportamento do gráfico ao lado.
> Aluno: Seria isto mesmo? O Período é o intervalo da função aqui! Que na circunferência é 2π, e no gráfico está em “x”. E aqui vejo que a hora que o ponto p chega em 2π no ciclo o período também se completa.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

O discurso de generalização do aluno, coloca em um momento particular e geral para o conceito. Sua estratégia é a de usar as anotações para criar o contexto no *applet* ao qual pode conjecturar as observações geométricas no gráfico observando o ciclo, podemos interpretar que o aluno provoca uma interiorização do conceito de periodicidade, e segundo a taxonomia de SOLO ele relaciona e identifica informações relevantes para que os conhecimentos envolvidos, apresentando um pensamento de grau adequado ao nível de escolaridade do mesmo, relacionando os conhecimentos entre si, assim sendo apresenta um tipo de pensamento característico da categoria Multiestrutural.

No segundo *applet,* (figura 2) descrevemos a generalização realizada pelo mesmo aluno ao realizar as ações na resolução da tarefa 3. O excerto abaixo evidencia que o aluno discrimina várias características do gráfico em relação ao plano cartesiano, mas em um primeiro momento não consegue relacionar as definições conceituais estudadas no ciclo trigonométrico com as funções trigonométricas, mesmo considerando que na taxonomia SOLO poderíamos estabelecer algumas distinções na resposta.

> Aluno: Bom, agora este ao habilitar as funções vejo que posso modificar tanto o período como a amplitude. A única dúvida é como vou transportar as definições aqui?
> <. Referindo-se as definições para o argumento das funções trigonométricas, à medida que alterava os valores c e d no controle deslizante>.
>
> Quando movimento o controle deslizante ao habilitar as caixas para funções trigonométricas "não altera em nada o período só sobe e desce.
> <. Referindo-se ao deslocamento vertical do gráfico em relação ao eixo y (abscissas) >
> E quando movimento o "d" também não altera, mas há um deslocamento no eixo x.

As observações realizadas pelo aluno evidenciam que ele foi capaz de adiantar-se aos resultados nos casos possíveis das funções seno e cosseno, na realização da tarefa 1. Isso, ao gerar um conjunto de registros sobre a relação entre a ação de modificar parâmetros relativos às funções seno e cosseno e o efeito produzido ao movimentar os parâmetros "a" e "d" em cada função trigonométrica.

O processo de construção no primeiro diálogo o estudante foi do nível Relacional a partir das figuras geométricas plotadas no gráfico, realizando verbalizações e interações para resolver a tarefa. No segundo diálogo se caracterizou a participação do aluno no contexto da manipulação do Ponto P do gráfico e conjecturar (validar as propriedades), neste sentido a taxonomia, nos forneceu subsídios para interpretar as respostas dos estudantes no entendimento das tarefas.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

Na tarefa 3 procuramos identificar se os estudantes utilizaram corretamente as definições algébricas para validar e conjecturar o conceito de periodicidade em uma função trigonométrica. Para esta tarefa os licenciandos utilizaram também o segundo *applet.*

Ao longo das análises dos dados, encontramos falas semelhantes às feitas pelo aluno nos extratos acimas quer noutras atividades, quer envolvendo as funções trigonométricas, o que seria de se esperar, que os fenômenos de maturação e o desenvolvimento continuado do ensino a partir das tarefas provocasse aumento nas habilidades, reforçando-se a hipótese de se tratar de situações em que os alunos demonstram desempenho pontual e não suas capacidades globais.

Observamos que no experimento de ensino sobre periodicidade em um entorno tecnológico os alunos utilizaram nas tarefas a linguagem analítica e a geométrica mesmo quando as essas se tornaram mais complexas, com maior nível de dificuldade.

Um dos fatores relevantes para a aprendizagem propiciado pelo experimento de ensino, foi entendermos que a construção do conceito de periodicidade pelo estudante se manifesta quando há evidências no processo de resolução da ação de se *estender*, apoiada por aquelas de se *relacionar* e *buscar*, o que resulta em afirmações e definições que mostram a coordenação interna (Duval, 2008) entre a representação analítica e geométrica de tal noção. A consolidação surge quando a ação de extensão, afirmações e definições não são suportadas por outras ações.

As tarefas do experimento de ensino, em momentos diferentes nas ações, apresentaram coordenação dos dois sistemas semióticos: o analítico e o geométrico, com características comuns que indicam que a construção de um conceito é um processo progressivo de extensão a novas situações e de coordenação entre diferentes sistemas semióticos.

A análise permitiu constatar que a atividade dos alunos em contexto tecnológico, integrando diferentes representações inter-relacionadas, ajudou os alunos a avançarem na construção do conceito de periodicidade de funções trigonométricas, de forma que a interação e o dinamismo das ações de relacionar, buscar e estender facilitaram a coordenação interna entre as representações analíticas e geométricas. Tais fatores foram relevantes para a aprendizagem de conceitos de funções trigonométricas.

A investigação confirmou que o uso simultâneo de representações geométricas e algébricas dinâmicas em atividades interativas podem auxiliar a avançar na compreensão e na construção de conceitos matemáticos.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61915

Referências

Amantes, A., & Borges, O. (2008). Uso da taxonomia SOLO como ferramenta metodológica na pesquisa educacional. In: VI Encontro Nacional De Pesquisa Em Educação Em Ciências. Florianópolis. *Anais.* Belo Horizonte: FAE\UFMG, 2008. v. Único. p. 1-12. <http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/vienpec/CR2/p678.pdf>

Bass, H., (1998). *Research on university-level mathematics education:* (Some of) what is needed, and why? Pre-Proceedings of the ICMI Study Conference on the Teaching and Learning of Mathematics at University Level.

Biggs, J., & Collis, K. (1982) *Evaluating the quality of learning: the SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

Brasil. (1998). *Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais:* Matemática. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2000). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**.** *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio:* Parte III: Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias, Brasília: MEC/SEM.

Brasil. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, v. 2, p 67-98.

Brito, A. J., & Morey, B. B. (2004). *Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental.* Horizontes, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 65-70.

Coob, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, v.32, n.1, p. 913.

Dreyfus, T., Hillel, J. & Sierpinska, A. (1998). *Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The Case of Linear Transformations.* Paper presented at the first Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME–1). http://www.fmd.uniosnabrueck.de/ebook/erme/cerme-1proceedings/papers/g2-dreyfus-et-al.pdf . Acesso em 12/09/2017.

Duval, R. (1998) *Geometry from a cognitive point of view.* En C. Mammana and. Villani (eds.) Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st century (37-51). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Figueiredo, D.G. (1977). Análise de Fourier e equações diferenciais parciais. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e aplicada, CNPQ.

Figueiredo, S. A de. (2015). *Formação Inicial de Professores e a Integração da Prática Como Componente Curricular na Disciplina de Matemática Elementar*. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo.

Gilsdorf, M. A. (2006). *Comparison of rational and classical trigonometry*. http://web.maths.unsw.edu.au/~norman/papers/TrigComparison.pdf, March.

Lagrange, J.B. & Artigue, M. (2009). Students' activities about functions at upper secondary level: a grid for designing a digital environment and analysing uses. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.), Proceedings of 33rd *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Thessaloniki, Greece: PME.

Lindegger, L. R. M. (2000). *Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo, uma proposta a partir da manipulação de modelos.* Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Lobo da Costa, N. M. (1997). Funções Seno e Cosseno: Uma sequência de ensino a partir dos contextos do "Mundo Experimental" e do Computador. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Lobo da Costa, N. M. (2004) Formação de Professores para o ensino da Matemática com a informática Integrada à prática Pedagógica: exploração e análise de dados em bancos computacionais. Tese (Doutorado em Educação: Currículo). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Maschietto, M. (2008). Graphic Calculators and Micro-Straightness: Analysis of a Didactic Engineering. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13(3), 207-230, doi: 10.1007/s10758-008-9141-7.

Orfão, R. B. (2012) *Professores de Matemática em um Grupo de Estudos: Uma Investigação Sobre o uso de Tecnologia no Ensino de Funções Trigonométricas.* Dissertação (Mestrado Acadêmico) – Universidade Bandeirante de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

Piaget, J. (1977). Studies in Reflecting Abstraction. Sussex: Psychology Press.

Sierpinska A. (1992) On understanding the notion of function. In: Dubinsky E., Harel G. (eds.) *The concept of Function*. (MAA Notes Vol. 25, 25-59). Mathematical Association of America.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 26, No. 2, 114-145.

Simon, M. A., Tzur R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning,* 6(2), 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. & Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 305-329.

Soto, E. (2002). *Comportamento Organizacional: O impacto das emoções*. 1. ed. Pioneira: São Paulo.

Wildberger, N. (2005). *Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry.* Em http://wildegg.com. 300pp.

Thiollent, M. (1994). *Metodologia da Pesquisa-Ação nas Organizações.* 6ª edição Ed. Cortez. São Paulo.

Tzur, R. (1999). An Integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30 (4), 390-416.

Submetido em: 08/03/2019
Aceito em: 11/06/2019