REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UMA PROPOSTA DE ARTICULAÇÕES ENTRE ÁLGEBRA VETORIAL E GEOGEBRA

A proposal for joints between vector algebra and GeoGebra

Jany Santos Souza GOULART
Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, Bahia, Brasil
jany.uefs@gmail.com, jssgoulart@uefs.br
https://orcid.org/0000-0002-9140-0223

Luiz Marcio Santos FARIAS
Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, Brasil
lmsfarias@ufba.br
https://orcid.org/0000-0002-2374-3873

Claudiano GOULART
Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, Bahia, Brasil
cgoulart@uefs.br, goulart.fsa@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8745-8406

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos algumas produções oriundas de um minicurso realizado em um evento direcionado a licenciandos e professores de matemática da Educação Básica. Destarte que, apenas estudantes realizaram inscrição nesta atividade. A proposta do minicurso constituiu-se a partir de um estudo do trânsito entre as diferentes representações vetoriais nos domínios numérico, algébrico e geométrico, subsidiado pelo software GeoGebra, com o intuito de apontar caminhos para a instauração de pressupostos do emergente Paradigma de Questionamento do Mundo, cujo pilares se assentam no despertar de uma visão prospectiva que se opõe ao Paradigma de Visitação de Obras. Nesta perspectiva, tomamos como aporte teórico a Teoria Antropológica do Didático – TAD, a qual possui um dos fundamentos centrado nas análises das atividades didáticas matemáticas em torno de uma modelação praxeológica pontual, por meio da interação entre os blocos prático e teórico. As atividades foram planejadas e desenvolvidas contemplando-se tarefas que geralmente são tratadas em aulas ou avaliações sobre a teoria de vetores no plano, objetivando-se apontar direções para integrar o software às aulas que abordam a álgebra vetorial. Em termos de resultados, identificamos que os participantes abandonaram a postura estática e coadjuvante imposta no modelo tradicional de ensino e assumiram um papel protagonista nas atividades desenvolvidas, tanto no ambiente "papel lápis" quanto no âmbito virtual, contribuindo, desta forma, com a formação de futuros professores de matemática que questionem e não apenas visitem obras.

Palavras-chave: Álgebra Vetorial, GeoGebra, Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

In this work, we present some productions from a mini-course carried out in an event directed to graduates and teachers of mathematics in Basic Education. However, only students enrolled in this activity. The short course proposal was based on a study of the transit between the different vector representations in the numerical, algebraic and geometric domains, subsidized by the GeoGebra software, in order to point out ways for the establishment of assumptions of the emerging Paradigm of Questioning the World, whose pillars are based on the awakening of a prospective vision that opposes the Paradigm of Visiting Works. In this perspective, we take as theoretical support the Anthropological Theory of Didactics -

ATD, which has one of the foundations centered on the analysis of mathematical didactic activities around a specific praxeological modeling, through the interaction between the practical and theoretical blocks. The activities were planned and developed considering tasks that are usually dealt with in classes or assessments of vector theory in the plan, aiming to point out directions for integrating the software into classes that address vector algebra. In terms of results, we identified that the participants abandoned the static and supporting position imposed by the traditional teaching model and assumed a leading role in the activities developed, both in the "pencil paper" environment and in the virtual environment, thus contributing to the formation of future mathematics teachers who question and not just visit works.

Keywords: Vector Algebra, GeoGebra, Didactic Anthopological Theory.

1 INTRODUÇÃO

As grandezas vetoriais são protagonistas em cursos vinculados às ciências exatas e tecnológicas. Geralmente, compõem a ementa de disciplinas em que o cerne é a Geometria Analítica, adquirindo um formato sequencial e recorrente em componentes ligadas à Álgebra Linear, Física e Cálculo. No Ensino Médio e em componentes curriculares introdutórias que integram o núcleo de conhecimentos matemáticos, o primeiro contato com os vetores reporta a uma representação em que tais elementos são associados às grandezas que necessitam de módulo, direção e sentido para serem plenamente caracterizadas – como em exemplos clássicos de deslocamento, velocidade, aceleração e força, dentre outros.

O trânsito dos vetores entre diversas disciplinas e a abrangência institucional justificam a nossa escolha por estes objetos matemáticos. Desta forma, no minicurso abordamos a álgebra vetorial, assunto este constituinte da ementa de componentes curriculares que abarcam a Geometria Analítica e a Álgebra Linear. Assim, foi considerado como pré-requisito que os participantes do curso tivessem um contato preliminar com o ente matemático referido, seja por meio de algumas das disciplinas citadas acima, seja por intermédio de outra componente que aborde o assunto.

Ao direcionarmos a atenção para os aspectos representacionais dos vetores, constatam-se transições entre diferentes domínios: numérico, algébrico e geométrico, como apontado pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS), de Duval (1995), a qual evidencia que a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea dos registros de representação que implicam transitar em diferentes domínios (numérico, algébrico e geométrico) para uma efetiva compreensão do conhecimento.

No âmbito da Teoria Antropológica do Didático – TAD, podemos nos reportar à Dialética entre Objetos Ostensivos e Não-Ostensivos, como pontuado por Bosch e

Chevallard (1999, p. 96, tradução nossa[1]): “os ostensivos têm uma dupla função: eles têm um ‘valor semiótico’, ligado ao seu poder de representar objetos Não-Ostensivos, e um ‘valor instrumental’, ou seja, sua função como ferramentas de práticas matemáticas.”.

Soma-se a essa concepção, o que sinaliza Arzarello, Bosch, Gascón e Sabena et (2008), isto é, que a dimensão ostensiva da atividade matemática é interessante na medida em que possibilita lançar luz sobre problemas de matemática; o que nos leva a considerar que não podemos desprezar as conexões existentes entre as particularidades numéricas, algébricas e geométricas, as quais fazem parte e estão intimamente ligadas às concepções acerca dos vetores. Sob este aspecto, Farias (2010) desenvolveu estudos focalizando as inter-relações entre os diferentes domínios matemáticos (numérico, algébrico e geométrico – NAG). Suas constatações indicam problemas na implícita utilização do (NAG) no processo de ensino e aprendizagem em sala de aula.

Nesse sentido, supomos que um software de matemática dinâmica como o GeoGeobra possa assumir o papel de um artefato, o qual, posteriormente, possa ser transformado em um instrumento, como tratado na Teoria da Instrumentação de Rabardel (1995). Em mesmo direcionamento, Rabardel e Waern (2003) destacam que não é necessária apenas a inclusão de usuários em atividades que utilizam um artefato (computador, por exemplo), mas também considerar os processos pelos quais os usuários transformam o artefato em instrumento.

Sob outro aspecto, Chevallard (2006) apresenta a Dialética Mídia Meio, a qual estabelece íntimas relações com outras teorias Chevallardianas, como a Teoria da Transposição Didática – TTD e Teoria Antropológica do Didático – TAD.

> Os alunos – todos nós, na verdade – estamos cercados pelos meios de comunicação (mídias), uma palavra que uso aqui no sentido generalizado, chamado *“médium”* ou qualquer sistema social que objetiva informar algum segmento da população ou determinado grupo de pessoas sobre o mundo natural ou social. Nesse abrangente ponto de vista, um ciclo de palestras, por exemplo, é um meio, como também é um textbook*,* o mesmo pode ser dito de lendas urbanas transmitidas de boca em boca... (Chevallard, 2006, p. 26, tradução nossa[2]).

O autor também esclarece que:

> o “meio” é qualquer sistema desprovido de intenções e, portanto, se comporta como um fragmento da natureza – uma estrutura que não pretende agradar nem

[1] Ostensives have a twofold function: they have a ‘‘semiotic value’’, linked to their power to stand for non-ostensives objects, and an ‘‘instrumental value’’, namely their function as tools of mathematical practices.

[2] Students – and all of us indeed – are surrounded by media, a word I use here in a generalised sense, calling “medium” any social system pretending to inform some segment of the population or some group of people about the natural or social world. In such a comprehensive view, a course of lectures, for example, is a medium, and so is a textbook, ant the same can be said of urban legends passed on by word of mouth…

> desagradar. Em matemática as provas constituem o meio, pois o sistema dedutivo não tenta cumprir o desejo do matemático (Chevallard, 2006, p. 29, tradução nossa[3]).

Neste direcionamento, projetamos propiciar um meio que possibilitasse aos participantes do curso a interação com a plataforma computacional do GeoGebra (mídia) interligado ao viés vetorial, que, de acordo com Brousseau (2009), pode também constituir o meio.[4] Em termos mais simplistas, Brousseau (2002) parte da premissa básica de que uma situação envolve três dimensões: o sujeito, as circunstâncias nas quais ele se encontra e as relações que o unem ao meio.

> Uma situação é caracterizada em uma instituição por um conjunto de relações e de papéis recíprocos de um ou vários sujeitos (aluno, professor, etc.) com um meio, visando à transformação deste meio segundo um projeto. O meio é constituído por objetos (físicos, culturais, sociais, humanos) com os quais o sujeito interage em uma situação (Brousseau, 2002, p. 1).

Nesse contexto, tomamos como base as concepções teóricas aludidas, as quais serviram de sustentação para a concepção, elaboração e realização do minicurso em pauta. Pois, segundo Brousseau (2002), o agente é aquele que age sobre um “milieu” de modo racional e econômico de acordo com as regras da situação e condições do contexto. Sob esse olhar, apresentamos como se deu a estruturação do minicurso.

2 O ESCOPO DO MINICURSO

Preliminarmente destacamos que, o minicurso integrou a programação da XVIII SEMAT[5], evento direcionados a discentes e professores de matemática. No entanto, apenas estudantes se dispuseram a participar. Nestes termos, o desenho do curso se deu a partir de dois encontros presenciais, de duas horas cada. Tivemos um público de 20 discentes de um Curso de Licenciatura em Matemática de variados semestres. Fomos informados pela comissão organizadora do evento acerca do interesse de uma quantidade maior de estudantes que desejavam participar do minicurso, contudo, por limitações

[3] “milieu” any system that, as far as the question that you put to it is concerned, is devoid of intentions and therefore behaves like a fragment of nature – a system that intends neither to please or to displease you nor to defeat you of your hopes. In mathematics, of course, proofs are the chief traditional milieu in that sense – a deductive system does not try to comply with the mathematician’s wish…

[4] Em palestra proferida na Universidade Bandeirante de São Paulo, na Escola de Altos Estudos - EAE, Guy Brousseau declara que o meio é um sistema antagonista do atuante (alunos/professor), podendo ser material, imaterial, objetivo ou subjetivo. Curso esse realizado em outubro de 2009.

[5] Evento realizado anualmente na Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS, sob a coordenação de estudantes do Diretório Acadêmico - DA e pelo Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática – COLMAT.

relacionadas ao espaço físico, não foi possível ampliar o número de vagas.

No primeiro encontro, exibimos uma síntese do planejamento do curso e realizamos a aplicação de um questionário cujo intuito foi identificar as condições e restrições acerca da utilização dos recursos e ferramentas disponíveis no GeoGebra, assim como o nível de conhecimento e domínio da álgebra vetorial.

Questões Preliminares

1) Em que nível de ensino ocorreu seu primeiro contato com os vetores? Descreva como foi essa experiência.
2) Com os conhecimentos adquiridos até o momento, como você define vetores? Apresente propriedades deste objeto matemático e exemplifique sua aplicabilidade.
3) O que você entende pela expressão “produto entre vetores”? Utilize algum exemplo para deixar mais clara sua interpretação acerca da expressão.
4) Você considera relevante o ensino de vetores nos Cursos de Licenciatura em Matemática? Justifique sua resposta.
5) Você conhece o software GeoGebra? Em caso afirmativo, descreva de que forma ocorreu seu primeiro contato com o mesmo.

Figura 1: Questionário introdutório
Fonte: acervo dos autores.

De posse das respostas dos estudantes, foi possível perceber que poucos alunos tiveram o primeiro contato com os vetores no ensino médio. Fato este, que nos direciona a inferir e identificar uma lacuna no que se refere a competências e habilidades dos conhecimentos da Física, segundo os PCNs:

> Assim, para dominar a linguagem da Física é necessário ser capaz de ler e traduzir uma forma de expressão em outra, discursiva, através de um gráfico ou de uma expressão matemática, aprendendo a escolher a linguagem mais adequada a cada caso. Expressar-se corretamente na linguagem física requer identificar as grandezas físicas que correspondem às situações dadas, sendo capaz de distinguir, por exemplo, calor de temperatura, massa de peso, ou aceleração de velocidade. Requer também saber empregar seus símbolos, como os de *vetores* ou de circuitos, fazendo uso deles quando necessário (Brasil, 2000, p. 24, grifos nossos).

Já no cenário da BNCC (2017) não existem direcionamentos específicos para o estudo dos vetores; nota-se, neste documento, que os realces destacam aspectos amplos e imprecisos no que diz respeito ao trato com as grandezas vetoriais, ao apresentar como proposta uma ampliação e sistematização das aprendizagens essenciais desenvolvidas até o 9º ano do Ensino Fundamental. O que, para seus idealizadores, significa

> em primeiro lugar, focalizar a interpretação de fenômenos naturais e processos tecnológicos de modo a possibilitar aos estudantes a apropriação de conceitos,

> procedimentos e teorias dos diversos campos das Ciências da Natureza. Significa, ainda, criar condições para que eles possam explorar os diferentes modos de pensar e de falar da cultura científica, situando-a como uma das formas de organização do conhecimento produzido em diferentes contextos históricos e sociais, possibilitando-lhes apropriar-se dessas linguagens específicas (Brasil, 2017, p. 537).

Ao direcionarmos o olhar para a cultura científica, recorremos a alguns estudos de Chevallard (2009, 2010, 2012), os quais apontam para a emergência de um novo Paradigma de Questionamento do Mundo, que se opõe ao "Paradigma de Visitação de Obras", propondo:

> Uma visão prospectiva sobre a dimensão didática em nossas sociedades que desejo explicitar, pode ser encapsulado num fato histórico crucial: o antigo paradigma didático que ainda floresce em tantas instituições escolares é obrigado a dar lugar a um novo paradigma ainda na infância. Para tornar uma longa história em curta, eu defino um paradigma didático como um conjunto de regras que prescrevem, ainda que implicitamente, o que deve ser estudado, quais são as apostas didáticas e quais são as formas de estudá-los (Chevallard, 2012, p. 2).

Por meio da concepção Chevallardiana, o aluno assume um papel protagonista na aquisição da aprendizagem, provocando rupturas com a postura estática e coadjuvante imposta no modelo tradicional de ensino subsidiado pelo Paradigma de Visitas a Obras ou Visitas aos Monumentos,[6] que, na acepção de Chevallard (2012), resume-se a ouvir um relato ou narrativa recitada pelo professor acerca do monumento visitado.

Com o intuito de apresentar um ambiente em que os participantes tivessem a oportunidade de questionar e não apenas visitar obras, disponibilizamos material impresso como suporte. Este material continha alguns conceitos e definições que abordamos na aula, assim como os comandos e algumas noções preliminares do GeoGebra. A partir disso, os discentes dispunham de ferramentas para o enfrentamento e confrontações das questões que posteriormente foram apresentadas. Proporcionar ferramentas, para Chevallard (2012), centra-se em dois pilares:

> O equipamento intelectual do investigador – ou mais exatamente o equipamento praxeológico do investigador, no sentido da palavra praxeologia própria da TAD, portanto, assenta em dois pilares: a capacidade de localizar recursos, on-line e off-line e o conhecimento necessário para aproveitá-los. Isso leva à questão de fazer uso de uma reunião de obras O (Chevallard, 2012, p. 9, tradução nossa[7]).

[6] In the framework of the anthropological theory of the didactic, this paradigm is known as the paradigm of "visiting works" or – according to a metaphor used in ATD – "of visiting monuments", for each of those pieces of knowledge.

[7] The inquirer's intellectual equipment – or more exactly the inquirer's praxeological equipment, in a sense of the word praxeology proper to ATD – thus rests on two pillars: the capacity to locate resources, online and offline, and the knowledge necessary to take advantage of them. This leads to the question of making good use of the works O gathered.

No segundo encontro, trabalhamos com a resolução de tipos de tarefas que contemplaram os vetores nas diferentes representações (numérica, algébrica e geométrica) utilizando os ambientes papel lápis em sincronia com o computacional, subsidiado pelos pressupostos da Teoria Antropológica do Didático - TAD ao assumir que toda atividade humana é uma prática que se realiza no interior de uma instituição e que pode ser modelada por um modelo único denominado de praxeologia, que é constituído, por sua vez, por uma práxis, ou um saber-fazer sempre acompanhado de um discurso, o *logos* ou saber, mais ou menos desenvolvido, que dá razão e justifica essa práxis (Chevallard, 1999).

Num mesmo segmento, este quadro teórico contempla a atividade matemática como atividade humana, vista como um Sistema de Praxeologias (SP) ou Organizações Matemáticas (OM) e, nesse sentido, "o conhecimento matemático é compreendido como o produto oriundo de atividades com a intenção de resolver determinados tipos de questões, ou tarefas, que foram problemáticas para uma determinada comunidade, em um dado momento histórico" (Andrade & Guerra, 2014, p. 1202).

No que tange aos vetores, essas grandezas são protagonistas em cursos vinculados às ciências exatas e tecnológicas. Em um primeiro momento, um vetor é definido como um conjunto de segmentos orientados equipolentes e é geometricamente representado por um elemento deste conjunto, o que situa o mesmo na esfera intuitiva. Gradualmente, segue-se com a operação de adição (soma de vetores) e a multiplicação de um vetor por um escalar (número real). Operações estas vinculadas ao âmbito geométrico intuitivo, uma vez que a primeira recorre às regras do paralelogramo ou polígono.

A segunda operação gera representantes de vetores que alteram as características do vetor inicialmente dado, tais como o aumento do comprimento, ao considerar um escalar menor que -1 ou maior que 1, ou a diminuição do comprimento do segmento orientado quando o número pertence ao intervalo aberto delimitado por -1 e 1; mantém-se o comprimento quando os escalares forem iguais a -1 ou 1, e obtém-se a inversão do sentido ao considerar-se um número negativo.

Essas noções preliminares são tratadas com relativa facilidade quando é utilizado o software GeoGebra:

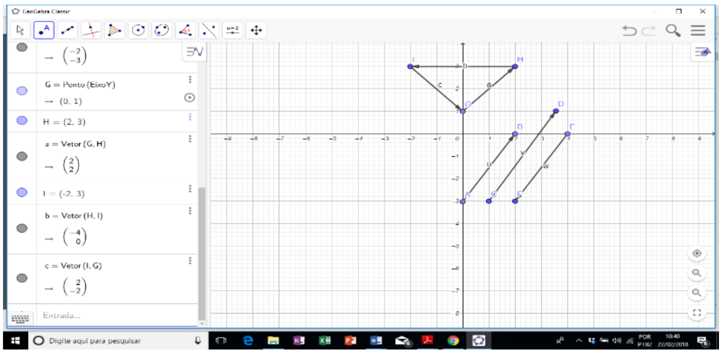


Figura 2: Representações algébricas e geométricas de alguns vetores no ambiente GeoGebra.
Fonte: acervo dos autores.

Nota-se que, utilizando-se a mesma tela, temos as representações vetoriais nos âmbitos algébrico (Janela de Álgebra) e geométrico (Janela de Visualização), além da possibilidade de comandos por meio da Caixa de Entrada. Assim, abre-se um leque de possibilidades dinâmicas ao se modificar módulo, direção ou sentido. A partir deste aspecto, destacamos a relevância do minicurso aqui mencionado, já que este considera os vetores e, consequentemente, as resoluções de tarefas que envolvem os mesmos. Nessa perspectiva, o referido software constituiu um elemento auxiliar na compreensão com o trato vetorial.

De acordo com informações obtidas no site[8] do programa computacional, o GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote, além de ser fácil de usar. Disponível em vários idiomas, foi criado pelo prof. Dr. Markus Hohemwarter, da Universidade de Salzburgo na Áustria, em 2001 (Hohemwater & Fuchs, 2004). Trata-se de um software de distribuição gratuita, baseado em linguagem Java e funciona nas plataformas Linux, Windows e Macintosh. Atualmente, as versões também contemplam dispositivos móveis como smartphones e tablets.

No âmbito dos processos educativos a recorrência ao software, enquanto ferramenta didática, se propaga e integra-se em diversas investigações como: Silva (2016); Lemke, Silveira e Siple (2016); Estevam, Basniak, Paulek, Scaldelai e Felipe (2018); Araujo e Pazuch (2018); Pereira Jr e Bertol (2019) e Lopes Júnior (2019), dentre outras. Aspecto este que reforça o caráter hodierno e latente que emergem em torno do GeoGebra.

No que se refere ao planejamento do curso, foram solicitados à organização do evento 10 computadores com o software GeoGebra, já instalado e devidamente

[8] www.geogebra.com

funcionando, visto que uma das nossas intenções era permitir que os discentes resolvessem as tarefas em parceria com um colega, objetivando propiciar uma maior interação entre os participantes e gerar um ambiente de discussões e questionamentos. Tínhamos também à nossa disposição os seguintes materiais: folhas de papel A4, lápis, borrachas, réguas, pares de esquadros, marcadores para quadro branco e apagador.

3 DESCRIÇÃO DAS TAREFAS

Ao consultarmos alguns dos livros e textos que, geralmente, subsidiam o aporte bibliográfico básico da disciplina Geometria Analítica – a exemplo de Lima (2001), Conde (2004), Camargo e Boulos (2005), Corrêa (2006), Steinbruch e Winterle (1987), Mello e Watanabe (2001), Winterle (2014), Venturi (2015) e Miranda (2015), dentre outros –, constatamos que os referidos autores apresentam, dentre seus exercícios e problemas propostos, diversas questões em que os vetores constituem o centro da abordagem. Contudo, nenhuma tarefa tem sua resolução direcionada ao ambiente computacional. A partir desta constatação hodierna, emerge a necessidade de se propor um caminho diferenciado para o trato com tarefas vetoriais.

Neste sentido, para a TAD, uma tarefa só tem significado para o estudo se ela possui uma legitimidade social, matemática e funcional, isto é, se a tarefa está conectada com outras questões estudadas no ambiente acadêmico. No que diz respeito à proposta aqui discutida, evidenciamos que Andrade e Guerra (2014, p. 1203) destacam que:

> as praxeologias didáticas ou organizações didáticas são as respostas às questões de como estudar, ou seja, de como organizar e articular um determinado tema com outros segundo uma intencionalidade que dê razão ao estudo, portanto, as praxeologias não são criações da natureza, mas "artefatos", ou "obras", construídas pelo homem para ajudar no estudo e serem corporificadas nos documentos oficiais, nos livros didáticos, em uma sala de aula, nos cadernos dos estudantes, etc.

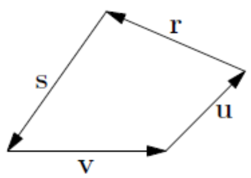
No universo dos Cursos de Licenciaturas em Matemática, os vetores aparecem associados às grandezas físicas, sendo exemplos clássicos nesse contexto o deslocamento de uma partícula, a velocidade, aceleração e força. Outro ambiente de possíveis interligações vetoriais é abordado no Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis, que, em seus desdobramentos, disserta sobre objetos matemáticos como o *vetor gradiente* e *vetor rotacional*. A partir deste escopo, e diante do exíguo tempo de que dispusemos para ministrar o referido minicurso, direcionamos nossa atenção para o embrião praxeológico, denotado por Chevallard (1999) como uma *praxeologia* *matemática pontual*. Esta ocorre quando é gerada por um único tipo de tarefa e somente uma técnica, com tecnologia ausente ou implicitamente assumida.

Através deste olhar, e de suas múltiplas interligações, infere-se que devemos aprender ou ensinar matemática enquanto ações humanas, admitindo-se que toda atividade humana pode ser modelada praxeologicamente, ou, em termos mais simplórios: o processo de ensino e aprendizagem consiste em realizar uma *tarefa t* de um determinado *tipo T*, cumprida por uma determinada *técnica* τ, fundamentada por uma *tecnologia* θ e legitimada por meio de uma *teoria* Θ. Essa estrutura é simbolicamente representada por $\wp$ = $[T,\tau,\theta,\Theta]$ e significa um conjunto de técnicas no seio de uma tecnologia e de uma teoria organizadas para um tipo de tarefa, cuja denominação é Organização Praxeológica (OP) pontual, por envolver apenas um tipo de tarefa T. Ressalta-se que a OP preza pela inseparabilidade entre os blocos práticos $[T,\tau]$ e teóricos $[\theta,\Theta]$, intrínsecos às atividades matemáticas.

Assim, elencamos as tarefas que foram propostas aos participantes com a finalidade de abordar alguns conceitos característicos da álgebra vetorial agregado às representações nos diferentes domínios. Foram apresentados como orientações para resolução das tarefas os seguintes procedimentos: no primeiro momento, deveriam ser resolvidas no ambiente *papel lápis*; num segundo momento, no ambiente do GeoGebra.

Lista de tarefas

1) Considerando a figura abaixo, qual o vetor obtido pela soma $\vec{w}=\vec{s}+\vec{v}+\vec{u}+\vec{r}$?

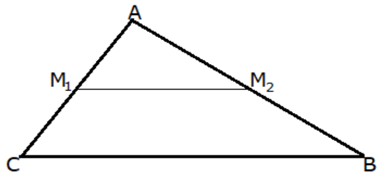


2) Dados $\vec{u}=(1,3)$ e $\vec{v}=(2,1)$, represente no plano cartesiano os vetores: $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u}+\vec{v}$.

3) Dados $\vec{u}=(1,3)$ e $\vec{v}=(2,1)$, represente no plano cartesiano os vetores: $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{u}$.

4) Um objeto sai de um ponto A e desloca-se até um ponto B, distante 10 Km de A no sentido Norte. A seguir, desloca-se mais 6 km até um ponto C que está a Leste do ponto B. Por fim, desloca-se mais 18 Km para o Sul, chegando então a um ponto D. Determine o vetor deslocamento do objeto.

5) Prove que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem comprimento igual à metade do comprimento desse lado.



6) Dado um quadrilátero qualquer ABCD, podemos afirmar que os pontos médios dos seus lados são vértices de um paralelogramo?

7) Justifique. Se EFG é um triângulo qualquer e P, Q e R são pontos médios dos lados EF, FG e GE, respectivamente, mostrar que EPQR é um paralelogramo.

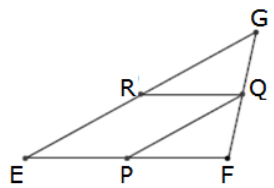


Figura 3: Seleção de tarefas propostas para resolução no minicurso
Fonte: acervo dos autores

No mesmo direcionamento, Chevallard (2002) abordou uma tarefa que se assemelha com a questão 5 da lista acima: *Sejam M, N, P três pontos não alinhados. Seja U o ponto médio de* MN *e V o ponto médio de* PM *então* $\overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{UV}$ (Figura 4).

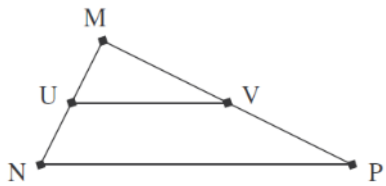


Figura 4: Representação da tarefa
Fonte: Chevallard (2002, p. 5)

Demonstração: Usando operações com vetores, temos:

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{UM} + 2\overrightarrow{MV} = 2\overrightarrow{UV} \qquad (1)$$

Podemos representar a situação acima utilizando o GeoGebra e recorrendo a algumas de suas ferramentas para verificarmos se as propriedades dos objetos ostensivos revelados na janela de visualização possuem as características solicitadas, como por exemplo: a determinação dos pontos médios quando usado o *comando ponto médio*, ou verificação do paralelismo entre os seguintes segmentos ao acionarmos a ferramenta que expõe as *relações entre objetos*.

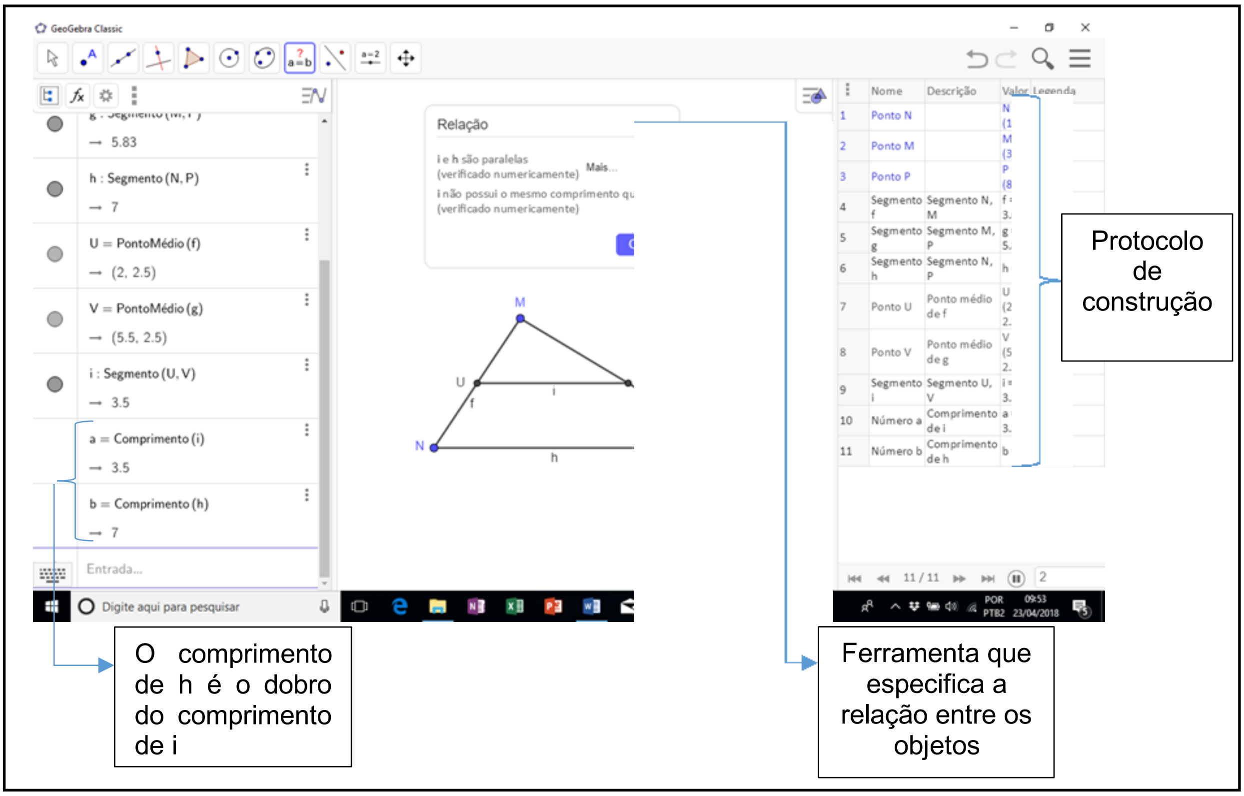


Figura 5: Representação geométrica da tarefa referenciada acima
Fonte: acervo dos autores

Em seguida, Chevallard (2002, p. 5) questiona a existência e a unicidade de um triângulo, conforme enunciado no quadro abaixo.

Sejam A, B, C três pontos não alinhados. Existe um triângulo MNP em que A, B, C são os pontos médios de seus lados? Se tal triângulo existe, é único?

Fonte: Chevallard (2002, p. 5)

Adotando o direcionamento de Chevallard (2002), apresentamos abaixo a demonstração deste resultado.

Existência: Dados os pontos $A, B, C,$ construa os pontos $M = B + \overrightarrow{CA}$ e $N = B + \overrightarrow{AC}$, isto é, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AC}$. Defina também $P = N + 2\overrightarrow{BA}$ e $Q = M + 2\overrightarrow{BC}$, ou seja, $\overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{BC}$.

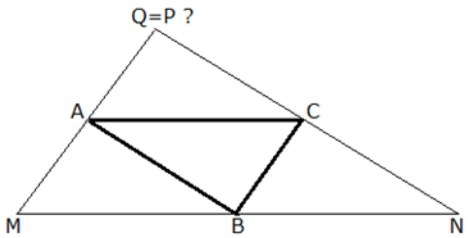


Figura 6: Existência de um triângulo conhecidos os pontos médios
Fonte: acervo dos autores

A existência do triângulo fica garantida se verificarmos que $Q = P$. De fato, esta igualdade é verdadeira, pois, usando a questão anterior, obtivemos:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MQ} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}) = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 2\overrightarrow{AA} = \vec{0}. \qquad (2)$$

Unicidade: Suponha que existam dois triângulos $M_1N_1P_1$ e $M_2N_2P_2$ de modo que A seja o ponto médio de P_1M_1 e P_2M_2, B seja o ponto médio de M_1N_1 e M_2N_2 e que C seja o ponto médio de P_1N_1 e P_2N_2.

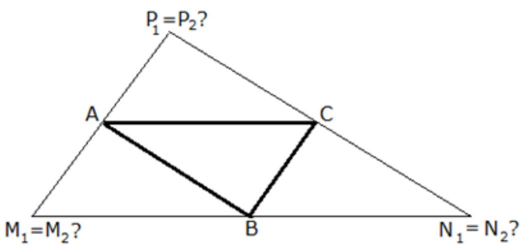


Figura 7: Unicidade de um triângulo conhecidos os pontos médios
Fonte: acervo dos autores

Usando a questão anterior e as hipóteses acima, obtemos $\overrightarrow{M_1N_1} = 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{M_2N_2}$.

Segue, portanto, que:

$$\overrightarrow{M_1B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_2N_2} = \overrightarrow{M_2B}. \quad (3)$$

Desta forma, $M_1 = M_2$. Analogamente, mostra-se que $N_1 = N_2$ e $P_1 = P_2$.

4 ANÁLISE DE ALGUNS REGISTROS

Ao iniciar a apresentação sobre os objetivos do minicurso, fizemos uma sucinta explanação sobre as diferenciações entre grandezas escalares e grandezas vetoriais, utilizando exemplos que estão presentes no nosso cotidiano. Em determinado momento da apresentação, fizemos referência à definição de vetores. Tomamos como base duas definições:

Definição 1 – "Vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB" (Steinbruch, 1987, p. 4, itálico nosso); e como complementação do conceito, o autor explana, preliminarmente, que dois segmentos orientados AB e CD são *equipolentes* quando têm a mesma *direção*, o mesmo *sentido* e o mesmo *comprimento*. Questionamos então: – *E o vetor nulo? O que vocês nos dizem sobre o vetor nulo?* Continuamos: – *O vetor nulo possui direção e sentido?*

Nesta etapa, os participantes silenciaram, num ato de reflexão. Existe a convicção da existência do vetor nulo, notam-se, porém, entraves no que se refere ao entendimento deste conceito. Apresentamos, nesse aspecto, uma segunda definição, que contempla, explicitamente, o conjunto de segmentos nulos:

Definição 2: "Os segmentos orientados AB e CD são *equipolentes, e indica-se AB ~ CD, se um dos casos seguintes ocorrer:*

a) *Ambos são nulos;*
b) *Nenhum é nulo, e têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido"* (CAMARGO; BOULOS, 2005, p. 5, itálico nosso).

Após a exposição deste significado, os discentes foram alertados, pelos professores que conduziram a aula, sobre a necessidade de questionarem as informações que chegaram até eles por diversas fontes. Postura esta ratificada por Chevallard (2012, p. 9) quando o autor sinaliza que o cidadão que pertence ao Paradigma de Questionamento do Mundo deve ser convidado a tornar-se procognitivo.

Nestes termos, direcionamos nossa atenção para a primeira questão da lista que versava sobre vetor nulo. Expusemos dois registros de resolução:

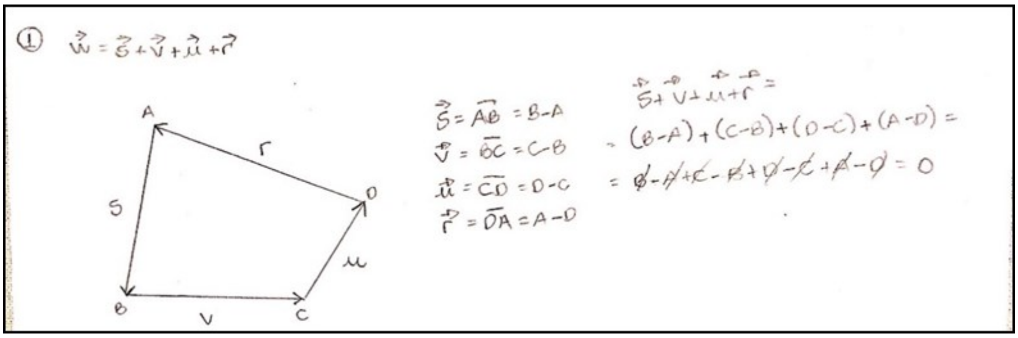


Figura 8: Resolução 1 da questão 1
Fonte: acervo dos autores

Na figura 8, o(a) aluno(a) apresenta uma solução tendo como base um conceito de adição entre vetores comumente encontrado em diversos livros que abordam a álgebra vetorial, a exemplo do de Camargo e Boulos (2005) e de Winterle (2014). Inicialmente, considerou-se um ponto arbitrário A como origem do primeiro vetor e, consequentemente, fica unicamente determinada a extremidade B. No passo seguinte, obteve-se o representante do segundo vetor com origem em B, e procedeu-se desta forma até o alcance do último vetor. Logo após, efetuou-se a soma dos vetores encontrando-se a resposta correta para a questão (vetor nulo).

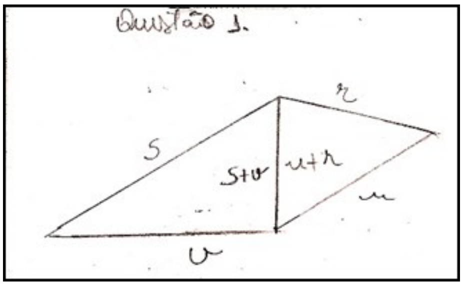


Figura 9: Resolução 2 da questão 1
Fonte: acervo dos autores

Durante a realização do minicurso, ficou claro, nas respostas dadas a certas perguntas, que alguns participantes não compreendem a diferença entre direção e sentido de um vetor. Este fato pode ser observado na figura 9, pois, ao tentar resolver a questão, o(a) aluno(a) se limitou a desenhar os segmentos de retas que supostamente seriam os representantes dos vetores dados. No entanto, não há qualquer menção quanto à orientação (sentido) dos mesmos. Observemos também, que não foi apresentada uma resposta para a soma vetorial solicitada; houve apenas a indicação, sem qualquer rigor matemático quanto aos sentidos dos vetores, de duas somas vetoriais ($\vec{s} + \vec{v}$ e $\vec{u} + \vec{r}$).

Faz-se pertinente ressaltar ainda, que, seguindo a orientação apresentada no enunciado da questão, a diagonal indicada pelo participante como soma entre os vetores $\vec{s}$ e $\vec{v}$ ou $\vec{u}$ e $\vec{r}$ seria, na verdade, a diferença.

Ao mudar do ambiente papel lápis para o ambiente do software GeoGebra, o entrave supracitado, momentaneamente, desaparece, visto que, ao representar a soma $\vec{w} = \vec{s} + \vec{v} + \vec{u} + \vec{r}$ entre vetores na *Janela de Visualização*, digitar a soma no *Campo de Entrada* e clicar na tecla *Enter*, o programa fornece como resultado o vetor nulo, conforme exemplificado na figura 10.

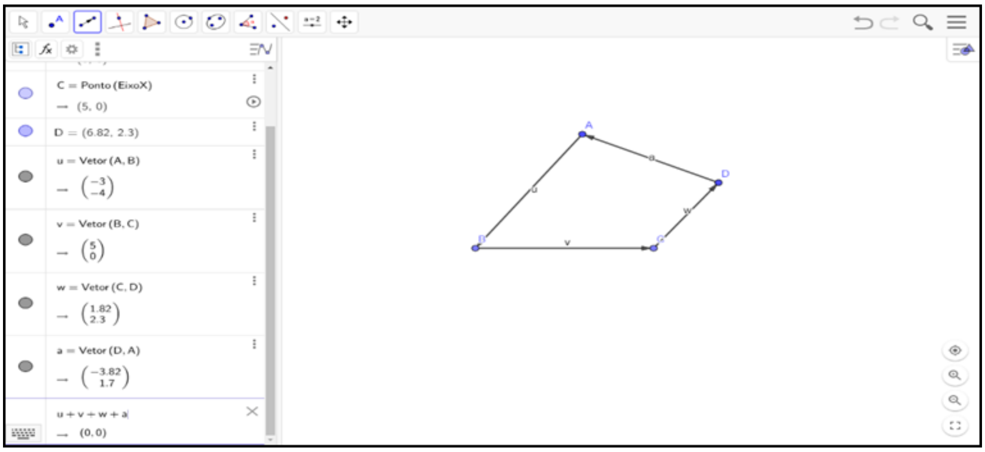


Figura 10: Resolução 1 no GeoGebra
Fonte: acervo dos autores

Destacamos que todas as questões foram resolvidas nos ambientes papel lápis e no GeoGebra. Escolhemos a primeira questão para tratarmos de conceitos ou definições; havíamos inferido que, devido a sua natureza preliminar, esta parte não geraria dúvidas e decisões inadequadas. Nesse contexto, é necessário realçar o que declarou Brousseau (2009) em um curso proferido na Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN: os obstáculos epistemológicos não são ausência de conhecimento, mas o sinal de que, em algum momento da história, tornaram-se conhecimentos inadequados.

Compactuamos também com a afirmação que Chevallard (2002) faz ao referenciar Gérard Vergnaud em um trecho da obra intitulada *On n'a jamais fini de relire Vygotski et Piaget*[9], ao alegar que: "[...] avancemos, e ao crédito da pesquisa em didática, essa ideia de que o encontro com novas situações podem serem usadas como alavanca de

[9] Nunca terminamos de reler Vygotski e Piaget.

aprendizado e desenvolvimento” (Chevallard, 2002, p. 1) – o que aponta um caminho para o rompimento com o problema de copiar obras, por meio de um mimetismo cultural e reprodução desprovida de questionamentos do que está posto, caracterizado pelo autor como uma visita a monumentos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O mapeamento das resoluções das tarefas que foram trabalhadas no minicurso em questão, possibilitou análises mais aprofundadas no âmbito do ensino e aprendizagem dos vetores. Verificamos que, apesar de alguns entraves conceituais, os participantes do curso conseguiram integrar o GeoGebra à construção dos procedimentos para obtenção de uma resposta satisfatória para cada questão trabalhada.

Identificamos algumas condições e restrições em termos do vetor nulo e os equívocos provocados devido a trocas entre direção e sentido. A partir do que foi trabalhado no referido minicurso, pretendemos avançar no contexto desse estudo com o intuito de criar dispositivos didáticos que auxiliem na compreensão com o trato vetorial.

Isto posto, ressaltamos que os estudos de Chevallard (1999, 2002, 2006, 2010), dentre outros, constituíram um dos pilares de sustentação do minicurso em pauta. Principalmente, por abordarem e contemplarem a modelização matemática por meio de praxeologias, bem como a proeminência do transitar de uma concepção inflexível e dominante para aspectos que nos fornecem subsídios para o questionamento do que institucionalmente está posto em Cursos de Licenciaturas em Matemática, a exemplo do nosso olhar particular para a álgebra vetorial.

REFERÊNCIAS

Andrade, F. C. D. & Guerra, R. B. (2014). Tarefa fundamental em um percurso de estudo e pesquisa: um caso de estudo para o ensino da Geometria Analítica, *Educação Matemática em Pesquisa*. Recuperado de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/22019/pdf

Araujo, R. E. G. (2018). Elaboração de objetos de aprendizagem com o software GeoGebra para o ensino de geometria. *Boletim online de Educação Matemática – BoEM*. Recuperado de http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/13828

Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J. & Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches. *ZDM Mathematics Education.* Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/225589006

Bosch M. & Chevallard Y. (1999). La sensibilite´ de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 19(1), 77–124.

Brousseau, G. (2002). La théorie des situations didactiques. Recuperado de http://perso.wanadoo.fr/daest/Pages%20perso/Brousseau.htm#ligne

Brousseau, G. (2009, outubro). Estudos experimentais e teóricos de situações didáticas em matemática. *In: Curso da Escola de Altos Estudos – EAE. Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN.* Recuperado de www.youtube.com/watch?v=BQp-dY1P4OM&t=295s

Camargo, I. de & Boulos, P. (2005). *Geometria Analítica.* 3. ed. São Paulo: Prentice Hall.

Chevallard, Y. (1999). L`analyse des pratiques enseignantes en théorie anthopologique du didactique. *Recherches en didactiques des mathématiques,* v. 19.2, 221-265.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude: Ecologie & régulation, Cours donné à la XIe école d'été de didactique des mathématiques. Paru dans les actes correspondants. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53

Chevallard, Y. (2006, fevereiro). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In *Congrès de la European Society For Research In Mathematics Education (Cerme 4).* Sant Feliu de Guíxols. Paru dans les *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelone: Universitat Ramon Llull. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=95

Chevallard, Y. (2009, abril). UMR ADEF. La notion de PER: problèmes et avancées. In *exposé présenté à l'IUFM*. Toulouse. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161

Chevallard, Y. (2010, abril). Enquêter pour connaître. L'émergence d'un nouveau paradigme scolaire et culturel à l'âge de l'Internet. In *Communication à la journée de réflexion sur le thème «Une approche anthropologique du didactique».* Liège: l'Institut de mathématiques de l'université de Liège. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=178

Chevallard, Y. (2012, julho). Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: a Case for an Oncoming Counterparadigm. In: *International Congress on Mathematical Education*, 12, 2012, COEX (pp. 173-187). Seoul, Korea. Recuperado de https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-12688-3_13.pdf

Conde, A. (2004). *Geometria Analítica.* São Paulo: Atlas.

Corrêa, P. S. Q. (2006). *Álgebra Linear e Geometria.* Rio de Janeiro: Interciência.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Suisse: Peter Lang.

Estevam, E., Basniak, M. I., Paulek, C. M., Scaldelai, D., Felipe, N. (2018). Ensino Exploratório de Matemática e Tecnologias Digitais: a elaboração da lei dos senos mediada pelo software GeoGebra. *Acta Scientiae*. Recuperado de http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/3186

Farias, L. M. S. (2010). *Étude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire: une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde* (Thèse Doctorat). Université de Montpellier 2, France.

Hohenwarter, M. & Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. Documento de trabalho. Recuperado de http://www.geogebra.org/publications/pecs_2004.pdf

Lemke, R., Silveira, R. F. & Zuchi S. (2016)**.** GeoGebra: uma tendência no Ensino de Matemática. In *Anais Colóquio Luso Brasileiro de Educação - II Colbeduca. Recuperado* de http://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/view/8413

Lima, E. L. (2001). *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA.

Lopes Júnior, W. A. A. (2019). Construções geométricas com auxílio de geometria dinâmica. (Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Matemática). Universidade Federal do Amazonas, Amazonas.

Mello, D.; Watanabe, G. R. (2011). *Vetores e uma Iniciação à Geometria Analítica.* São Paulo: Ed. Livraria da Física.

Ministério da Educação e Cultura. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: ciência da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC.

Ministério da Educação e Cultura. (2017). *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: MEC. Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf

Miranda, D., Grisi, R. & Lodovici, S. (2015). *Geometria Analítica e Vetorial.* Santo André–SP: Universidade Federal do ABC. Recuperado de http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/ga/notasdeaulas/geometriaanaliticaevetorial-SGD.pdf

Pereira Júnior, J., & Bertol, D. (2019). O Software GeoGebra no Ensino da Matemática: Relatos a partir de Teses e Dissertações. *Anais dos Workshops do Congresso Brasileiro de Informática na Educação,* *8*(1), 586. doi:http://dx.doi.org/10.5753/cbie.wcbie.2019.586

RabardeL, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

Rabardel, P.; Waern, Y. (2003). From artefact to instrument. *Interacting with Computers*, v. 15, n. 5, 641-645.

Steinbruch, A.; Winterle, P. (1987). *Geometria Analítica.* 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill.

Silva, G. M. (2016). Um Estudo sobre o uso do Geogebra na Aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio (Dissertação de Mestrado em Educação). Universidade Federal de São Carlos, São Paulo.

Venturi, J. (2015). *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica.* 10. ed. Curitiba: Livrarias Curitiba. Recuperado de www.geometriaanaltica.com.br

Winterle, P. (2014). *Vetores e Geometria Analítica*. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Uma proposta de articulações entre álgebra vetorial e GeoGebra

Jany Santos Souza Goulart
Mestrado.
Doutoranda do Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências – Universidade Federal da Bahia / Universidade Estadual de Feira de Santana (PPGEFHC-UFBA/UEFS)
Professora Assistente da Universidade Estadual de Feira de Santana, Departamento de Ciências Exatas, Feira de Santana, Bahia, Brasil
jany.uefs@gmail.com, jssgoulart@uefs.br
https://orcid.org/0000-0002-9140-0223

Luiz Marcio Santos Farias
Doutorado.
Professor Titular da Universidade Federal da Bahia, Instituto de Humanidades, Artes e Ciências, Salvador, Bahia, Brasil
lmsfarias@ufba.br
https://orcid.org/0000-0002-2374-3873

Claudiano Goulart
Doutorado
Professor Titular da Universidade Estadual de Feira de Santana, Departamento de Ciências Exatas, Feira de Santana, Bahia, Brasil
cgoulart@uefs.br, goulart.fsa@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8745-8406

Endereço de correspondência do principal autor
Avenida Centenário, 251, Alameda August Renoir casa 40, SIM, CEP 44085-132, Feira de Santana, BA, Brasil

AGRADECIMENTOS
Á UEFS pelo incentivo financeiro durante a realização do doutorado. Ao COLMAT/UEFS pela realização da Semana de Matemática e aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática que participaram do minicurso.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: J. S. S. Goulart, L. M. S. Farias, C. Goulart
Coleta de dados: J. S. S. Goulart, L. M. S. Farias, C. Goulart
Análise de dados: J. S. S. Goulart, L. M. S. Farias, C. Goulart
Discussão dos resultados: J. S. S. Goulart, L. M. S. Farias, C. Goulart
Revisão e aprovação: J. S. S. Goulart, L. M. S. Farias, C. Goulart

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO
Os materiais e recursos necessários para a realização do minicurso foram providenciados pela organização da XVIII Semana de Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana. A primeira autora do artigo foi contemplada com bolsa da UEFS (PACDT – Programa de Ajuda de Custo para Docentes e Técnicos da UEFS), a partir sétimo mês do início do doutorado, conforme Portaria 407/2017, publicada no Diário Oficial do Estado da Bahia, em 17 de janeiro de 2017**.**

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO
Recebido em: 29-04-2018 – Aprovado em: 04-03-2020