


APREENSÕES FIGURAIS MOBILIZADAS POR LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA: UM ESTUDO SOBRE ÁREA DE QUADRILÁTEROS A PARTIR DO SOFTWARE GEOGEBRA

Apprehensions mobilized by graduates in Mathematics: a study on the area of quadrilaterals from GeoGebra

Juliana Gabriele KIEFER

Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil
juliana_kiefer@hotmail.br

 <https://orcid.org/0000-0003-4912-5747>


Inês Farias FERREIRA

Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil
inesferreira10@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0002-3930-4728>

Rita de Cássia Pistóia MARIANI

Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil
rcpmariani@yahoo.com.br

 <https://orcid.org/0000-0002-8202-8351>

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo ●

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo analisar a mobilização de registros de representação semiótica de apreensões figurais em uma atividade sobre área de quadriláteros a partir do *software* GeoGebra. Para tanto, considerou-se protocolos de uma atividade com quatro itens conforme os pressupostos da pesquisa qualitativa (Lüdke & André, 1986) e os princípios da análise de conteúdo (Bardin, 2016). Na produção de dados identificaram-se relações entre o registro em língua natural e o registro figural, sendo estes os mais mobilizados e ainda de modo simultâneo. Além disso, conclui-se indícios de mobilização das apreensões perceptiva, discursiva e operatória, sendo a primeira a mais enfatizada.

Palavras-chave: Registro figural, Apreensões, Área de quadriláteros.

ABSTRACT

This research aims to analyze the mobilization of semiotic representation records of figurative seizures in an activity on area of quadrilaterals from GeoGebra software. For this, protocols of an activity with four items were considered according to the assumptions of the qualitative research (Lüdke & André, 1986) and the principles of content analysis (Bardin, 2016). In the production of data, we identified relations between the natural language register and the figural register, which are the most mobilized and simultaneously. In addition, evidence is concluding mobilization of perceptual, discursive, and operative apprehensions, the first being most emphasized.

Keywords/Palabras clave: Record figural, seizures, area of quadrilateral.

1 INTRODUÇÃO

A Geometria é um campo importante da matemática, tanto como objeto de estudo, como também instrumento para outras áreas (Almouloud, 2003). Esta envolve três formas do processo cognitivo que preenchem funções epistemológicas específicas: *visualização* para exploração heurística de uma situação complexa; *construção* (processo por instrumentos) de configurações, em que as ações representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados; *raciocínio*, processo que conduz para a prova e explicação (Duval, 1995). Essas três formas são entrelaçadas em sua sinergia e cognitivamente necessárias para a habilidade em geometria.

Pesquisadores da área como Pavanello (1989, 2004) e Lorenzato (1995) destacam a importância da Geometria para a formação dos indivíduos, não só sobre sua relação com a percepção do mundo físico, mas também na possibilidade de desenvolver a “[...] capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível” (Pavanello, 1989, p. 182). Nesse sentido, Lorenzato (1995, p.5) enfatiza que “Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida”. Além disso, este autor ainda evidencia que “[...] a Geometria valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar” (Lorenzato, 1995, p.6).

Em relação ao ensino de Geometria, Duval (2003) ressalta que para se ter acesso aos objetos matemáticos tem-se a necessidade da mobilização de registros de representações semióticas. Para ele, registro é “[...] um campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que lhe são próprios” (Duval, 2011, p.97). Sendo que representações semióticas são “[...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significado e de funcionamento” (Duval, 2012a, p.269). Desse modo, um registro de representação semiótica é um sistema semiótico que tem funções fundamentais em nível de funcionamento consciente.

Existem dois tipos de representações que envolvem diferentes registros, as representações discursivas e as representações não-discursivas. Cada uma delas pode ser expressa por meio de registros multifuncionais, onde os tratamentos não são algoritmizáveis e, de registros monofuncionais onde os tratamentos são principalmente algoritmos. Desta forma, os registros de representação podem ser classificados em:

Registro de Língua Natural (RLn), Registro Figural (RFg), Registro Simbólico na Representação Numérica (RNm), na Representação Algébrica (RAI), na Representação Tabular (RTb) e Registro Gráfico (RGr).

No entanto, em geometria, geralmente são requeridos registros figurais e em língua natural. Os registros figurais são empregados para a visualização e o reconhecimento de algumas das propriedades do objeto matemático em questão. Já, o registro em língua natural é utilizado para enunciar definições, teoremas, hipóteses, etc. A atividade matemática preconiza que estes precisam ser mobilizados simultaneamente de maneira interativa (Duval, 1999).

Ao considerar a relação entre o registro figural e o registro em língua natural Moran (2015) constatou em suas pesquisas como o tipo de registro figural (material manipulável, *software* de geometria, expressão gráfica) pode influenciar nos encaminhamentos matemáticos utilizados para resolver as tarefas. Ou seja, ao mobilizar diferentes registros figurais na resolução de problemas de geometria, fatores referentes aos tratamentos, aos registros, às apreensões e à resolução de problemas são influenciados pelo tipo de registro figural disponível, gerando consequências diretas na busca da solução do problema.

Diante disso, Moran (2015) destaca a importância da escolha das representações nas tarefas de geometria, pois “[...] os instrumentos que se toma para poder reproduzir uma figura dada direcionam a maneira de olhar” (Duval, 2005, p.14). Ou seja, dependendo do instrumento utilizado é possível resolver um problema de geometria mais facilmente ou não, por isso, cabe ao professor verificar as potencialidades e limitações destes instrumentos.

Em relação ao emprego de *softwares* que permitem gerar um ambiente dinâmico na mobilização de registros figurais constata-se que tarefas que exigem deduções matemáticas (língua formal), ele foi o mais favorável possibilitando o raciocínio dedutivo aliado ao tratamento figural. Além disso, proporcionou a movimentação de figuras e de elementos figurais, o que auxiliou no entendimento das hipóteses da tarefa e no raciocínio para sua solução (Moran, 2015).

Salazar e Almouloud (2015) afirmam que os ambientes de geometria dinâmica, quando utilizados estrategicamente, podem ser de grande utilidade para justificar resultados matemáticos. Além disso, podem auxiliar na elaboração de conjecturas e deduções de propriedades dos objetos matemáticos representados.

Assim, o trabalho de pesquisa que dá origem a este artigo se constitui tendo

como viés considerar a importância da Geometria e da mobilização simultânea dos registros figurais e em língua natural, bem como, das possibilidades de se trabalhar com os conceitos/conteúdos de geometria através da utilização dos *softwares* de geometria dinâmica, e ainda, por considerar a necessidade de mais pesquisas que enfatizem o campo da geometria utilizando os *softwares* além de (Soares, Ferner & Mariani, 2018), (Sena & Dorneles, 2013), (Clemente et al., 2015) que foram identificados em pesquisa bibliográfica realizada.

Cabe ressaltar que este texto apresenta um aprofundamento e ampliação das discussões expostas em Kiefer (2017). Além disso, estas análises serão tomadas na produção dos dados da dissertação de mestrado que está sendo constituída junto ao PPGEMEF/UFSM¹, pela mesma pesquisadora. O mesmo está organizado de modo a apresentar no referencial teórico alguns pressupostos sobre os registros de representação semiótica em geometria conforme Duval (2003, 2005, 2009, 2011, 2012, 2013), Moretti e Brandt (2015), Moran (2015), e também em relação aos *softwares* conforme Gravina (2001) e Basso e Notare (2015). Na sequência, são expostas escolhas metodológicas da pesquisa qualitativa (Lüdke & André, 1986), e o tratamento, organização e descrição analítica orientada pela Análise de Conteúdo (Bardin, 2016).

Após, são apresentadas análises de uma atividade que visa abordar o conceito/conteúdo de área de quadriláteros com o apoio do registro figural GeoGebra, cujas fontes de produção de dados foram os protocolos de acadêmicos do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) matriculados na disciplina Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática II (MTM 1060) durante o segundo semestre de 2017. As categorias de análise são constituídas a partir das apreensões figurais e da mobilização de registros. E, por fim, são apresentados alguns resultados e considerações finais.

2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM GEOMETRIA

De acordo com os pressupostos de Duval (2012a) para que haja compreensão conceitual de um objeto matemático (*noésis*) tem-se a necessidade da produção ou apreensão de uma representação semiótica (*semiósisis*). Além disso, o autor destaca a

¹Programa de Pós- Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física ofertado pela Universidade Federal de Santa Maria.

importância de coordenar ao menos dois registros de representação semiótica ou então a possibilidade de trocar de um registro para outro (Duval, 2003).

Em relação à *semiósis*, existem três atividades cognitivas inerentes: a formação, e as transformações de tratamento e de conversão (Duval, 2009). A *formação* constitui um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis com o fim de identificar uma representação de alguma coisa em determinado sistema. A *transformação de tratamento* consiste na transformação interna de um registro, ou seja, a representação inicial é transformada em outra, conservando o mesmo tipo de registro. Em termos de registro figural, destaca-se que o tratamento se efetua quando ocorrem reconfigurações na mesma, ou seja, mudar de posição conservando a mesma configuração e/ou decompô-la em suas unidades figurais, combinando-as para formar uma outra figura ou dividi-la em outras subfiguras que podem ou não ser reagrupadas para formar outras. Já, a *transformação de conversão* de uma representação consiste na transformação desta função em uma interpretação em outra representação, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial.

Na Figura 1 são expostos diferentes registros de representação semiótica mobilizados para representar um mesmo objeto matemático, neste exemplo, o quadrado. As setas pontilhadas indicam tratamentos que podem ser realizados e as setas contínuas indicam a transformação cognitiva de conversão, aqui correspondendo a representação do objeto no registro da língua natural para a representação do objeto no registro figural, ou vice-versa.

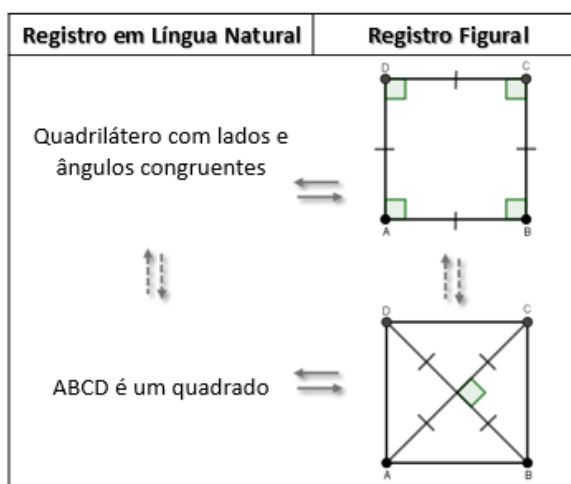


Figura 1: Exemplo de transformação de tratamento e de conversão
 Fonte: Produzido pelas autoras

As figuras podem ter diferentes interpretações dependendo de cada sujeito. Essas diferentes interpretações são denominadas por Duval (2012b) de apreensões, sendo estas classificadas em quatro tipos: sequencial, perceptiva, discursiva e operatória (Quadro 1).

Quadro 1: Apreensões figurais

APREENSÕES: interpretações autônomas do sujeito			
Sequencial	Perceptiva	Discursiva	Operatória
Descrição ou construção com o objetivo de reproduzir uma figura.	Organização/reconhecimento das unidades figurais de uma figura. Pode ocorrer de três formas: i) superposição de duas formas; ii) agrupamento de duas formas iguais; iii) repartição de uma forma.	Relação entre o registro figural e da língua natural; explicitação de outras propriedades matemáticas da figura, além das que são assinaladas por uma legenda ou hipóteses.	Modificações e reorganizações nas figuras. Classificadas em: i) modificação mereológica: dividir em outras de mesma dimensão (relação parte/todo); ii) modificação ótica: transformar em outra por meio de processos de aumentar, diminuir ou deformar; iii) modificação posicional: deslocar em relação a um referencial.

Fonte: Produção das autoras, adaptado de Duval (2012b)

De acordo com Moretti e Brandt (2015) as apreensões não aparecem de forma isolada. Além disso, uma apreensão pode ser mais mobilizada do que outra, dependendo do problema. E ainda, cada sujeito pode mobilizar apreensões diferentes do que outro. Com isso, destaca-se a pertinência ao estudo das apreensões, sendo que estas podem ser consideradas como um dos elementos que possibilitam organizar o ensino e a aprendizagem da geometria.

Neste trabalho evidenciamos a utilização do registro figural de representação semiótica por meio de um *software* de matemática dinâmica, mais especificamente, o GeoGebra². Duval (2013) destaca sua utilização, pois além deste tipo de recurso possibilitar uma função heurística, permite também uma abordagem “experimental” de relações e de propriedades geométricas. É possível, por exemplo, não só construir figuras, mas também explorar as transformações de figuras por simples deslocamento de um “objeto”.

Basso e Notare (2015, p. 5) destaca que esses ambientes constituem-se como um “[...] espaço em que os alunos podem tornar possíveis suas ideias informais, para dar início a um processo de coordenação com ideias mais formalizadas sobre determinado

² O GeoGebra é um *software* que está disponível para *download* em múltiplas plataformas; de código aberto; apresenta uma interface amigável; permite realizar atividades de geometria, álgebra, aritmética e estatística para qualquer nível ou modalidade de ensino.

assunto. ” Nesse sentido, Gravina (2001) corrobora com esta ideia quando destaca que os *softwares* de geometria

[...] incentivam o espírito de investigação em Matemática: sua interface interativa, aberta à exploração e à experimentação, disponibiliza os experimentos de pensamento, manipulando diretamente os objetos na tela do computador, e com realimentação imediata, os alunos questionam o resultado de suas ações/operações, conjecturam e testam a validade das conjecturas [...]. (Gravina, 2001, p.89-90).

No entanto, a Base Nacional Comum Curricular- BNCC (Brasil, 2017) evidencia que é necessária a integração dos *softwares* a situações que levem a reflexão e à sistematização, ou seja, não basta apenas usar esses recursos, é preciso planejar ações a partir de uma teoria de aprendizagem. Nesse sentido, Moran (2015) ainda chama a atenção de que apesar dos *softwares* serem dinâmicos e permitirem a movimentação das unidades figurais, não se pode generalizar conclusões e resultados que são verdadeiros somente para casos particulares, no caso, por meio de um exemplo. Assim, destaca-se a importância da demonstração em matemática, ou seja, de mobilizar a apreensão discursiva.

3 ABORDAGEM METODOLÓGICA

Esta pesquisa caracteriza-se como qualitativa, pois, de acordo com Lüdke e André (1986), neste tipo de pesquisa busca-se focar a realidade de forma complexa e contextualizada, possuindo um plano aberto e flexível, bem como uma riqueza em dados descritivos, preocupando-se em retratar a perspectiva dos participantes. Além disso, a técnica escolhida foi a Análise de Conteúdo (Bardin, 2016) que se constitui em identificar as estruturas e os elementos do conteúdo para assim explicar suas diferentes características e significados.

A Análise de Conteúdo é organizada em torno de três polos cronológicos: i) Pré-análise: seleção de questões, elaboração da atividade e organização de análises preliminares a partir das possíveis respostas; ii) Exploração do material: aplicar e categorizar a partir das apreensões e da mobilização de registros; iii) Tratamento dos resultados e interpretações: aprimoramento e sistematização dos resultados das análises a fim de torná-los válidos e significativos (Bardin, 2016).

Neste trabalho as fontes de produção de dados são os protocolos de acadêmicos do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)

matriculados na disciplina Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática II (MTM 1060) durante o segundo semestre de 2017³. A atividade aqui apresentada é composta por oito itens e visa explorar os conceitos/conteúdos de área de quadriláteros com enfoque nas apreensões figurais, partindo da utilização do *software* GeoGebra.

Para tanto, foi disponibilizado aos participantes um arquivo ggb⁴ e uma folha impressa com os questionamentos desta atividade (Figura 2).

ATIVIDADE II - EXPLORANDO QUADRILÁTEROS (Adaptado de Obmep, 2017, Q14, N2, F1)

7) Abra e analise o ARQUIVO 7. Selecione a caixa IMAGEM 7 e responda:

7a) Descreva o que você observa na Figura 1.

7b) Qual é a área dessa figura? Descreva, com detalhes, como você a obteve.

8) O que você pode afirmar sobre cada quadrilátero que compõem a Figura 1? Clique duas vezes no botão REINICIAR para voltar a configuração inicial.

9) O que você pode afirmar sobre a figura geométrica formada pelos pontos XYZW? Argumente matematicamente.



10) Qual é a posição relativa aos segmentos XZ e YW? Justifique matematicamente.

11) Clique na IMAGEM 11. Rearranje os quatro quadriláteros da Figura 1 na Figura 2, conforme as instruções:

- Devem ser utilizadas todas as peças;
- Não pode ter sobreposição;
- O quadrado interno da Figura 2 não pode ser preenchido.

Responda:

11a) Represente na figura abaixo todos os movimentos que você realizou para rearranjar os quatro quadriláteros da Figura 1 na Figura 2.

11b) Qual é a área do quadrado ABCD da Figura 2? Justifique sua resposta apontando argumentos.

11c) Qual é a área total da Figura 2?

Figura 2: Atividade proposta
Fonte: Produzida pelas autoras

Ressalta-se que essa atividade foi embasada na Questão 14, proposta na primeira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep) de 2017, para o nível 2 que corresponde ao 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. Com o intuito de explorar a conversão entre a representação figural e em língua natural nos itens de 7 a 10 optou-se por omitir as informações dadas no problema original, “pelo centro do quadrado da Figura 1 traçam-se duas retas perpendiculares, que o dividem em quatro quadriláteros iguais”. Além disso, buscou-se explorar a apreensão operatória ao ser solicitada a reorganização dos quadriláteros da Figura 1 para a Figura 2 do arquivo elaborado no GeoGebra. Dessa forma, diferindo da questão original onde os quadriláteros já estavam rearranjados.

³Esta atividade faz parte de uma sequência didática composta por três atividades, totalizando 25 itens. Por esse motivo a numeração exibida nos subitens e dos arquivos está em desacordo, pois segue a numeração da sequência didática.

⁴Disponível no link <https://www.geogebra.org/classic/DE57gBkK>

4 INTERPRETAÇÃO DA ATIVIDADE E ANÁLISE DOS RESULTADOS

A atividade foi aplicada no horário regular da disciplina em duas horas/aula. Estavam presentes oito alunos, sendo que estes se dispuseram em três duplas e dois deles preferiram desenvolver a atividade individualmente. Diante disso, os protocolos que contém as respostas para os questionamentos da atividade serão denominados por D, F, G (duplas), H e I (individualmente).

Com o intuito de aproximar os dados produzidos a partir de cada registro figural explorado optou-se por expor todos os questionamentos referentes à Figura 1 do arquivo do GeoGebra disponibilizado, ou seja, os itens 7 a 10 e depois os questionamentos referentes à Figura 2 do mesmo arquivo, ou seja, os subitens de numeração 11.

Para os primeiros subitens da atividade (7 a 10) dever-se-ia abrir o arquivo indicado e selecionar “IMAGEM 7”. Na Figura 3 é possível observar esses subitens, bem como, a tela correspondente exibida ao clicar em “IMAGEM 7”.

ATIVIDADE II - EXPLORANDO QUADRILÁTEROS (Adaptado de Obmep, 2017, Q14, N2, F1)

7) Abra e analise o ARQUIVO 7. Selecione a caixa IMAGEM 7 e responda:
7a) Descreva o que você observa na Figura 1.
7b) Qual é a área dessa figura? Descreva, com detalhes, como você a obteve.

8) O que você pode afirmar sobre cada quadrilátero que compõem a Figura 1?
Clique duas vezes no botão REINICIAR para voltar a configuração inicial.

9) O que você pode afirmar sobre a figura geométrica formada pelos pontos XYZW? Argumente matematicamente.

10) Qual é a posição relativa aos segmentos XZ e YW? Justifique matematicamente.

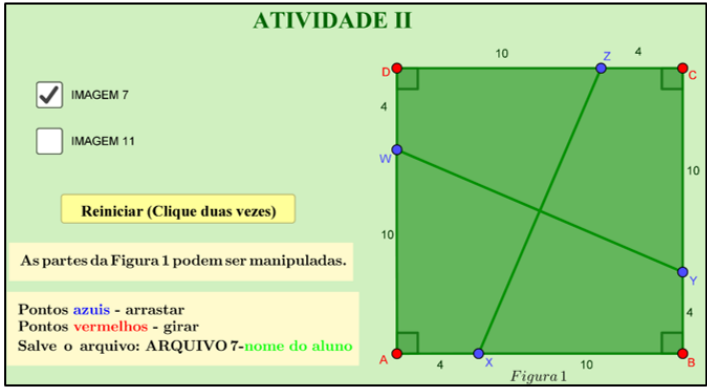


Figura 3: Descrição dos Itens de 7 a 10
Fonte: Produzido pelas Autoras

No subitem 7a) solicita-se a descrição do que se observa na Figura 1 do arquivo. Desse modo, buscamos explorar as maneiras de ver de tal figura (apreensão perceptiva). Por exemplo, poderíamos ver por sobreposição de um quadrado e dois segmentos perpendiculares em seu interior, ou ainda, de quatro quadriláteros sobrepostos a um quadrado, ou de outro modo, através da justaposição de quatro quadriláteros. Já no item 7b) seria necessário concluir que a área da Figura 1 corresponderia à área de um quadrado de lado 14 cm.

Na Figura 4⁵ são apresentadas as respostas do subitem 7a). Notou-se que todos os protocolos continham uma solução satisfatória, com exceção dos protocolos H e I que apresentavam alguns termos equivocados em suas respostas, como “trapézios” e “faces”, respectivamente.

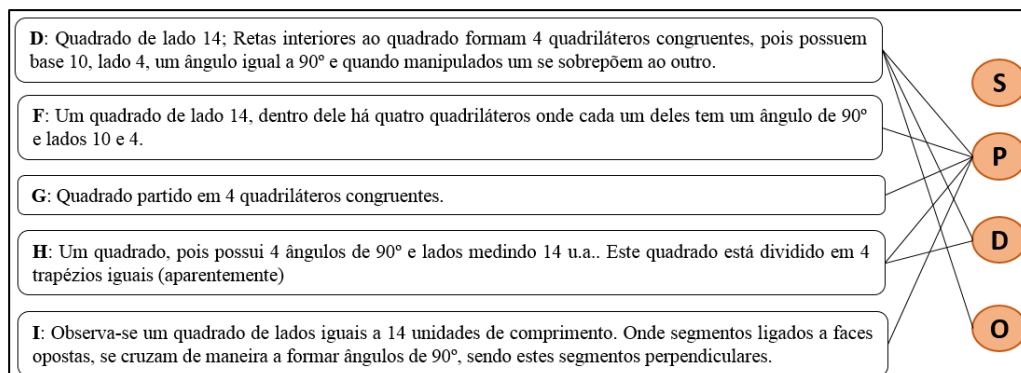


Figura 4: Respostas do subitem 7a)

Fonte: Dados da pesquisa

A apreensão perceptiva foi mobilizada por todos os participantes, sendo que os grupos D, F, G e H descreveram a Figura 1 do arquivo como sendo quatro quadriláteros sobrepostos a um quadrado. Já I descreveu como sendo a sobreposição de segmentos a um quadrado de lado 14. Entretanto, D e H ainda mobilizaram a apreensão discursiva ao justificarem que de fato está figura seria um quadrado.

Já o subitem 7b) foi realizado com sucesso por todos os participantes. Neste item eles precisaram interpretar as informações contidas na Figura 1 para concluir a área da figura geométrica, ou seja, que o quadrado possui lado medindo 14 unidades de comprimento (Figura 5).

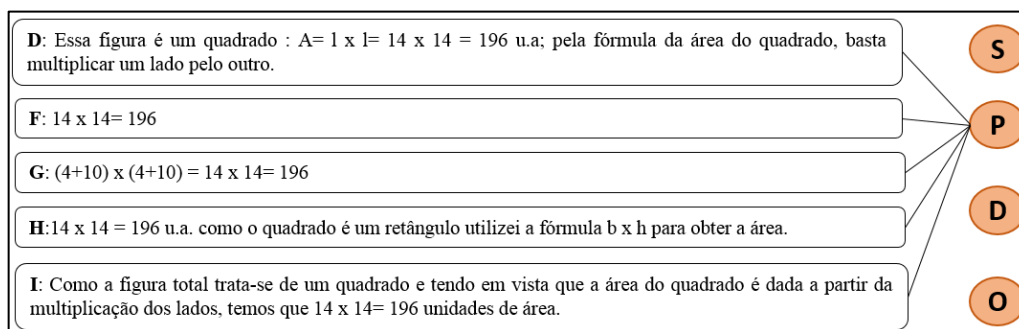


Figura 5: Respostas do para o subitem 7b)

Fonte: Dados da pesquisa

Os protocolos F e G apenas mobilizaram o registro numérico, enquanto que os protocolos D, H e I mobilizaram, além deste, também o registro em língua natural e o

⁵A indicação das letras S, P, D e O se refere às apreensões sequencial, perceptiva, discursiva e operatória, respectivamente. Os traços indicam a mobilização das apreensões em relação à resposta apresentada pelos participantes.

registro algébrico. Neste caso, justificando que, como a figura tratava-se de um quadrado, poderia ser utilizada a relação usual para encontrar a área deste. Em termos de apreensão, todos mobilizaram a apreensão perceptiva, pois necessitaram interpretar as informações fornecidas na Figura 1 do arquivo, ou seja, de que o quadrado possuía lado medindo $(10+4)$ unidades de comprimento.

No item 8 instigou-se a análise da Figura 1 a fim de se identificar alguma regularidade em relação aos quadriláteros que a compõem, ou seja, que eles são congruentes. Para tanto, os quadriláteros que formavam esta figura poderiam ser movimentados na tela do computador, o que possibilitaria fazer a sobreposição dos mesmos. Cabe ressaltar ainda que criamos o botão REINICIAR neste arquivo, cuja função era de posicionar os quadriláteros na sua posição inicial. Além disso, destaca-se que apenas sobrepor os quadriláteros não é condição suficiente para se concluir que estes seriam congruentes.

Entretanto, nas respostas apresentadas por todos participantes, exceto I, afirmaram que os quadriláteros eram congruentes e justificaram utilizando a estratégia da sobreposição. Já, o protocolo I, afirmou que os quatro quadriláteros possuíam, cada um, 49 unidades de área, pois considerou que todos têm mesma área, mas não justificou este fato. Dessa forma foram mobilizados os registros numérico, língua natural e figural pelo participante I, e os registros em língua natural e figural pelos demais.

Nos itens 9 e 10, se buscou explorar informações referentes aos segmentos que se encontravam no interior do quadrado da Figura 1 do arquivo. Sendo que, no item 9 se pretendia concluir que a figura geométrica formada pelos pontos X, Y, Z e W seria um quadrado. E a partir desta informação, no item 10, constatar que a posição relativa dos segmentos \overline{XZ} e \overline{YW} são perpendiculares, pois são diagonais do quadrado $XYZW$.

Ainda, referente ao item 9, todos os protocolos foram categorizados como parcialmente satisfatórios, pois os participantes concluíram que a figura geométrica formada pelos pontos X, Y, Z e W era um quadrado. Entretanto, justificaram ou demonstraram a congruência a partir dos lados desta figura considerando que estes seriam a hipotenusa dos triângulos retângulos com catetos medindo quatro e dez unidades de comprimento, respectivamente. Todavia, nenhum dos participantes fez referência ao valor dos ângulos internos do quadrilátero de lado $\sqrt{116}$ o que o diferencia de um losango.

Além disso, todos os participantes mobilizaram a apreensão discursiva e a perceptiva, ao perceberem que os lados da figura $XYZW$ correspondem às hipotenusas

dos triângulos congruentes. Alguns justificaram mobilizando registros simbólicos, figurais, algébricos e em língua natural (Protocolo D), enquanto outros realizaram um encadeamento lógico um pouco mais elaborado (Protocolo F) (Figura 6).

D: Formam um quadrado. Ao ligar os pontos formando os segmentos $WZ = ZY = YX = XW$, que são de mesma medida, pois formam com os lados do quadrado triângulos retângulos.

$x^2 = a^2 + b^2$ $XY = YZ = ZW = WX = \sqrt{116}$
 $x = 10^2 + 4^2$
 $x = \sqrt{116}$

F: É um quadrado. Os pedaços que sobraram do quadrado inicial com o quadrado $XYZW$ formam triângulos retângulos congruentes pelo caso LAL, com isso, podemos calcular o lado do quadrado.

$c^2 = a^2 + b^2$ Com isso, os segmentos $XY = YZ = ZW = WX$ que tem módulo da distância $\sqrt{116}$.
 $c = \sqrt{10^2 + 4^2}$
 $c = \sqrt{116}$

G: Traçando os segmentos $XY = YZ = ZW = WX$ obtemos um quadrado. Quando traçamos os segmentos percebemos que formou-se 4 triângulos retângulos congruentes (XY, YCZ, ZDW, WAX). Nota-se que os lados dos quadrados é exatamente a hipotenusa de cada triângulo. Portanto, $XY = YZ = ZW = WX$

H: A figura $XYZW$ é um quadrado, pois podemos observar que no lado de fora de $XYZW$ possuímos 4 triângulos retângulos que possuirão hipotenusas de mesma medida, medida esta que será o lado do quadrado.

I: Temos que $XYZW$ é um quadrado, e ao analisarmos os cantos do quadrado $ABCD$ temos que existem triângulos (por exemplo, WZD) com lados 10, 4 e x . Pela relação $a^2 = b^2 + c^2$, temos $a^2 = 10^2 + 4^2$, $a = 10,77$ unidades de comprimento, sendo este o lado do quadrado $XYZW$.

Labels on the right: S, P, D, O

Figura 6: Respostas apresentadas pelos participantes para o item 9

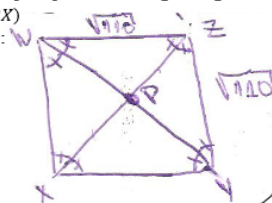
Fonte: Dados da pesquisa

No item 10, constatou-se que todos os protocolos apresentaram respostas satisfatórias. Os participantes F, G, H e I utilizaram a informação de que o quadrilátero $XYZW$ era um quadrado e que conseqüentemente a posição relativa entre os segmentos \overline{XZ} e \overline{YW} , diagonais da figura, seriam perpendiculares. Já o protocolo D utilizou argumentos mais elaborados para justificar que o ângulo de interseção entre os dois segmentos era de 90° (Figura 7).

Cabe ressaltar ainda que, todos os protocolos mobilizaram a apreensão perceptiva, pois os participantes identificaram propriedades a partir da Figura 1 do arquivo, por exemplo, que \overline{XZ} e \overline{YW} são as diagonais do quadrado. Já a apreensão discursiva foi mobilizada ao utilizarem propriedades matemáticas que não estavam expostas nem na figura nem no enunciado, como, por exemplo, que as diagonais de um quadrado são perpendiculares.

D: São perpendiculares.

- Considera-se $\hat{\gamma}$ ângulo 45° , pois as diagonais do quadrado também são as bissetrizes dos ângulos.
- Formamos 4 triângulos WZP, ZPY, YPX e XWP que serão isósceles, pois possuem 2 ângulos iguais, logo, lados opostos temos ângulos iguais (logo $WP = PY = ZP = PX$)
- Sabemos que a soma dos ângulos de um triângulo é 180° , temos que:
- $W\hat{P}Z = 180^\circ - P\hat{Z}W - Z\hat{W}P = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$
- $X\hat{P}W = 180^\circ - P\hat{W}X - W\hat{X}P = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$
- $X\hat{P}Y = 180^\circ - P\hat{X}Y - P\hat{Y}X = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$
- $Y\hat{P}Z = 180^\circ - P\hat{Z}Y - P\hat{Y}Z = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$
- Logo, $W\hat{P}Z = X\hat{P}W = X\hat{P}Y = Y\hat{P}Z = 90^\circ$ e $YW \perp XZ$.



F: Como já sabemos que $XYZW$ é um quadrado, então os segmentos XZ e YW são as diagonais deste quadrado. Temos que elas são perpendiculares.

G: Os segmentos XZ e YW são as diagonais do quadrado $XYZW$. Por propriedade do quadrado as diagonais são perpendiculares.

H: São perpendiculares, pois estes segmentos são as diagonais do quadrado $XYZW$.

I: A posição relativa de XZ e YW é, tal que há apenas um ponto em comum, são definidas como concorrentes. São também as diagonais do quadrado $XYZW$, tendo 90° na sua interseção.

Figura 7: Respostas dos participantes para o item 10
 Fonte: Dados da pesquisa

Para o item 11 da atividade (Figura 8), era necessário clicar em “IMAGEM 11”, onde seria exibida a Figura 2 do arquivo. O desafio inicial era rearranjar na Figura 2 os quatro quadriláteros apresentados na Figura 1. Sendo que todas as peças deveriam ser utilizadas, não poderia haver sobreposição e a região do quadrado menor da Figura 2 não poderia ser preenchida. No subitem 11a) deveria ser representado os movimentos realizados para a conclusão deste desafio.

11) Clique na IMAGEM 11. Rearranje os quatro quadriláteros da Figura 1 na Figura 2, conforme as instruções:

- Devem ser utilizadas todas as peças;
- Não pode ter sobreposição;
- O quadrado interno da Figura 2 não pode ser preenchido.

Resposta:

11a) Represente na figura ao lado todos os movimentos que você realizou para rearranjar os quatro quadriláteros da Figura 1 na Figura 2.

11b) Qual é a área do quadrado $ABCD$ da Figura 2? Justifique sua resposta apontando argumentos.

11c) Qual é a área total da Figura 2?

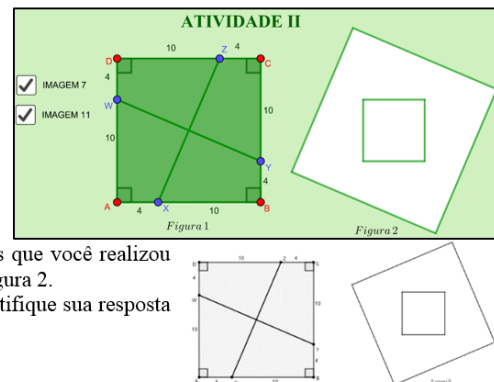


Figura 8: Descrição do Item 11
 Fonte: Produzido pelas Autoras

Nos itens 11b) e 11c) exploramos a área do quadrado $ABCD$, bem como a área total da Figura 2. Para resolver tais itens era necessário mobilizar a apreensão perceptiva ao se concluir que a medida do lado do quadrado $ABCD$ é dada pela subtração das medidas conhecidas, ou seja, dez e quatro, obtendo assim a medida de comprimento seis, e, portanto, 36 unidades de área. Já, no subitem 11c) observamos que a área total da Figura 2 correspondia a composição das áreas do quadrado $ABCD$ mais a área dos

quatro quadriláteros, sendo que esta última já havia sido calculada no subitem 7b).

Todos os protocolos tiveram uma resposta satisfatória para o subitem 11a), mobilizando a apreensão operatória posicional. Os participantes D, F, G e I realizaram apenas movimentos de translação, como exemplificado na Figura 9.

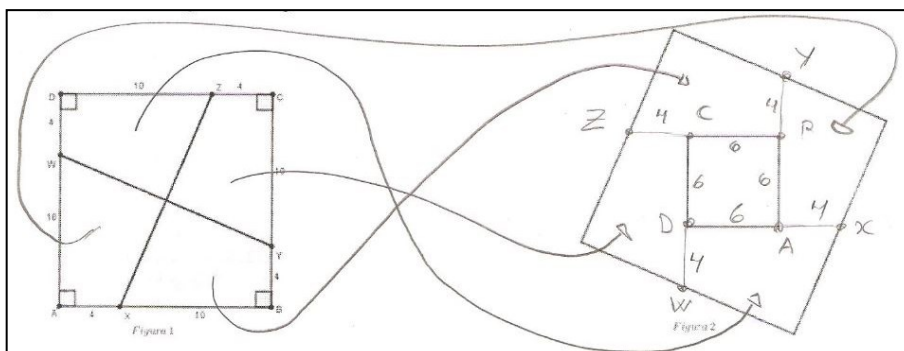


Figura 9: Resposta do subitem 11a) apresentada no protocolo F
Fonte: Dados da pesquisa

Ao se analisar os protocolos referentes aos subitens 11b) e 11c) constatamos que todos expuseram respostas satisfatórias e mobilizaram a apreensão perceptiva e discursiva ao articularem os dados da figura com uma justificativa. No subitem 11c), em particular, observamos no protocolo D apenas o registro numérico, enquanto que nos demais identificamos também o registro em língua natural (Figura 10).

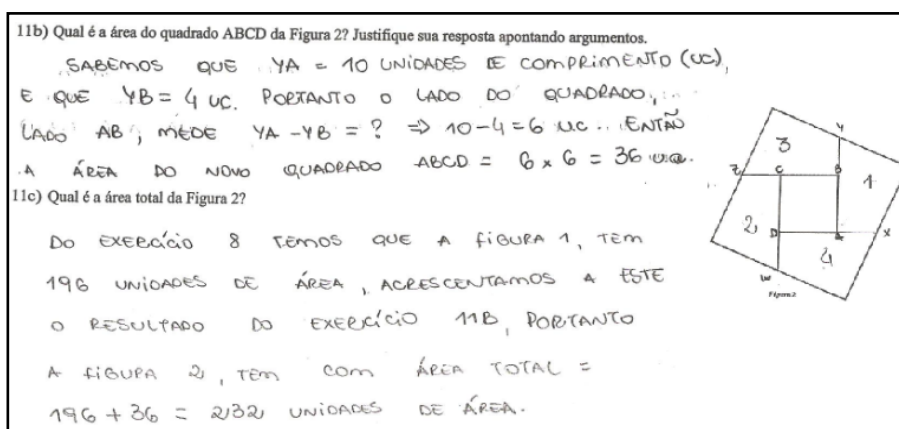


Figura 10: Resposta dos subitens 11b) e 11 c) apresentada no protocolo I
Fonte: Dados da pesquisa

Ressalta-se que o registro figural de representação semiótica enfatizado foi o *software* de geometria. Entretanto, a expressão gráfica também foi utilizada quando os participantes fizeram o registro figural (a mão livre) em seus protocolos. Acredita-se que a utilização de algum tipo de material manipulável possa ser um facilitador na realização do item 11, ou seja, para rearranjar as figuras que compõem o quadrado.

No Quadro 2 são expostas de maneira sintetizada as apreensões e representações mobilizadas a partir da análise dos protocolos em relação a todos os itens da atividade proposta.

Quadro2: Síntese das apreensões e registros mobilizados

Item	Dupla/ Indivíduo	Apreensões				Registros de Representações			
		S	P	D	O	RLn	RFg	RNm	RaL
7a)	F, G, I		x			x	x		
	H		x	x		x	x		
	D		x	x	x	x	x		
7b)	F, G		x				x	x	
	D, H, I		x			x	x	x	X
8	D, F, G, H		x			x	x		
	I		x			x	x	x	
9	D, F, I		x	x	x	x	x	x	x
	G, H		x	x	x	x	x		x
10	D		x	x		x	x	x	
	F, G, H, I		x	x		x	x		
11a)	D, F, G, H, I		x		x		x		
11b)	D, F, G, H, I		x	x		x	x	x	
11c)	F, G, H, I		x	x			x	x	

Fonte: Produzido pelas autoras

Nas respostas apresentadas constatamos que foram mobilizadas as apreensões perceptiva, discursiva e operatória. Sendo que a apreensão perceptiva foi a mais evidenciada, apareceu em todos os itens. Acreditamos que a apreensão sequencial não foi mobilizada pois não havia nenhum item que requeria a descrição/construção de uma figura.

Em termos de mobilização de registros podemos perceber a relação entre o registro figural e de língua natural. Estes dois registros foram os mais mobilizados e ainda, simultaneamente. Entretanto, este fato não ocorreu nos subitens 7b) e 11c) pelo fato destes solicitarem registros numéricos para a resolução e também no subitem 11a), pois este requeria a mobilização dos quadriláteros apresentados na Figura 1 do arquivo para a Figura 2.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica em Geometria foi, sem dúvida, primordial para esta investigação, direcionando o modo como foram elaborados os instrumentos de pesquisa e os resultados descritos nas análises. Cabe ressaltar que a classificação realizada de acordo com as apreensões no decorrer da atividade pode não

ser a mesma, dependendo diretamente do participante que a realiza. Isso se deve ao fato de que, cada participante pode mobilizar diferentes apreensões para resolver a atividade, bem como uma ou mais apreensões simultaneamente.

Por fim, concluímos que a descrição feita neste artigo embora inserida em uma pesquisa maior possa contribuir na área de Educação Matemática, mais especificamente, no ensino de Geometria e na formação de professores que buscam empregar diferentes registros figurais de representação semiótica em sua prática docente. Além disso, acredita-se que a atividade apresentada pode ser adaptada e aplicada a alunos da Educação Básica de forma a mobilizar diferentes apreensões figurais, conforme observado junto aos participantes deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Almouloud, S. A. (2003) Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. In: *Aprendizagem em Matemática. Registros de representação semiótica*. Campinas: Papyrus p.125-148.
- Bardin, L. (2016) *Análise de Conteúdo*. São Paulo: Edições 70.
- Basso, M. V. A.& Notare, M. R. (2015). Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. *Revista Novas Tecnologias na Educação*, v. 13, n. 2, 1-10.
- Brasil, Ministério da Educação (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília.
- Clemente, J. C, et al. (2015) Ensino e Aprendizagem da Geometria: Um estudo a partir dos periódicos em Educação Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora, In: *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática*.
- Duval, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.
- Duval, R (1999) *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Tradução: Myriam Vega Restrepo. Cali, Colombia: Universidade del Valle.
- Duval, R (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.). *Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica*. Campinas, São Paulo: Papyrus.
- Duval, R (2005). Les conditions conitives de l'apprentissage de la geometrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnement et coordination de leur fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n. 10, p. 5-53.

- Duval, R (2009). *Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Tradução. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- Duval, R (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas*. Tânia M. M. Campos (Org.). Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.
- Duval, R (2012a). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. *Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat*: Florianópolis, v.07, n.1, p.118-138
- Duval, R (2012b). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. *Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat*: Florianópolis, v.07, n.2, p. 266-297.
- Duval, R (2013). Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, v.2, n.3.
- Gravina, M. A. (2001) *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Kiefer, J. G. (2017) *Representações Semióticas no estudo de área de figuras planas: uma abordagem com o GeoGebra por meio de questões da OBMEP*. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação em Matemática-Licenciatura) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.
- Lorenzato, S. (1995) Porque não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista*. v.3, n.4, p. 3-13.
- Lüdke, M. & André, M. E. D. A. (1986) *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*, São Paulo: EPU.
- Moran, M. (2015) *As apreensões em Geometria: um estudo com professores da Educação Básica acerca de registros figurais*. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá.
- Moretti, M. & Brandt, C. F. (2015) Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v. 17, n. 3, p. 597-616.
- Pavanello, R. M. (1989) O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica. (Dissertação em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- Pavanello, R. M. (2004) Por que Ensinar/aprender Geometria? In: *Anais VII Encontro Paulista de Educação Matemática*.
- Salazar, J. V. F.; & Almouloud, S. A. (2015) *Registro figurar no ambiente de geometria dinâmica*. *Educação Matemática Pesquisa* (Online), v. 17, p. 919-941, 2015.

Sena, R. M & Dorneles, B. V. (2013) Ensino de Geometria: rumos da pesquisa (1991-2011). *REVEMAT*. Florianópolis, v.8, n.1, p.138-155.

Soares, M. A. S. Ferner, D. L. & Mariani, R. C. P. (2018) Visualização em produções que exploraram software: uma metanálise no campo da geometria. In: Nilce Fátima Scheffer; Eliziane Comachio; Danuza Cenci. (Org.). *Tecnologias da informação e comunicação na Educação Matemática: articulação entre pesquisas, objetos de aprendizagem e representações*. Curitiba: CRV. p. 117-137.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA

Apreensões figurais mobilizadas por licenciandos em Matemática: um estudo sobre área de quadriláteros a partir do software GeoGebra

Juliana Gabriele Kiefer

Mestranda em Educação Matemática e Ensino de Física (UFSM)

Universidade Federal de Santa Maria, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Santa Maria, Brasil

juliana_kiefer@hotmail.br

<https://orcid.org/0000-0003-4912-5747>

Inês Farias Ferreira

Doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil (2002)

Professora Titular da Universidade Federal de Santa Maria, Brasil

Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Matemática, Santa Maria, Brasil

inesferreira10@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-3930-4728>

Rita de Cássia Pistóia Mariani

Doutorado em Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica - SP, Brasil(2006)

Professora Associada da Universidade Federal de Santa Maria, Brasil

Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Matemática, Santa Maria, Brasil

rcpmariani@yahoo.com.br

<https://orcid.org/0000-0002-8202-8351>

Endereço de correspondência do principal autor

Rua João Aquino, nº 162

Bairro Vila Nova

Santiago, RS, Brasil

CEP: 97714171

AGRADECIMENTOS

Agradecimento aos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática (UFSM) participantes desta pesquisa.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

Concepção e elaboração do manuscrito: J. G. Kiefer, I. F. Ferreira, R. C. P. Mariani

Coleta de dados: J. G. Kiefer, R. C. P. Mariani

Análise de dados: J. G. Kiefer, I. F. Ferreira, R. C. P. Mariani

Discussão dos resultados: J. G. Kiefer, I. F. Ferreira, R. C. P. Mariani

Revisão e aprovação: J. G. Kiefer, I. F. Ferreira, R. C. P. Mariani

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA:

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO:

Não se aplica

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM:

Não se aplica



APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA:

Não se aplica

CONFLITO DE INTERESSES:

Não se aplica

LICENÇA DE USO

Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution](#) (CC BY) 4.0 International. Esta licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

PUBLISHER

Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR

Mérciles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista

Recebido em: 07-05-2019 – Aprovado em: 01-04-2020

