ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

O Campo Conceitual Da Média Aritmética: Uma Primeira Aproximação Conceitual

The Conceptual Field Of Arithmetic Media: A First Conceptual Approach

Irene Mauricio Cazorla*
Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)
Eurivalda Ribeiro dos santos Santana**
Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)
Miriam Cardoso Utsumi***
Universidade Estadual de Campinas – (UNICAMP)

Resumo

A média aritmética é uma das medidas resumo mais importante da Estatística e aparentemente é um conceito prosaico, porém para sua apropriação é preciso explicitar sua complexidade, tanto do ponto de vista de seu significado, quanto da rede de conceitos, propriedades, representações e multiplicidade de situações nas quais ela pode ser encontrada e situações nas quais requer cuidados para sua utilização. Neste trabalho apresentamos uma primeira aproximação do campo conceitual da média aritmética, ancorados na Teoria dos Campos Conceituais, a partir da sistematização dos resultados das pesquisas envolvendo este conceito. Esta aproximação se limita ao conceito de média aritmética no campo empírico e não envolve a média de variáveis aleatórias, pois o foco é servir de base para seu ensino na Educação Básica. Assim, explicitamos a rede de conceitos, operações e propriedades que formam os Invariantes (I); as Representações (R) (verbal, numérica, algébrica, gráfica e pictórica), bem como as Situações (S) que dão sentidos diferenciados ao conceito. Distinguimos três classes de média: a simples que implica na soma de todos os valores dividido pelo número de dados; a agregada, quando não se conhece os valores originais, mas apenas o todo e, nesse caso, recorremos a razão entre duas grandezas e a média ponderada. Na média ponderada distinguimos três subclasses, a média ponderada genuína, onde os pesos são resultado de valoração; a média ponderada pela frequência com dois tipos, valores pontuais e marca de classe; e, a média ponderada para encontrar a média geral a partir de médias parciais.

Palavras-chave: Campo conceitual, Média aritmética, Educação Básica.

* Doutor em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora Plena da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, Bahia, Brasil. E-mail: icazorla@uol.com.br.
** Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Professora Titular da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, Bahia, Brasil. E-mail: eurivalda@hotmail.com.
** Doutor em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, São Paulo, Brasil. E-mail: mutsumi@unicamp.br.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

Abstract

The arithmetic mean is one of the most important summary measures of Statistics and, apparently is a prosaic concept, but for its appropriation it is necessary to make explicit its complexity, both from the point of view of its meaning, and from the network of concepts, properties, representations and multiplicity of situations in which it can be found and situations in which it requires care for its use. In this work we present a first approximation of the conceptual field of the arithmetic mean, anchored in Conceptual Field Theory, from the systematization of research results involving this concept. This approach is limited to the concept of arithmetic mean in the empirical field and does not involve the mean of the random variables, because the focus is to serve as the basis for their teaching in Basic Education. Thus, we explain the network of concepts, operations and properties that make up the Invariants (I); Representations (R) (verbal, numerical, algebraic, graphical and pictorial), Situations (S) which give different meanings to the concept. We distinguish three classes of media: simple one that implies in the sum of all the values divided by the number of data; the aggregated mean, when the original values are not known, but only the whole and in this case, we resort to the ratio between two quantities and, the weighted mean. In the weighted mean, we distinguish three subclasses: genuine weighted mean, where the weights are the result of valuation; frequency-weighted mean with two types, point values and class mark; and, the weighted mean to find the general mean from the partial mean.

Keywords: Conceptual Field, Arithmetic Mean, Basic Education.

1 Introdução

A maioria das pessoas já ouviu falar da média aritmética, lida com este conceito de forma bastante familiar e intuitiva e está acostumada a estimar a média em diversas situações do seu cotidiano, como por exemplo, tempo médio que demora para chegar ao trabalho. Para chegar a essas estimativas, ninguém anotou sistematicamente os dados, somou e dividiu pelo número de dados (Cazorla, 2003). Na escola, a média também faz parte da vida dos estudantes, pois para ser aprovado em uma disciplina ele tem que atingir a média ou a soma de pontos nas avaliações e, muitos dos estudantes vivem aplicando as propriedades da média para saber quanto devem obter em uma avaliação específica para "alcançar" a média. A média também é muito utilizada na comunicação de importantes indicadores económicos e sociais, como por exemplo: "renda per capita", "expectativa de vida", "taxa de fecundidade".

O seu ensino na Educação Básica, dentro do bojo do ensino de Estatística, foi oficializado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para os dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental - PCN, ainda em 1997 (Brasil, 1997) e ratificado na Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental – BNCC (Brasil, 2017).

O reconhecimento da importância da Estatística na formação do cidadão, em nível mundial, fez com que os países recomendassem seu ensino na Educação Básica (Batanero,

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

2000). A sua inserção no Brasil impulsionou uma área de pesquisa denominada Educação Estatística, preocupada com os processos envolvidos no ensino e na aprendizagem dos conceitos estatísticos (Lopes, Coutinho & Almouloud, 2010). Da mesma forma, os autores dos livros foram aprimorando a apresentação deste conceito ao longo dos diversos anos escolares, embora geralmente concentrado em um ano escolar (Carvalho, 2011).

Na escola, os professores têm implementado o ensino de Estatística de acordo com as possibilidades fornecidas pela sua formação inicial; porém os cursos de Licenciatura, que formam os futuros professores de Matemática, parecem não ter ampliado substancialmente o tempo dedicado ao ensino de Estatística como mostrado por Viali (2010).

Assim, após mais de duas décadas da inserção do ensino de Estatística na Educação Básica, nos propomos a realizar um estudo documental das dissertações e teses publicados no Brasil e artigos que serviram de base para esses trabalhos, mais especificamente, os trabalhos liderado por Batanero (2000), nos últimos 20 anos, com relação à média aritmética e a partir desses resultados propomos uma primeira aproximação para o campo conceitual da média aritmética, ancorados na Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1990, 1994 e 1996), esquadrinhando os conceitos, operações, propriedades, representações e situações a fim de apresentar as Situações (S), Representações (R) e Invariantes (I) desse conceito.

Observamos que neste estudo focaremos nos trabalhos que ampliam aspectos do campo conceitual da média, bem como, nos deteremos apenas nos aspectos deste campo e não trataremos da Mediana e nem da Moda, porque, tanto a mediana, quanto a moda são estatísticas mais restritas em termos de propriedades e construindo o campo conceitual da média, o campo das medidas de tendência central (Média, Mediana e Moda) será uma extensão deste. Além disso, esta proposta se limita ao conceito de média tratado na Educação Básica, portanto não se tratará da esperança matemática, que é a média de variáveis aleatórias, nem outros aspectos da média que são objeto de estudo do Ensino Superior.

2 A Teoria Dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria cognitivista que foi desenvolvida pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud, a qual “visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas” (Vergnaud, 1996, p. 155).

Desta forma, a TCC interliga o saber, o professor e o estudante possibilitando ao professor identificar em quais aspectos pode dar maior atenção, principalmente em suas práticas

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

pedagógicas. Além disso, esta teoria não foi desenvolvida especificamente para o ensino da Matemática, mas teve como ponto de partida os conteúdos relacionados às estruturas aditivas e multiplicativas, as relações número-espaço e da álgebra (Vergnaud, 1996).

Segundo Vergnaud, uma única situação, por mais simples que seja, engloba mais de um conceito, por isso, não faz sentido falarmos em apenas um conceito, e sim, em um campo conceitual. Podemos definir um campo conceitual, de acordo com Vergnaud (1983, p. 127), como sendo "um conjunto de problemas e situações para o tratamento necessário de conceitos, procedimentos e representações de diferentes tipos, mas estritamente interligados".

Desta forma, para que ocorra a apropriação de um conceito, é necessário que exista uma interação entre as situações nas quais o conceito está envolvido, o que possibilitará ao estudante aprimorar não só um único conceito, mas se apropriar de uma variedade de conceitos nas situações que ele for envolvido.

Segundo Vergnaud (1996, p. 156), um conceito "não pode ser reduzido à sua definição, pelo menos quando nos interessamos pela sua aprendizagem e pelo seu ensino". No mesmo sentido concordamos com Santana (2010, p. 31), sendo o conceito "a formulação de uma ideia através das palavras e do pensamento. E a definição, como o ato de determinar a extensão e os limites de um objeto ou assunto".

Além disso, como afirmado por Santana (2010), "um conceito não tem sentido em si mesmo, mas adquire sentido quando está envolvido numa situação-problema a ser resolvida" (p. 32). Assim, a compreensão de um conceito, por estudantes ou professores, não ocorre quando confrontados com uma única situação-problema, mas é adquirida por meio de situações teóricas ou práticas, que possibilitem mobilizar outros conceitos e propriedades para solucioná-las.

Nesta teoria, Vergnaud (1996), considera que um conceito é uma terna de três conjuntos, que podemos representar simbolicamente por C = (S, I, R).

> S é o conjunto de situações que dá sentido ao conceito (a referência). I, o conjunto dos invariantes nos quais se assenta a operacionalidade dos esquemas (o significado). R, conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante). (Vergnaud,1996, p. 166).

Para Vergnaud (1996), o conceito de situação envolve duas ideias principais:

> 1) ideia de variedade: existe uma grande variedade de situações num dado campo conceptual, e as variáveis de situação são um meio de gerar, de forma sistemática, o conjunto das classes possíveis;
>
> 2) ideia de história: o conhecimento dos alunos é formado pelas situações com

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

> que eles se deparam e que progressivamente dominam, nomeadamente pelas primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que lhes pretende ensinar. (Vergnaud, 1996, p. 171).

Com relação a ideia de variedade, em um campo conceitual, está relacionada a uma variedade de situações que podem ser organizadas sistematicamente, por meio de classes, procurando dar sentido ao conceito, isto é, a variedade é inerente ao conceito. E, a ideia de história, os estudantes vão se apropriando dos conceitos e procedimentos, historicamente e progressivamente, ou seja, são as situações que os estudantes já dominam, isto é, a história é inerente ao conhecimento que o estudante possui.

De acordo com Vergnaud (1996) há duas classes de situações,

> 1) classes de situações para as quais o sujeito dispõe, no seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
>
> 2) classes de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso. (Vergnaud, 1996 p. 156).

A primeira refere-se às situações, que o sujeito ao ser submetido, utiliza das competências e habilidades já dominadas para a sua resolução, em outras palavras, podemos dizer que são as classes de situações que o sujeito já dominou e as utiliza para solucionar determinadas situações. A segunda, refere-se às situações em que o sujeito não dispõe, naquele momento, de competências e habilidades, por isso requer do indivíduo maior tempo de reflexão e tentativa, levando-o ao acerto ou não.

Com esses pressupostos em mente analisamos como os autores apresentam a média aritmética e quais conceitos, propriedades, operações, representações e situações são trabalhados, visando sua sistematização e apresentar uma primeira aproximação do campo conceitual da média aritmética.

3 A Média Aritmética E O Que Já Foi Investigado Sobre Ela

A partir daqui, denominaremos a média aritmética simplesmente como média. Podemos definir a média como um número ($\bar{X}$) que resume um conjunto de dados e o representa (Mokros & Russell, 1995). Pela sua construção, ela representa o centro de gravidade do conjunto numérico, é o único número que está mais próximo de todos os números que ela representa. Matematicamente, apresentamos sua representação algébrica:

$$\sum_{i=1}^{n}(xi-\bar{X})=0$$

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

$$\sum_{i=1}^{n}(xi - \bar{X}) = \sum_{i=1}^{n} xi - \sum_{i=1}^{n} \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} xi - n\bar{X} = 0$$

Logo: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$

Onde:

X: representa a variável em estudo;

x_i: representa o valor da variável em uma observação específica;

$\bar{X}$: lê-se X barra, representa a média de um conjunto de dados;

n: n minúscula, tamanho da amostra, representa o número de dados envolvidos no cálculo da média.

Como mencionado, Vergnaud (1996) considera que o conceito é uma terna (S, I, R). Dessa forma, visando determinar os potenciais invariantes operatórios do conceito de média, analisamos as propriedades deste conceito, nas quais pode se assentar a operacionalidade dos esquemas de resolução da situação, que segundo Strauss e Bichler (1988) são sete:

1) a média está localizada entre os valores extremos ($X_{min} \leq \bar{X} \leq X_{max}$);
2) a soma dos desvios a partir da média é zero ($\Sigma(x_i - \bar{X}) = 0$);
3) a média é influenciada por cada um e por todos os valores (média $=\Sigma\, x_i/n$);
4) a média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem;
5) a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física (por exemplo, o número médio de filhos por mulher é de 2,3);
6) o cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos;
7) a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada.

As três primeiras propriedades são consideradas propriedades estatísticas da média, da quarta a sexta são consideradas propriedades abstratas.

A média é de fundamental importância para a análise e compreensão do comportamento de um conjunto de dados e, apesar de ser vulnerável à influência de valores extremos, é sem dúvida a medida mais importante da Estatística Descritiva; além disso, a média serve de base de cálculo para outras medidas, tais como o desvio padrão, correlação, dentre outras.

4 O Que Já Foi Investigado Sobre O Campo Conceitual Da Média Aritmética

A seguir apresentamos a análise das dissertações, teses e artigos apenas nos aspectos relativos à média aritmética, visando encontrar subsídios para a construção do campo conceitual. Nesta análise não nos deteremos nos resultados de tais pesquisas.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

Batanero (2000) analisou o campo de problemas e atividades a partir do qual emerge o conceito de Média e as demais medidas de tendência central. A pesquisadora afirmou que a média tem um caráter complexo e podem ser identificados nela cinco tipos de elementos, a saber: os extensivos, que se referem aos campos de problemas de onde surge a média (como a melhor estimativa em medidas repetidas, divisão equitativa, como representante e como o valor provável); os actuativos, se referem às operações matemáticas envolvidas (adição, multiplicação e divisão); os ostentivos referentes às representações, os intensivos referentes às propriedades da média e os validativos referentes às demonstrações matemáticas das propriedades do conceito.

De acordo com a autora, as propriedades propostas por Strauss e Bichler (1988) estão nos elementos intensivos. Batanero apresenta a média simples, a Esperança Matemática (Média de uma variável aleatória) discreta e contínua; a média geral a partir da média de grupos e a ideia da média como a razão entre duas grandezas, como a renda per capita.

Cobo (2003) realizou um estudo sobre o significado e compreensão das medidas de tendência central, revisando livros do ensino médio e superior e as diretrizes curriculares do ensino médio espanhol. Também realizou um estudo experimental, onde participaram da pesquisa 312 estudantes do ensino médio que responderam um questionário contendo 15 questões envolvendo as medidas de tendência central. Além do campo de problemas já postulado por Batanero (2000), verificou as representações verbais, simbólicas (observe Figura 1) e numéricas.; com relação aos algoritmos e procedimentos, apresentou a média simples, ponderada, cálculo gráfico da média, inversão do algoritmo (dado um valor para a média, buscar a distribuição); quanto às definições e propriedades, mostrou a média como algoritmo para média simples e ponderada e as propriedades já postuladas por Strauss e Bichler (1988).

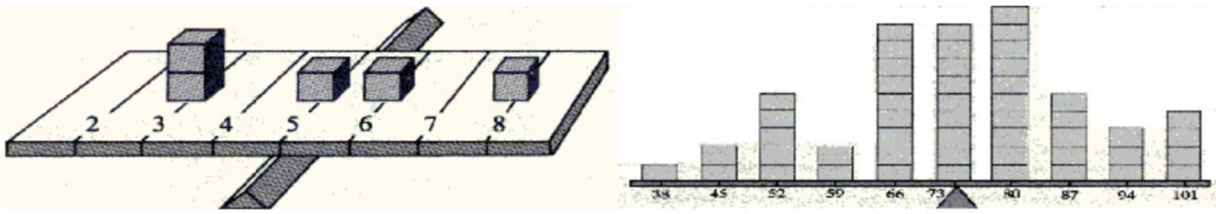


Figura 1: Representação da média como o fiel da balança
Fonte: Cobo (2003), p. 51.

Cobo e Batanero (2004a) afirmam que o problema da compreensão da média está intimamente ligado a como se concebe o conhecimento matemático. Os termos e expressões matemáticas denotam entidades abstratas cuja natureza e origem devem ser explicitadas para poder elaborar una teoria útil e efetiva para compreender tais objetos. As pesquisadoras

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

trabalharam com quatro problemas abertos a fim de avaliar a compreensão da média aritmética, com 53 estudantes do ensino médio. Os problemas exploravam: a) a média como operação; b) cálculo da média ponderada; c) a soma dos desvios em relação à média; e, d) obtenção de uma distribuição a partir de um valor dado para a média.

Em outra pesquisa, Cobo e Batanero (2004b) analisaram 22 livros didáticos do Ensino Médio relativamente aos problemas propostos, algoritmos, definições, propriedades, representações e argumentos, a fim de sistematizar os diversos aspectos que envolvem o conceito de média. Nesse trabalho fica explícita a média simples (dados isolados), a média a partir de uma Tabela de Distribuição de Frequência (TDF) de uma variável discreta e de uma variável contínua, o cálculo gráfico da média a partir da frequência relativa acumulada e, a média populacional (aquela que leva em consideração todos os elementos da população). Com relação às representações dos dados que originam a média as pesquisadoras listaram os dados isolados (brutos) apresentados sem formato; tabela de dados; TDF e de frequências acumuladas; tabelas de dados agrupados em intervalos de classe; diagramas de barras, histogramas, polígonos de frequências e polígonos de frequências acumuladas; curva de distribuição de frequência; diagrama da caixa e gráfico de ramo e folhas.

O estudo de Novaes (2004) envolveu variáveis discretas e contínuas, cujos dados foram convertidos em TDFs e foram calculadas médias utilizando a média "ponderada" para valores pontuais e valores em intervalos de classe. A pesquisadora teve como objetivo analisar a mobilização eficaz de conceitos estatísticos na resolução de problemas práticos, com 12 estudantes, de um curso de Tecnologia em Turismo, utilizando como subsídio teórico, a TCC.

Melo (2010) investigou como o conceito de Média Aritmética é compreendido por alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerando os diferentes invariantes, significados e representações, postulados por Strauss e Bichler (1988) e Batanero (2000), na perspectiva da TCC. Para isso elaborou dois testes, com sete questões equivalentes entre os invariantes e significados do conceito de média variando a representação do enunciado das questões: gráfico de colunas ou enunciado escrito. As variáveis trabalhadas foram discretas e contínuas, com o número máximo de cinco dados, todos os números inteiros e com ordem de grandeza pequeno. Melo trabalhou apenas com a média simples, a partir de dados brutos, envolvendo as propriedades da média.

Amaral (2010) e Lemos (2011) construíram uma sequência composta por dez questões, sete envolvendo a média, das quais três solicitavam o cálculo da média simples; outra solicitava o cálculo da média geral a partir de médias parciais; outra solicitava a média "ponderada" pela

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

frequência, de uma variável discreta, a partir de um pictograma; outra explorava as propriedades da média a partir do valor da média e do tamanho da amostra; outra de interpretação da média sem referente no mundo real e outra referente a análise da possibilidade de cálculo da média a partir de uma variável qualitativa, disposta em uma TDF.

Carvalho (2011) analisou como os livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático, abordavam a média. Ancorado na TCC, realizou uma pesquisa documental, analisando dez coleções de livros didáticos, cada uma com quatro volumes, totalizando 40 volumes. Com relação aos invariantes, o autor utilizou as propriedades propostas por Strauss e Bichler (1988); em relação aos significados, tomou como base os propostos por Batanero (2000). O pesquisador verificou que os autores dos livros didáticos apresentam: a) a média simples, a média ponderada "genuína" (quando os valores da variável são afetados por pesos diferentes) e a média "ponderada" pela frequência); b) a ideia da média como ponto de equilíbrio ou centro de massa, e a média como a razão entre duas grandezas, como a renda per capita; c) as representações dos dados envolvidos no cálculo da média em linguagem materna, gráfica e tabular, sendo a mais utilizada a língua materna, porém parece não ter detectado representações gráficas e pictóricas da média; d) seis das sete propriedades e verificou a presença de variáveis discretas e contínuas.

Novaes (2011) apresentou duas representações de média: a média no diagrama de pontos utilizando o triângulo como o fiel da balança e uma linha vertical. Zequim (2012), Alves (2016) e Araújo (2018) também estudaram diversos aspectos da média, sendo que o último utilizou o Geogebra e dados de uma variável composta "expectativa de vida", que por definição é uma média ponderada.

5 O Campo Conceitual Da Média Aritmética

A Estatística é uma ciência que tem como objetivo desenvolver métodos para coletar, organizar e analisar dados, objetivando resumi-los, de forma a compreender sua essência, tanto para descrevê-los, quanto para fazer previsões. Por essa razão, a Estatística faz parte do método científico, das áreas do conhecimento que lidam com dados empíricos.

Assim, a Estatística Descritiva ou Análise Exploratória de Dados disponibiliza procedimentos tais como: as tabelas estatísticas que nos permitem organizar os dados em um sistema matricial; os gráficos que nos permitem visualizar padrões ou relações e assim realizar descobertas, apresentando os resultados de modo simples; e, as estatísticas ou medidas resumo que sintetizam os dados em um ou poucos valores.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

Esses procedimentos, que acarretam uma variedade de conceitos, em geral se complementam, e sua utilização harmoniosa nos permite a extração e compreensão das informações subjacentes aos dados.

5.1 Os Invariantes (I)

Nesta seção detalhamos os conceitos relacionados à média. Todo fenômeno a ser investigado possui uma *população* a ela associada (elementos de onde se recolhe os dados). De acordo com o tipo de investigação, os dados podem ser recolhidos da população ou de uma *amostra* (subconjunto da população). Dos elementos da população (unidades populacionais ou amostrais) são selecionadas *variáveis* (características da população), que gerarão *dados* (quantificação ou qualificação da variável em um elemento da população ou amostra).

Assim, os conceitos de variável e de dados são chaves para a Estatística, pois são sua matéria prima. As variáveis medem ou descrevem as características da população em estudo, e podem ser qualitativas (geram categorias) como por exemplo, sexo, raça, região ou quantitativas (geram números) e, dentre estes, as discretas (resultado de contagem), como por exemplo número de filhos por mulher, número de pessoas de um país, ou as contínuas (resultado de mensuração), como por exemplo altura e peso (massa corpórea) de uma pessoa, renda familiar etc.

Essas variáveis recolhidas diretamente das unidades populacionais ou amostrais geram *dados brutos*, isto é, sem nenhum tratamento estatístico ou matemático. A partir das variáveis originais, como por exemplo a altura (A) e peso (P), podem ser criadas novas variáveis, que aqui denominamos "*compostas*", por exemplo o Índice de Massa Corpórea (IMC) que é uma razão entre as duas variáveis anteriores ($IMC = P/A^2$).

Também existem as *variáveis agrupadas*, que já sofreram tratamento estatístico, como por exemplo, a renda per capita, expectativa de vida, Índice de Desenvolvimento Humano (IDH), dentre outros. Em geral, essas variáveis são denominadas de índices e a unidade populacional ou amostral (de onde se coletam os dados) se referem a um coletivo de unidades populacionais. Por exemplo, a renda per capita é calculada por países ou regiões.

Esta distinção é importante para o cálculo da média, pois não se pode calcular a média simples da renda per capita dos estados brasileiros para se obter a renda per capita do Brasil, uma vez que o tamanho dos estados (Número de habitantes) varia substancialmente entre esses. Nestes casos, devemos utilizar a "média ponderada", como veremos mais adiante.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

Os dados brutos podem ser apresentados em lista, rol, planilhas, banco de dados, tabelas simples ou de dupla entrada, bem como em TDF. Já as variáveis agregadas, em geral, são apresentadas em tabelas estatísticas[1]. A TDF é um caso particular de tabelas estatísticas formada por uma variável (TDF simples) ou por duas variáveis, em geral uma quantitativa e uma qualitativa. Os dados brutos ou agregados, também podem ser apresentados em gráficos, de onde ainda pode ser calculada a média.

Para a construção da TDF para valores pontuais (discretas que tomam poucos valores, como número de filhos por mulher), basta colocar os valores acompanhados de sua *frequência absoluta* (f_i), que é o número de vezes que ocorre. Já em uma TDF em intervalos de classe, a f_i se refere ao número de dados contidos em cada intervalo de classe (como ilustramos nas Figuras 3 e 4 na seção 4.2.3). Para construir as classes de uma variável contínua precisamos da *Amplitude Total* (A), que é a diferença entre o valor máximo (*Máximo* ou X_{max}) e o valor mínimo (*Mínimo* ou X_{min}) da variável, que é particionada em k *classes*, que gerarão os *intervalos de classe*, em geral, com *amplitude de classe* (a) do mesmo tamanho. Outro conceito inerente à média ponderada é o peso ou ponderação definido por um número que exprime a importância ou valoração de cada valor pontual da variável.

Quanto às propriedades, já apresentadas na Seção 3, além das sete apresentadas por Strauss e Bichler (1988), adicionamos três propriedades algébricas, que ao nosso ver, compõem os invariantes.

8. a soma de todos os valores da variável é igual ao produto do número de observações (tamanho da amostra) pela média;
9. ao acrescer a todos os valores da variável um valor constante, a média fica acrescida dessa constante e,
10. ao multiplicar todos os valores da variável por uma constante, a média fica multiplicada por essa constante.

5.2 As Situações (S)

As *Situações (S)* mobilizam diferentes esquemas. Assim propomos três classes de situações: aquelas que abordam a média simples (soma dos valores divido pelo número de dados), a média agregada (quando não se conhece os valores individuais da variável, mas apenas a soma) e, a média "ponderada", quando os valores da variável tem "pesos" diferentes

[1] Uma tabela é uma organização matricial que contém dados. Ela é uma tabela estatística se os dados já foram tratados estatisticamente, como contagens, somas, médias etc., caso contrário é uma lista, um banco de dados.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

e, portanto é preciso ponderar. Neste último caso teremos ainda três subclasses que são: a média ponderada genuína, a média ponderada pela frequência e a média geral, como descrevemos a seguir.

Observamos que embora o esquema para a média ponderada seja igual para as três subclasses, a natureza delas é conceitualmente diferente. Na Figura 2 apresentamos a estrutura do campo conceitual para a média aritmética, que descrevemos logo a seguir.

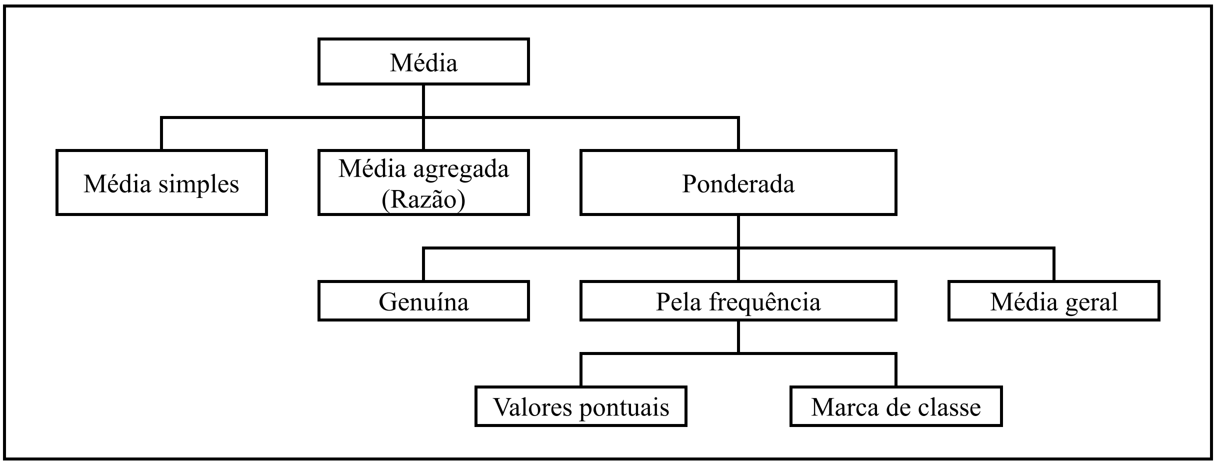


Figura 2: Estrutura do Campo Conceitual da Média aritmética.
Fonte: construção dos autores.

5.2.1 A Média Simples

Quando estamos diante de um conjunto de dados brutos, independentemente da forma em que esses dados estejam representados de forma verbal, em lista, tabelas, gráficos, o esquema a ser utilizado será somar os valores e dividir pelo número de dados, o que é denominado de média simples, cuja representação algébrica é:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 \ldots + x_n}{n}$$

Onde X representa a variável em estudo, x_1, x_2, ..., x_n, os valores que a variável toma no i-ésimo elemento e n é o número de dados ou observações, também conhecido como “tamanho da amostra”. A notação utilizada no Ensino Superior é $\overline{X}$ (lê-se “X barra”). Na Educação Básica, os livros didáticos têm utilizado a palavra “Média” ou simplesmente M.

Vejamos um exemplo: cinco crianças estão jogando bola de gude no pátio da escola. João tem cinco, Dara tem uma, Caio tem duas, Ivo tem seis e Lucas tem uma. Para iniciar o jogo Dara teve a ideia de juntar todas as bolas de gude e repartir o total igualmente entre todas as crianças. Com quantas bolas de gude cada criança ficou?

Neste exemplo estamos lidando com uma variável discreta “Número de bolas de gude

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

que cada criança tem", que está na linguagem verbal e que tem o sentido de média como "divisão em partes iguais".

$$\text{Média} = \frac{(5+1+2+6+1)\text{ bolas de gude}}{5\text{ crianças}} = 3\text{ bolas de gude/criança}$$

5.2.2 Média Agregada Ou Razão Entre Duas Grandezas

Este caso se aplica quando não conhecemos cada um dos valores da variável, os dados brutos, mas conhecemos a soma de todos os valores, como por exemplo, a renda per capita, que é calculada como a razão entre o Produto Nacional Bruto (PNB)[2] e o número de habitantes de uma região. No numerador temos a riqueza produzida nessa região e dividimos em partes iguais entre os habitantes daquele país. Este valor representa a *renda média por pessoa* daquele país.

$$\text{Renda per capita} = \frac{\text{Produto Nacional Bruto (PNB)}}{\text{número de habitantes}} = \text{valor monetário/pessoa}$$

De acordo com os dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) a renda per capita no Brasil, no ano de 2017, foi calculada em R$ 1.268,00 por mês. Observamos que aqui estamos utilizando a representação verbal.

5.2.3 Média Ponderada

Neste caso distinguimos três subclasses: a primeira que denominamos de média ponderada genuína, quando o peso ou ponderação é uma valoração; a segunda, onde a ponderação é a frequência com que ocorre cada valor ou faixa e portanto não é uma ponderação; e a terceira quando temos médias parciais e queremos calcular a média geral, recompondo as somas parciais dos grupos a partir do produto da média parcial pelo tamanho do grupo.

a) Média ponderada (genuína)

Muitas vezes, os valores da variável têm pesos ou ponderações diferentes, fruto de uma valoração, em geral, de cunho subjetivo. Devemos observar que este caso é típico de valores pontuais, que podem ser discretos ou contínuos, mas que em geral são poucos valores. Um exemplo clássico é o das notas nas disciplinas. Suponha que um estudante tenha quatro notas

[2]Para calcular o PNB é preciso usar o valor do PIB e tirar dele o valor dos produtos que são enviados para o exterior e acrescentar o valor recebido de empresas de fora do Brasil.

(1ª nota: 4,0; 2ª nota: 5,8; 3ª nota: 7,6 e 4ª nota: 6,2) e que o peso da segunda nota fosse o dobro da primeira, o da terceira o dobro da segunda e o da quarta o dobro da terceira, totalizando um peso de 15 (1 + 2 + 4 + 8). Logo, a média ponderada levará em consideração esses pesos (w_i) e sua representação algébrica é:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i * x_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i} = \frac{w_1 * x_1 + w_2 * x_2 \ldots + w_k * x_k}{w_1 + w_2 \ldots + w_k}$$

Onde k é o número de valores de X; x_i são os valores de X no ponto i e w_i são os pesos que ponderam cada valor de x_i.

Sua representação numérica é:

$$\bar{X} = \frac{1 * 4{,}0 + 2 * 5{,}8 + 4 * 7{,}6 + 8 * 6{,}2}{1 + 2 + 4 + 8} = \frac{4{,}0 + 11{,}6 + 30{,}4 + 49{,}6}{15} = \frac{95{,}6}{15} = 6{,}4$$

b) Média ponderada pela frequência

Neste caso temos dois tipos. O primeiro quando temos uma variável discreta que toma poucos valores (valores pontuais) e o segundo quando a variável é contínua ou discreta que toma muitos valores, nestes casos os valores são agrupados em classes.

b1) Variável discreta que toma poucos valores

Este caso se refere à variável discreta que toma poucos valores (x_i) e se encontra disposta em uma TDF ou em gráfico de barras, de pontos, de hastes ou pictograma que contém a frequência com que ocorre cada valor pontual (f_i). Em todos esses casos para encontrar a Média será necessário recompor a soma dos valores da variável, que será abreviada pelo produto dos valores pontuais da variável (x_i) pela frequência respectiva (f_i).

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i * x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i * x_i}{n}$$

Nesse sentido, a organização dos cálculos fica facilitada na TDF, onde podemos adicionar uma coluna para o produto do valor da variável (x_i) pela sua frequência (f_i), que gera somas parciais, como podemos ver no Quadro 1. Assim, no final da segunda coluna temos o número total de mulheres, que é o tamanho da amostra (n), e, na terceira coluna o número total de filhos que todas essas mulheres têm. Portanto, a Média é a razão entre essas duas grandezas: número de filhos e número de mulheres. Podemos proceder da mesma forma partindo de uma representação gráfica (Figura 3), onde o triângulo vermelho representa a média, no sentido do fiel da balança.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

Observamos que neste caso, não se trata de uma real ponderação, mas de uma abreviação de cálculos, isto é, ao invés de somar valores isolados, basta multiplicar os valores da variável pela sua frequência e somar para recompor o numerador.

Aqui é importante mencionar que o conceito "taxa de fecundidade" nasce deste cálculo. A diferença é que a taxa de fecundidade é calculada como o número médio de filhos que uma mulher teria durante sua vida reprodutiva.

Quadro 1: Exemplo de uma TDF para calcular a média de uma variável discreta que toma poucos valores

Nº de filhos por mulher (x_i)	Nº de mulheres (f_i)	Produto (somas parciais) (x_i*f_i)
0	30	0
1	37	37
2	20	40
3	9	27
4	8	32
5	1	5
6	0	0
7	1	7
Total	106	148
Média = 148/106 = 1,4		

Fonte: construção dos autores.

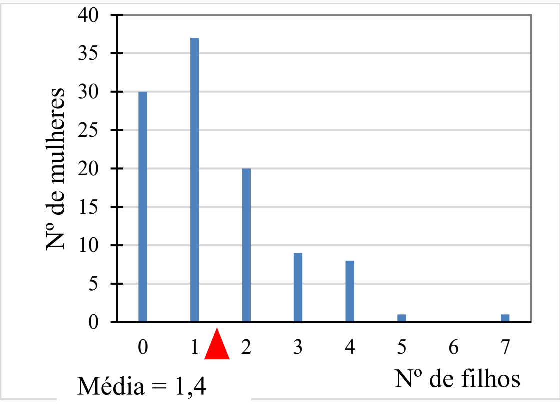


Figura 3: Diagrama de hastes do número de filhos por mulher.
Fonte: construção dos autores.

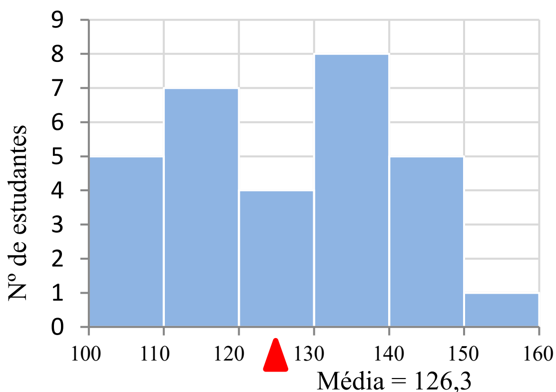
b2) Variável contínua, ou discreta que toma muito valores, agrupada em classes

Quando a variável é contínua (ou discreta que toma muitos valores) e seus valores estão em uma TDF, em classes (Quadro 2) ou em um Histograma (Figura 4), não se tendo mais os valores originais, utilizamos o mesmo esquema da média ponderada pela frequência, porém, a marca de classe x_i substituirá os valores originais da variável contidos naquele intervalo. Nesse sentido, a organização dos cálculos na TDF facilita seu cálculo e aproveitamos o histograma para representar a média com um triângulo vermelho como o fiel da balança. Observamos que esta média pode ser calculada utilizando a frequência relativa (h_i, em probabilidade), uma vez que hi = fi/n. Vejamos o exemplo do cálculo da média das alturas (em cm) de 30 estudantes:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i * x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i * x_i}{n} = \frac{3.790}{30} = 126{,}3$$

Quadro 2: Exemplo de uma TDF para calcular a média de uma variável agrupada em classes

Classes de altura (cm)	Marca de classe (x_i)	Nº de estudantes (f_i)	Produto (x_i*f_i)
100 |-- 110	105	5	525



ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

110 |-- 120	115	7	805
120 |-- 130	125	4	500
130 |-- 140	135	8	1080
140 |-- 150	145	5	725
150 ou +	155	1	155
Total	--	30	3.790
Média = 3.790/30 = 126,3			

Fonte: construção dos autores.

c) Média geral a partir de médias parciais

Este caso se refere quando estudamos uma variável em uma população que é dividida em grupos e queremos calcular a média geral a partir das médias parciais. Neste caso, o tamanho da população (*n*) é composto pela soma do tamanho dos grupos (n_i) e o valor da variável é formado pela média dos grupos.

$$\bar{X}_{geral} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i * \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{n_1 * \bar{x}_1 + n_2 * \bar{x}_2 \ldots + n_k * \bar{x}_k}{n_1 + n_2 \ldots + n_k} = \frac{n_1 * \bar{x}_1 + n_2 * \bar{x}_2 \ldots + n_k * \bar{x}_k}{n}$$

Onde: $\bar{x}_i$ é a média do grupo *i*; *k* é o número de grupos, n_i é o tamanho do grupo *i* e *n* é o tamanho da amostra geral, que é a soma do tamanho de todos os grupos:

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Vejamos o exemplo do problema do elevador. Suponha que há 10 pessoas no elevador, 6 mulheres e 4 homens. A média do peso das mulheres é de 60 kg, e a média do peso dos homens é de 80 kg. Determine a média do peso das 10 pessoas que se encontram no elevador.

Assim, podemos calcular a média geral a partir das médias parciais, onde a frequência é o tamanho do grupo e a média parcial é a média do grupo.

$$\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{geral}} = \frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \mathrm{n_i} * \bar{\mathrm{x}}_\mathrm{i}}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \mathrm{n_i}} = \frac{\mathrm{n_1} * \bar{\mathrm{x}}_1 + \mathrm{n_2} * \bar{\mathrm{x}}_2}{\mathrm{n_1} + \mathrm{n_2}} = \frac{6 * 60 + 4 * 80}{6 + 4} = \frac{360 + 320}{10}$$

$$\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{geral}} = \frac{680\ \mathrm{kg}}{10\ \mathrm{pessoas}} = 68\ \mathrm{kg/pessoa}$$

Aqui estamos aplicando a Propriedade 8 da Média, pois a soma dos valores de cada grupo é reconstituída ao multiplicarmos o número de dados pela média de cada grupo. Por essa razão, se a variável for a renda *per capita* (que é uma média), bem como a expectativa de vida (que é uma média ponderada), para encontrar a média geral, precisaríamos ponderar pelo tamanho do país ou região.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

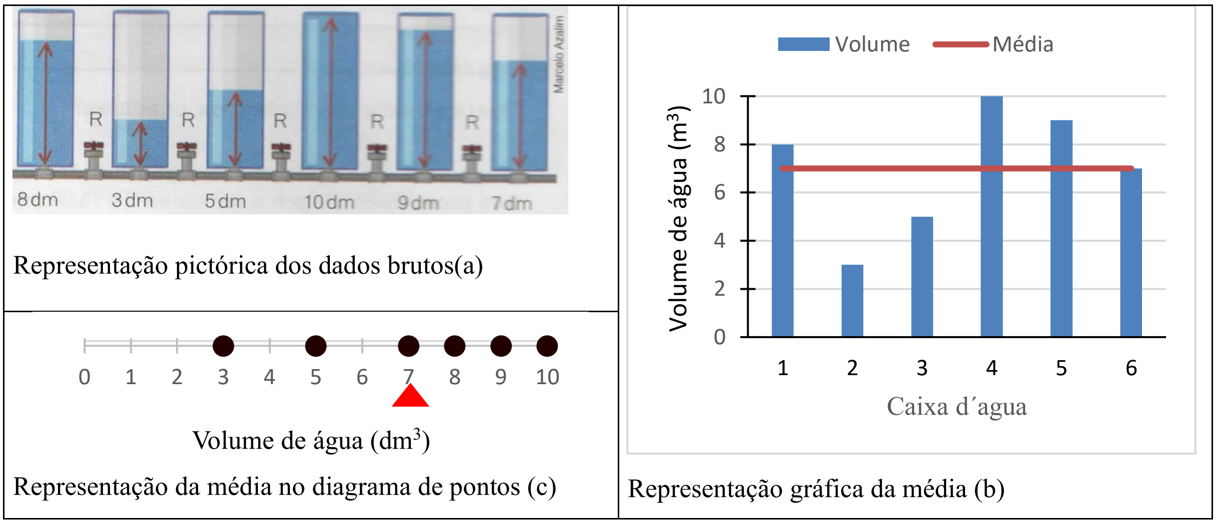
5.3 As Representações (R)

As *Representações* (R) são a forma como expressamos o conceito e suas relações. Segundo Vergnaud (1996, p.184), “[...] as representações simbólicas têm justamente a vantagem de auxiliar a resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas”.

As representações para a média são a verbal, a numérica, a algébrica, a gráfica e a pictórica. As três primeiras já foram apresentadas ao longo do texto. Aqui apresentamos a representação gráfica e pictórica, observando que a média é um único número.

Para isso, apresentamos o problema proposto no livro didático de Matemática, do 8º ano, por Andrini e Vasconcelos (2015, p. 142), referente ao volume de água em decímetros cúbicos em seis caixas-d’água cilíndricas iguais (8, 3, 5 , 10, 9 e 7 dm^3), assentadas no mesmo plano e ligadas por registros nas suas bases. Após a abertura de todos os registros, todas as caixas ficarão com o mesmo nível de água, que é o volume médio.

Na Figura 5 apresentamos os dados na representação pictórica utilizada pelos autores do livro didático (a), o gráfico de barras com a representação da média com a linha que “iguala” os valores da variável (b) e, o triângulo que representa o “fiel da balança” no diagrama de pontos (c). Assim, podemos ver que as caixas d´água 1, 4 e 5 perderão 1, 3, e 2 dm^3 respectivamente; as caixas 2 e 3 receberão 4 e 2 dm^3 respectivamente e a caixa 6 permanecerá inalterada. Neste caso estamos diante de uma média simples, com o significado de “divisão em partes iguais”.



Representação pictórica dos dados brutos(a)

Representação da média no diagrama de pontos (c)

Representação gráfica da média (b)

Figura 5: Representação dos dados de origem e da média simples
Fonte: Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2015, p. 142).

A média também pode ser uma variável, como por exemplo o tempo médio de estudo,

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

como mostramos na Figura 6 e embora o gráfico se destaque pela sua estética, o gráfico de barras simples é muito mais eficiente para transmitir a informação.

Na Figura 7 apresentamos uma representação pictórica da taxa de fecundidade (número médio de filhos por mulher) e já observamos um erro conceitual, pois apresenta a figura de um casal, quando deveria apresentar apenas uma mulher, pois se trata da taxa de fecundidade e não do tamanho médio das famílias.

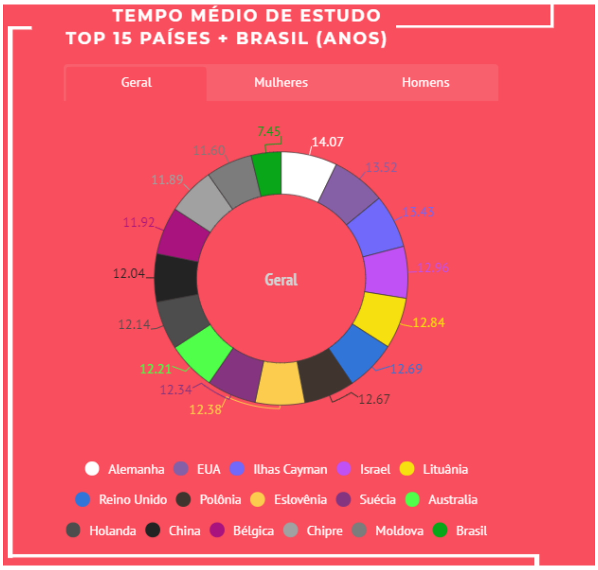


Figura 6: Representação gráfica da variável tempo médio de estudo por país[3].

Figura 7: Representação pictórica da taxa de fecundidade[4]

Considerações Finais

É importante destacar que para compreender o conceito de média devemos lembrar que ela é um único número que resume e representa o conjunto de dados de onde ela foi obtida, que é preciso ampliar o conceito de média simples, para a média agregada e para a média ponderada, examinando a natureza da variável, pois em geral as variaveis agregadas, precisam de tratamento diferenciado.

A representação dos dados também tem um papel importante na apreensão do conceito e, nesse sntido observamos que a melhor representação dos dados brutos é o diagrama de pontos, pois somente com ela temos a visualização da distribuição dos dados, podemos localizar os valores mínimo e máximo, observar se esses se distribuem simetricamente ou se concentram

[3] https://www.megacurioso.com.br/educacao/106035-o-brasileiro-estuda-em-media-7-4-anos-contra-a-media-de-14-dos-alemaes.htm
[4] https://brasilescola.uol.com.br/geografia/taxa-fecundidade.htm.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

nos menores ou maiores valores, verificar a presença de valores extremos, e intuir a localização da média como o "fiel da balança"; a representação da média como a linha que "iguala" os valores da variável disposta num gráfico de barras (verticais) também é eficiente, pois permite "ver" os desvios verticais. Infelizmente, a BNCC não incluiu o diagrama de pontos como representação a ser estudada na Educação Básica.

Temos consciência de que este trabalho é uma primeira aproximação conceitual e esperamos que a comunidade contribua para sua expansão, a fim de que possamos delinear sequências de ensino para ampliar o domínio deste campo conceitual pelos estudantes da Educação Básica.

Referências

Amaral, F. M. (2010). *Validação de sequência didática para (re)construção de conhecimentos estatísticos por professores do ensino fundamental***.** Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, SP, Brasil.

Andrini, A. & Vasconcellos, M. J. (2015). *Praticando Matemática* 6. 4. ed. São Paulo: Editora do Brasil.

Araújo, J. R. A. (2018). *Atividade para o estudo das Medidas de Tendência Central: uma proposta com o apoio do Geogebra*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, SP, Brasil.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno*: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 25, 41-58.

Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Ensino Fundamental.

Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria da Educação Básica.

Carvalho, J. I. F. (2011). *Média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental*. Dissertação Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, PE, Brasil.

Cazorla, I. M. (2003). Média aritmética: um conceito prosaico e complexo. *Anais do IX Seminário de Estatística Aplicad*a, Rio de Janeiro.

Cobo, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Cobo, B. & Batanero, C. (2004a). Razonamiento numérico en problemas de promedios. *Suma* 45, 79-86.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

Cobo, B. & Batanero, C. (2004b). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias,*22(1)*,* 5-18.

Lemos, M. P. F. (2011). *O desenvolvimento profissional de professores do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental em um processo de formação para o ensino e a aprendizagem das Medidas de Tendência Central*. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, SP, Brasil.

Lopes, C. E.; Coutinho, C. Q. S. & Almouloud, S. A. (Org.). (2010). *Estudos e Reflexões em Educação Estatística*. Campinas: Mercado das Letras.

Melo, M. C. M. (2010). *Fazendo média: compreensões de alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental***.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, PE, Brasil

Mokros, J. & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 20-39.

Novaes, D. V. (2004). *A mobilização de conceitos estatísticos: estudo exploratório com alunos de um curso de Tecnologia em Turismo*. Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, SP, Brasil.

Novaes, D. V. (2011). *Concepções de professores da Educação Básica sobre variabilidade estatística*. Tese de doutorado. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, SP, Brasil.

Santana, E. R. S. (2010). *Estruturas Aditivas: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante?* Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, SP, Brasil.

Strauss, S. & Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 64-80.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In: Lesh R., Landau M.(eds.). *Acquisition of mathematics concepts and operations processes. (*p. 127-174). New York: Academic.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble,10(23), 133-170.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In: Guershon, H. e Confrey, J. (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. (p. 41-59). New York.: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (1996). A Teoria dos Campos Conceituais. In: J. Brun. *Didáctica das matemáticas*. (p. 155-19). Tradução por Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget.

Viali, L. (2010, July). The teaching of statistics and probability in mathematics undergraduate courses. In: C. Reading (Ed.). Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. *Proceedings of the International Conference on Teaching Statistics* -ICOTS, Ljubljana, Slovenia, Voorburg, 8.

Zequim, A. de M. (2012). O uso do Avale-EB para a aprendizagem de Estatística no Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e62827

Recebido em: 30/03/2019
Aceito em 07/09/2019