Artigo Original

REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

# Algumas reflexões sobre a definição de probabilidade

## Some reflections about the definition of probability

**André Gustavo Campos PEREIRA**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil
andre.gustavo.campos.pereira@gmail.com.br
https://orcid.org/0000-0001-6835-2318

**Francisco Erivan de Almeida JÚNIOR**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil
matematicaufrn@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8131-6204

**George Luiz Coelho CORTES**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil
glcc1@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0003-2482-7259

**Igor Bruno Dantas NUNES**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil
profigor.nunes@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-7718-9978

**George Homer Barbosa de MEDEIROS**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil
homer.12@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8979-2662

**Arthur Henrique da SILVA**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil
arthurmat14@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7239-3585

**Fernando Montanaro Paiva de ALMEIDA**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil
fer_naro@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0003-4699-1826

**Gleydson Medeiros de SOUZA**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil
professortp.gleydson@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4468-9941

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

## RESUMO

Todos os dias nos deparamos com situações em que precisamos fazer escolhas. Algumas escolhas são bem simples como por exemplo, se você deseja ou não tomar um sorvete, se decidir por tomar, se vai querer que seja servido no copo ou numa casquinha, e depois ainda tem que escolher o(s) sabor(es). Em algumas destas escolhas temos preferências e em outras somos indiferentes (temos a mesma preferência para qualquer escolha). Se mesmo em casos simples vemos que a indiferença não é a regra, porque no estudo de probabilidade o foco é na indiferença (equiprobabilidade)? Este trabalho constata através da análise de livros, dissertações de mestrado bem como do resultado do teste aplicado com alunos, que o conceito de probabilidade sedimentado é aquele que nos obriga a aceitar a equiprobabilidade como a única forma de ver o mundo e que muito pouco tem sido feito recentemente para mudar esse quadro. Também relatamos que a forma como alguns compêndios tratam o tema pode dificultar o entendimento até mesmo do caso em que a equiprobabilidade é considerada.

**Palavras-chave:** Espaço amostral; Eventos; Equiprobabilidade; Probabilidade.

## ABSTRACT

Every day we face situations in which decisions have to be made. Some of them are very simple ones, e.g., whether you want an ice cream or not. In case you decide to have one, you have to decide if you want it in a plastic bowl or in an ice cream cone, and you still have to choose the ice cream flavor(s). Sometimes we have some preferences among all options presented, sometimes all options seem the same. Even in simple situations, partiality is always present, then why the teaching of probability (in middle/high school) focus on the indifference (equiprobability)? In this work we observed not only by the analysis of books and master dissertations but also by the analysis of the outcome of a test that was answered by students (high school and undergraduate), that the sedimented probability definition is the one that force us to accept the equiprobability as the only way to deal with stochastic happenings, and that very little has been made to change such picture. We also regard that the manner that some books illustrate the subject can harden the understanding even when equiprobability is considered.

**Keywords:** Sample space; Events; Equiprobability; Probability.

## 1 INTRODUÇÃO

Os instrumentos teóricos que fundamentam a Matemática, ao longo da História da Humanidade, quando associados a outros ramos do conhecimento, têm sido uma das alavancas do progresso, isto é, das grandes conquistas no processo civilizatório. Nehab (2019, p. 1) reconhece esse poder extraordinário atualmente, ao anunciar:

> Matemática, Ciência e Engenharia afetam praticamente tudo no nosso dia a dia: o tecido das nossas roupas, a luz elétrica, os prédios, os aparelhos de telefone celular que cada vez mais predominam nas nossas interações, os programas que rodam nesses aparelhos. Hoje em dia, não há progresso sem Matemática e computação.

Dentre os assuntos teóricos de importância na Matemática, podem ser mencionados os relacionados à capacidade de se determinar a chance de certos acontecimentos ocorrerem. Ingressa-se assim no estudo da probabilidade, o qual se associa, por exemplo, à Estatística e à Biologia, além de diversos outros campos do saber.

As incertezas nos momentos antecedentes à tomada de decisão precisam ser superadas ou reduzidas, a fim de que se evitem certas surpresas. Além dos componentes de incertezas, há situações em que se admite certa margem de aceitação de erro, ao se adotar este ou aquele procedimento. O fato óbvio é que os fenômenos físicos e sociais que os homens experimentam, não são, em sua maioria, de previsibilidade absoluta como certa ou impossível de suceder. A norma geral aponta, quase sempre, para a possibilidade de acontecer, ficando difícil mesmo quantificar o grau de “certeza” da ocorrência. Sendo assim, a subárea da Matemática que trata dessa quantificação é denominada Probabilidade.

Esse quadro, por si só, já indica preliminarmente a extrema utilidade do estudo da Probabilidade e da necessidade de sólido embasamento teórico, a partir das definições adotadas pela Matemática nesse assunto.

Este trabalho investiga as definições básicas relativas à Probabilidade, destacando sua conexão com a equiprobabilidade e a verificação da clareza com que livros didáticos e trabalhos acadêmicos abordam o assunto, visando propor eventuais sugestões de correção.

A pesquisa bibliográfica que serviu de base inicial do trabalho priorizou dissertações do Programa do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e diversos livros de Matemática destinados a níveis diferentes de ensino, tendo em vista que são obras cujos autores ou destinatários são professores do ensino básico, centro de interesse do citado programa, ao qual se vinculavam os autores deste artigo.

Além da referida pesquisa, foi realizado um teste com alunos do ensino médio e dos anos iniciais do curso de licenciatura da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), aspectos esses detalhados na subseção 2.2.

A escolha do tema desta investigação se deve ao fato de frequentemente se encontrar em livros didáticos, mesmos os recomendados pelo MEC (ver Portaria nº. 1.818, de 13 de novembro de 2006) para o ensino médio, definições eivadas de equívocos ou de lapsos lógicos, ao se convencionar Probabilidade e ao relacioná-la com equiprobabilidade. Esses transtornos metodológicos se contrapõem, portanto, a uma das "finalidades do ensino de Matemática: [...] valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações", conforme prescrito nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN). Além disso, criam dificuldades ao processo do ensino-aprendizagem sobre o assunto em pauta.

Avelar (2019, p. 26) já havia detectado, em certos compêndios, que "a definição clássica [de probabilidade] é dúbia, uma vez que utiliza a ideia de 'igualmente provável', que nada mais é que 'com probabilidade igual'". Afirma ainda que, nesses casos, "a definição é circular, porque está definindo essencialmente a probabilidade com seus próprios termos". Note, então, que esta investigação se torna útil, visto que cria a oportunidade de propor solução para contornar tal problema na definição, facilitando, portanto, a aprendizagem.

Outro aspecto que justifica a importância deste trabalho se deve ao fato de que a Probabilidade é citada, no âmbito dos PCN, como "uma das subáreas da Matemática e da Estatística, necessária à compreensão de fenômenos em universos [conjuntos] finitos", sendo especialmente utilizada em aplicações em outros ramos do conhecimento. Tal destaque recebido pelo assunto se confirma, ao se observar que, em todos os certames do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) já realizados de 2009 a 2019, lá está presente, no mínimo, uma questão envolvendo probabilidade, exigindo do candidato estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Funciona assim, de forma indireta, como uma maneira de preparar o estudante para desafios futuros na vida, conforme sinalizam os PCN, ao tratar da Matemática.

Resta, pois, reconhecer que esta investigação trata de assunto relevante no contexto do ensino de Matemática no ensino básico, tendo como objetivos gerais os citados a seguir:

- Apresentar os erros mais comuns, encontrados não apenas no material didático adotado no ensino básico, no que diz respeito às definições de probabilidade e equiprobabilidade de eventos, mas também nas dissertações do PROFMAT desenvolvidas com o objetivo de melhorar o ensino deste tópico, assim como em outras fontes nas quais tais lapsos teóricos incidem.
- Apontar as corretas definições de probabilidade e equiprobabilidade, destacando, dentre as fontes estudadas, aquelas que primaram pelo acerto na abordagem dos dois aspectos mencionados.
- Apresentar sugestões para adoção na abordagem do assunto probabilidade no ensino básico.

A fim de alcançar tais objetivos, este trabalho se estrutura, além desta seção introdutória, em mais duas outras seções, resumidamente assim descritas:

- A Seção 2 expõe as definições básicas que fundamentam o assunto, segundo as três principais correntes teóricas que abordam a probabilidade: clássica (ou de Laplace), frequentista e axiomática (ou de Kolmogorov), segmentação didática destacada por Biajoti (2013). Para isso, trechos de livros didáticos, como, por exemplo, os de Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo & Almeida (2018), Leonardo (2018), Smole & Diniz (2016) e Souza (2018), destinados ao ensino básico, tiveram seu conteúdo submetido a uma triagem, quanto à adequação na abordagem das definições de probabilidade e de equiprobabilidade. Ainda na mesma seção é apresentado o teste que foi aplicado em alunos do ensino médio da rede pública e privada e também em alunos calouros e do primeiro ano do curso de licenciatura em Matemática da UFRN. Em relação ao teste mencionado, está exposta a síntese da sua aplicação e da discussão sobre os resultados obtidos.
- A Seção 3 resume as principais considerações extraídas desta investigação; apresenta os principais erros cometidos por autores e alunos, no que diz

respeito à definição de probabilidade; propõe correções, em particular, nos livros didáticos investigados; e expõe sugestões úteis ao processo ensino-aprendizagem de probabilidade e equiprobabilidade, quando aplicado no ensino básico. Finalmente, colocam-se em destaque aspectos essenciais que não podem ser esquecidos por professores e alunos, quando lidarem com o estudo de Probabilidade, a fim de que sejam evitadas generalizações, quando na realidade se referem a definições cabíveis a situações particulares nas quais se evidenciam ocorrências de eventos equiprováveis.

## 2 REFLEXÕES SOBRE A DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE E O TESTE APLICADO

### 2.1 A definição de probabilidade em livros didáticos e trabalhos científicos

Nesta seção, são discutidos aspectos ligados à definição de probabilidade, que, em geral, auxiliam ou prejudicam a compreensão do assunto “probabilidade”, aspectos esses que foram identificados em obras listadas nas referências bibliográficas deste trabalho e reproduzem, em particular, falhas comuns em tantas outras obras similares.

Faz-se necessário iniciar tal discussão, tratando da dificuldade relativa ao sentido próprio do vocábulo “probabilidade”, uma vez que há enorme quantidade de conceitos associados a ele. Hand (2014, p. 44) assim comenta esse aspecto:

> A longa história da palavra “probabilidade” bem como sua importância e a confusão que ainda a rodeia, são reflexos do fato de que existem muitas outras palavras para conceitos muito relacionados. Estas incluem chances comparativas (“odds”), incerteza, aleatoriedade, chance, sorte, sina, destino, acaso, risco, azar, verossimilhança, imprevisibilidade, propensão e surpresa, além de outros. Existem também outros conceitos que tocam ideias similares tais como dúvida, credibilidade, confiança, plausibilidade e possibilidade e também ignorância e caos.

Prosseguindo a discussão sobre tais aspectos, é cabível supor que a seguinte pergunta surja com frequência nas salas de aula do ensino básico, onde se inicia o estudo do assunto em pauta: É preciso estudar probabilidade? Onde esse conhecimento será útil?

A resposta a essas questões advém de autores preocupados em ilustrar textos sobre o assunto. Sinalizam que, no mundo ao redor, identificam-se fenômenos que se diferenciam quanto à previsibilidade dos resultados a se obter. Em uma categoria se agrupam aqueles cujos resultados são antecipadamente sabidos, ou seja, são sempre os mesmos, os previamente esperados, quando reproduzidos sob as mesmas condições. Por outro lado, há outra categoria de fenômenos que não necessariamente fornecem o mesmo resultado, ainda que não se modifiquem as condicionantes dos experimentos, por seguidas repetições.

Na categoria de experimentos cujos resultados são inalterados, quando realizados sob as mesmas condições, aponta a temperatura de fervura da água, que, em condições normais de temperatura e pressão (CNTP), atinge seu ponto de ebulição sempre em 100°C. O tempo de queda livre de determinado objeto é outro exemplo em que, repetindo-se o experimento, obtém-se o mesmo resultado. Já no grupo de experimentos que não necessariamente reproduzem os mesmos resultados, podem ser listadas as seguintes situações, segundo Oliveira (2013, p. 19 - 21):

a) placar de um jogo de futebol;
b) quantidade de ganhadores da mega sena;
c) número de chamadas telefônicas que chegam a uma central das 12:00hs às 14:00hs;
d) tempo de vida útil de uma lâmpada de certa marca;
e) seleção, ao acaso, de um item de um lote produzido por certa fábrica, para verificar sua qualidade: defeituoso (fracasso) e bom (sucesso);
f) número de nascimentos registrados em uma região durante cinco anos.

Aos primeiros chamamos fenômenos determinísticos e aos outros, fenômenos aleatórios, aos quais a Teoria das Probabilidades, uma das áreas da Matemática, se dedica a estudar.

Fica, portanto, cada vez mais evidente que a incerteza da ocorrência está associada aos fenômenos aleatórios, razão da existência da Teoria das Probabilidades. Além disso, ao tratar dessa teoria, é imprescindível observar certa ordem na apresentação das ideias. Por exemplo, não se deve fazer menção a eventos aleatórios, sem antes defini-los, equívoco esse registrado em Carloni (2010). Esse tipo de equívoco, no modo de “introduzir” o assunto, certamente dificultará o prosseguimento dos estudos, pois o leitor (o aluno) poderá perder o foco, visto que se depara com um conceito importante que não foi previamente abordado. Conforme já exposto, a sequência das definições estabelecidas não seguiu uma lógica rigorosa de apresentação. Mais grave ainda que desobedecer a ordem de apresentação dos aspectos em destaque é mencionar eventos aleatórios sem defini-los, ao longo da obra, conforme verificado em Souza (2018) e em Oliveira & Fernández (2010).

Estando bem convencionado o que seja evento aleatório, entendida sua existência e reconhecida a necessidade de estudá-lo, surge a seguinte questão: - Como estudar certo fenômeno que pode fornecer resultados totalmente diferentes, embora repetido sobre as mesmas condições?

Na expectativa de reduzir esse quadro difuso, é recomendável destacar que, ao se iniciar o estudo de um fenômeno aleatório, não é preciso saber qual resultado ocorrerá, embora se tenha certeza de que o fenômeno se suceda. Por exemplo, ao se lançar um dado tradicional, obtém-se um número (de 1 a 6), correspondente ao da face voltada para cima, porém, antes do lançamento, se desconhece qual deles acontecerá. A partir dessa firme percepção é que emerge a necessidade de se elaborar, construir, um conjunto que contemple todos os casos possíveis de suceder: o espaço amostral.

Ao fazer considerações sobre espaços amostrais, Lainetti (2019), por exemplo, indica que o mesmo experimento pode ser vinculado a espaços amostrais (conjuntos) diversos. Assim, se existe um conjunto ($\Omega$) que seja usado como espaço amostral para certo “fenômeno experimental”, então qualquer outro conjunto ($\Omega$’) que contenha o primeiro, pode ser utilizado como espaço amostral para aquele “fenômeno”. Observando $\Omega$ e $\Omega$’, o primeiro é subconjunto do último, isto é, $\Omega$ se refere certamente a uma situação específica do espaço amostral $\Omega$’. Então, é necessário ficar claro que qualquer conjunto “maior” que $\Omega$, isto é, que contenha $\Omega$, também conterá todos os subconjuntos possíveis do espaço $\Omega$. Daí o conjunto “maior” servirá como espaço amostral para todos os subconjuntos contidos em $\Omega$.

Dessa forma, o estudo sobre espaço amostral desperta curiosidade a respeito da utilidade e do significado de seus subconjuntos. Assim, por exemplo, ao se lançar um dado tradicional, a simples investigação, sobre o resultado ser par, é um caso típico que sugere a necessidade de se incluir os subconjuntos do espaço amostral nos estudos sobre fenômenos aleatórios. Tal experimento se refere à situação específica (subconjunto {2, 4, 6}) de certo fenômeno aleatório mais abrangente (conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}).

Retomando a ideia acerca dos lapsos cometidos em escritos sobre probabilidade, um erro bem comum é confundir os elementos do espaço amostral com a quantidade de elementos desse conjunto. Tal equívoco comete, por exemplo, Smole (2016), ao anunciar que os elementos do espaço amostral do lançamento de um dado são 6, ao invés de listá-los: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Martins (2019, p. 15 - 16), por sua vez, apesar de definir evento impossível e elementar, destacando-os com enumeração formal, não estabelece a mesma formalidade quando trata da definição de evento, o qual é apenas mencionado, sem o mínimo realce, em trecho frasal no meio do texto, como sendo qualquer um dos subconjuntos do conjunto definido como espaço amostral (Ω). Essa omissão prejudica a construção lógica do pensamento dedutivo sobre o assunto. O aspecto particular é definido sem que o geral tivesse sido estabelecido.

Em geral, nas obras investigadas, os subconjuntos dos espaços amostrais são definidos corretamente como eventos.

Expostas as considerações anteriores, cabe então a seguinte pergunta: Como medir a chance de ocorrência de cada evento de um espaço amostral?

A mensuração dessa chance é o resultado mais prático da aplicação da Teoria das Probabilidades e sua obtenção varia de acordo com a situação e a abordagem escolhida. Lainetti (2019), por exemplo, considera as seguintes abordagens: clássica ou laplaciana, frequentista, subjetiva, geométrica e axiomática. A maioria dos autores, no entanto, no intuito talvez de tornar mais simples, opta por classificá-las em frequentista, clássica e axiomática, o que já é suficiente para causar confusão, tendo em vista a complexidade do assunto, conforme observado em Oliveira (2013), que trata a abordagem subjetiva como sendo a axiomática. Em razão disso, esta investigação adota a linha mais simples, começando pela apresentação das definições mais comuns de probabilidade. Apesar de bastante usadas nas referências, não é raro ver atribuídas tais definições a autores diferentes.

A definição de probabilidade, segundo a ótica frequentista, é corroborada pela lei dos grandes números, como contribuição de Bernoulli, segundo Bernstein (1997). Salsa & Moreira (2008), por sua vez, credita a Von Misses o mesmo feito. Afastando dessa discussão sobre o criador, o fato importante é que, nessa abordagem, a probabilidade de um certo evento A é definida como a frequência relativa desse evento, quando o número de repetições cresce indefinidamente, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

onde $n(A)$ é quantas vezes o evento $A$ aconteceu nas $n$ repetições realizadas.

Em Hazzan (2004), reforça-se a concepção de que a frequência relativa sugere uma informação quantitativa sobre a ocorrência de um evento, quando se repete o experimento por grande número de vezes. Segundo o mesmo autor, o que se deseja, de fato, é definir um número que seja "associado a cada evento, de modo que ele tenha as mesmas características da frequência relativa".

Iezzi et al. (2018), por sua vez, utilizam a sintaxe da representação de limites de função na definição de probabilidade por frequência relativa, embora o compêndio seja direcionado para o ensino médio, estágio escolar em que comumente o aluno ainda não está familiarizado com essa linguagem nem tampouco com a definição de limites. É óbvio que esse procedimento parece inadequado ao público citado e pode criar obstáculos à aprendizagem do assunto, os quais deveriam ser contornados ou evitados.

Já em Oliveira (2009), se observa que a definição de probabilidade frequentista é adequada por sua obra se direcionar a estudantes que já possuem maior afinidade e familiaridade com o formalismo matemático, isto é, com bagagem de conhecimentos mais aprofundados do que os exigidos durante o ensino médio convencional.

Então fica patente que a definição de probabilidade frequentista não se adequa ao ensino médio, visto que o estudante desse nível ainda não teve normalmente acesso à definição de limites de função na Matemática, noção essa que se insere somente nas competências exigidas ao ensino superior.

A definição mais frequentemente observada nos livros de ensino básico (fundamental e médio) e textos pesquisados, durante a presente investigação, foi a seguinte:

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favoráveis à ocorrência de A}}{\text{nº de casos possíveis}} = \frac{\#A}{\#\Omega} \qquad (1)$$

Salsa & Moreira (2008) creditam a Laplace a autoria original, embora em Hand (2014) esteja explícito que tal ideia já houvesse sido utilizada bem antes do primeiro registro do matemático francês, quando se começou a perceber, em determinados jogos, as quantidades relacionadas às seguintes observações: êxitos (jogadas vitoriosas), derrotas (jogadas perdidas) e todos os resultados (as jogadas computadas em geral). Autores diferentes e anteriores a Laplace, como Cardano, Galileu, de Moivre, dentre outros, marcaram tais registros em seus escritos, conforme sinalizam Lainetti (2019), Souza (2018) e Martins (2019).

O interessante é que para tal definição ser de fato verdadeira, impõe-se que qualquer subconjunto unitário, chamado em Morgado (2016), e Silva, Campos & Pereira

(2015) de eventos elementares, tenha a mesma chance de ocorrer, ou seja, se $a, b \in \Omega$ então $P(\{a\}) = P(\{b\})$, não importando quem sejam $a$ e $b$. As obras investigadas cujos autores observaram essa necessidade sinalizam essa imposição como parte presente na definição de espaço amostral chamado equiprovável. Assim, é saudável reiterar que a equiprobabilidade é uma propriedade peculiar de certos espaços amostrais, isto é, de determinados experimentos e se referem a fenômenos específicos. Portanto vale destacar que apenas nessas situações a citada característica (propriedade) do espaço amostral se integra perfeitamente à aplicação da definição clássica (ou de Laplace) de probabilidade.

Durante a investigação, foi constatado que, em alguns textos, como Oliveira & Fernández (2010), sequer os autores mencionam a equiprobabilidade, embora a utilizem na definição clássica de Probabilidade: vide (1). Há ainda registros, como em Souza (2018), em que se expressa espaço amostral equiprovável, sem que se defina seu significado. Com isso, fica a impressão de que o conceito é tão corriqueiro e de conhecimento público que não requer mais ser explicitado ou ser chamada a devida a atenção para ele.

Ao apresentar a definição clássica, vários autores tendem a incorrer no erro de convencionar probabilidade, a partir de uma propriedade sua: a da equiprobabilidade. A propriedade da equiprobabilidade é tratada de tal forma por autores que induzem os alunos a acreditar como muito natural que cada subconjunto unitário dos espaços amostrais em geral tenha a mesma probabilidade. Tudo se comportaria como, se medido cada evento elementar, isoladamente, o resultado obtido tivesse sempre o mesmo valor. A seguinte situação mostra como o conceito de equiprobabilidade não é natural: procedendo-se a pesagem de todos os indivíduos, em uma multidão, o resultado obtido seria o mesmo peso para cada um.

A ocorrência de eventos equiprováveis não é fato tão corriqueiro. Hand (2014) comenta que, mesmo quando se manipulam, em jogos, dados e moedas aparentemente idênticos, é muito difícil de que a chance relacionada a cada lado acontecer apresente a mesma medida, quando lançados. Sutis imperfeições, decorrentes da confecção ou do uso repetido do objeto, terminam danificando o material, na forma de amassados, microfissuras, perda de pedaços devido a quebras etc. Tudo isso vai contribuindo, para que a equiprobabilidade dificilmente seja garantida no ensaio experimental em foco.

Quanto à definição axiomática de Kolmogorov, alguns autores de livros didáticos do ensino básico começam a mencioná-la, ajustando-a ao caso dos espaços amostrais finitos, sem que creditem ao matemático russo a autoria da definição. Assim, a definição geral de probabilidade de Kolmogorov, mesmo não sendo aplicável ao ensino básico, devido ao fato de envolver uma soma e união infinitas em sua formulação, está incluída nesta investigação. Isso se dá em virtude de permitir que os professores tomem conhecimento do caso mais geral, o qual permite desenvolver de forma mais abrangente o tema Probabilidade, no que tange a demonstrações das propriedades, ao tratamento do caso não-equiprovável etc. Tal formulação também possibilita oportunidades para verificar como se ajusta uma definição geral a casos particulares, a saber: os dos espaços amostrais finitos.

Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os eventos. A Probabilidade é uma função que a cada evento (ou seja, a cada elemento de $\mathcal{A}$) associa um número no intervalo [0, 1], possuindo essa função as propriedades abaixo mencionadas:

- $P(\Omega) = 1$
- Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ são disjuntos então

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

A fim de adequar às situações cujos espaços amostrais sejam finitos, alguns autores como Souza (2018, p. 137) optam pela definição abaixo:

A probabilidade é uma função que a cada evento $A$ associa um número, observando-se as condicionantes abaixo:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- Se $A_1$ e $A_2$ são disjuntos então

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Ocorre que a adaptação da definição, relativa aos casos gerais, para situações particulares, como a dos espaços amostrais finitos, nem sempre é bem sucedida. Iezzi & et al. (2018), por exemplo, incidem em sério equívoco, quando tratam desse aspecto. Prejudicado pela redação pouco precisa e clara, torna-se penoso o desafio de provar as propriedades adicionais da probabilidade axiomática, a partir da definição estabelecida por esses autores. A par das considerações anteriores, parece adequada a seguinte proposta referente aos casos de espaço amostral finito, a qual coincide com a apresentada em Silva, Campos & Pereira (2015):

*(Kolmogorov para $\Omega$ finito).* Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os eventos. Então a probabilidade é uma função que a cada evento (ou seja, a cada elemento de $\mathcal{A}$) se associa um número no intervalo [0, 1]. Além disso, essa função possui as seguintes

propriedades:

- $P(\Omega) = 1$
- Qualquer quantidade de eventos disjuntos que for tomada $A_1, A_2, \dots, A_n$ vale

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Nesse contexto, é essencial sinalizar que o professor deve destacar a segunda condição (propriedade) acima, isto é, fixar bem que a condição vale para qualquer quantidade de eventos disjuntos. Uma ideia plausível é anunciar oralmente a propriedade, sem registrá-la no quadro. Em seguida, o orientador estimula seus alunos a adaptarem a segunda propriedade para casos particulares em que existem dois eventos disjuntos, posteriormente para três eventos disjuntos. Assim, para $n = 2$ ficaria:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Para $n = 3$ ficaria:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Finalmente, o professor encoraja seus alunos, solicitando que encontrem um modo de escrever a segunda condição para “$n$” eventos (conjuntos) disjuntos. Isso não deixa de ser uma tentativa de tornar a propriedade mais compreensível a todos.

Afinal, por que a definição (a que generaliza para “$n$” eventos) parece ser mais simples que a restrita a dois eventos?

Note que, considerando-se o mesmo espaço amostral, a definição generalista é válida para “$n$” conjuntos disjuntos. Logo também será verdadeira, quando aplicada ao caso de 2 conjuntos disjuntos, 3 conjuntos disjuntos etc. Caso se assuma a definição com a propriedade, em pauta, válida para apenas dois conjuntos disjuntos, fica complicado explicar sua validade para outra quantidade finita qualquer de conjuntos.

Diante das considerações já exibidas sobre a definição de probabilidade, emerge a seguinte questão: Qual a vantagem de se definir a probabilidade, segundo a visão axiomática, em vez da laplaciana?

Para respondê-la, primeiramente, é preciso realçar que a definição axiomática não se limita a resolver problemas cujo espaço amostral seja equiprovável. Para exemplificar esse tipo de situação, basta considerar um dado especial com 6 faces (numeradas de 1 a 6), o qual goza da seguinte propriedade: A chance de cada face ocorrer em um lançamento é diretamente proporcional ao número nela registrado. Assim, a probabilidade de a face “3” acontecer (3/21 = 1/7) é o triplo do valor atribuído à probabilidade da face “1”

(1/21). Experimentos como esse merecem ser enfatizados, a fim de que se reverta a tendência observada em livros didáticos que direcionam seus estudos para eventos equiprováveis. Em suma, é imprescindível salientar a existência na natureza (inclusive em maior número) de eventos não-equiprováveis. Assim, pensar probabilidade, usando apenas cartas, dados, moedas e outros exemplos mais comuns de incidência da equiprobabilidade no cotidiano, empobrece o estudo do assunto em pauta e é praticamente extinguir a ideia de não-equiprobabilidade no universo dos espaços amostrais. Nesse sentido Coutinho (2004, p.24) alerta:

> A limitação do trabalho a espaços equiprováveis é, no entanto, o ponto de desacordo entre nosso projeto e as sugestões dadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Já salientamos anteriormente os perigos de um trabalho no campo conceitual das probabilidades que se inicia por esta limitação.

Ainda no mesmo esforço de ênfase acerca desse problema, propõe-se que uma forma de se trabalhar com eventos não-equiprováveis é “brincando” com o conjunto dos elementos do espaço amostral. Uma sugestão de atividade consiste no lançamento de dois dados, observando os resultados obtidos nas faces. Quando se toma como espaço amostral o conjunto $(\Omega)$ de pares ordenados (D1, D2), obtidos nos dados D1 e D2, existem 36 elementos nesse conjunto, isto é, $n(\Omega) = 36$. Nessa situação, cada evento equiprovável, ou seja, cada par de valores que podem ser obtidos tem a mesma probabilidade de ocorrência. Considerando-se agora o experimento que é somar os valores obtidos nas faces D1 e D2, é fácil verificar que o espaço amostral agora é $\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Logo a cardinalidade de $\Omega'$ é 11, ou seja, $n(\Omega') = 11$. Nota-se ainda que cada evento elementar de $\Omega'$ não possui a mesma chance de ocorrer. Enquanto o número 7 está associado a seis possibilidades de ocorrer – $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3)$, $(5, 2)$ e $(6, 1)$ –, o número 8, por sua vez, está associado a cinco possibilidades – $(2, 6)$, $(3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$. Reforça-se a evidência de que podemos criar vários experimentos diferentes, utilizando-se de um mesmo material, e consequentemente obter espaços amostrais diferentes, abrindo-se oportunidade de fixar melhor a ideia de equiprobabilidade e não-equiprobabilidade, a exemplo do exposto em Lainetti (2019) e Pereira, Nascimento, Sibo & Goulart (2016).

Além disso, cabe alertar que é fácil mostrar que, com a definição de Kolmogorov, nos experimentos envolvidos em espaço amostral equiprovável, a forma de medir a probabilidade de um experimento é pela definição de Laplace, conforme indicado em Lainetti (2019).

Ficou evidente, ao longo deste trabalho, que a definição de Laplace não pode ser utilizada em qualquer situação, porém isso tem ocorrido em alguns dos trabalhos investigados. Vários autores não se dão conta desse erro, o que termina por contaminar a aprendizagem do assunto no ambiente escolar. Nas entrelinhas, fica a falsa impressão de que a única definição de probabilidade que existe seja a de Laplace. Além do mais, floresce a percepção de que seu uso caiba em qualquer situação, isto é, não tenha nenhuma contraindicação. Para que se tenha ideia de quão preocupante é o uso da definição de Laplace, será discutido, na próxima seção, o resultado do questionário aplicado sobre a definição de probabilidade.

## 2.2 Apresentação e metodologia do teste aplicado

A fim de avaliar como a definição de probabilidade ficou registrada na memória dos alunos, foi montado o teste apresentado a seguir nesta subseção, envolvendo também outros assuntos, para que não ficasse caracterizado, à primeira vista pelos alunos, que a avaliação se direcionava ao assunto probabilidade. Sua resolução das questões não requeria cálculos e envolvia apenas conceitos básicos da Matemática no ensino médio.

Executado durante os meses de setembro e outubro de 2019, o teste alcançou 95 alunos do ensino médio (estudantes de escolas públicas e privadas, localizadas em Natal) e 41 estudantes dos semestres iniciais do curso de licenciatura em Matemática (diurno) do campus central da UFRN na mesma capital.

Aparentemente despretensioso e fácil, tinha por objetivo, conforme já mencionado, detectar a percepção que os avaliados faziam sobre as definições de probabilidade e equiprobabilidade.

O conteúdo do teste está reproduzido abaixo.

Assinale SIM ou NÃO em cada uma das questões abaixo.

1. Na equação $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$, o delta de Bhaskara é calculado por $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$?

   (  ) SIM  (  ) NÃO

2. A probabilidade de um evento A é dada por $\frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n}(\Omega)}$, ou seja, pelo número de casos favoráveis dividido pelo número de casos totais?

   (  ) SIM  (  ) NÃO

3. Para qualquer triângulo de lados $a > b > c$, vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$?

( ) SIM ( ) NÃO

4. Ao lançarmos duas moedas, os resultados possíveis são 2 caras, duas coroas, ou uma cara e uma coroa. Então a probabilidade de ocorrência de qualquer um desses resultados é 1/3?

( ) SIM ( ) NÃO

5. A área de um círculo é $2\pi R$, onde $R$ é o raio do círculo?

( ) SIM ( ) NÃO

A aplicação do teste contou com a colaboração de ex-alunos do PROFMAT em atuação como professores de turmas do ensino médio, as quais já haviam estudado o conteúdo de probabilidade em foco. Também colaboraram nessa empreitada professores do Departamento de Matemática da UFRN, aplicando a mesa avaliação em turmas universitárias já descritas.

Realizado o teste, os professores colaboradores retornaram o material para compilação, tratamento estatístico e análise do resultado consubstanciada na discussão entre os autores deste trabalho cuja síntese se segue na próxima subseção.

## 2.3 Síntese da análise dos resultados obtidos no teste aplicado

Da análise do teste em seu todo, destacamos neste trabalho apenas os aspectos referentes ao resultado das respostas dadas à questão 2.

Note que propositadamente nada foi dito sobre o espaço amostral, isto é, quanto à equiprobabilidade do referido espaço.

Assim sendo, a resposta correta esperada apontava para a opção NÃO, pois não havia a informação de que o espaço era equiprovável. O levantamento coletado, entretanto, indicou que, do total de 252 respostas, houve 181 SIM (71,83 %) e 71 NÃO (28,17%), resultado ilustrado na figura abaixo.

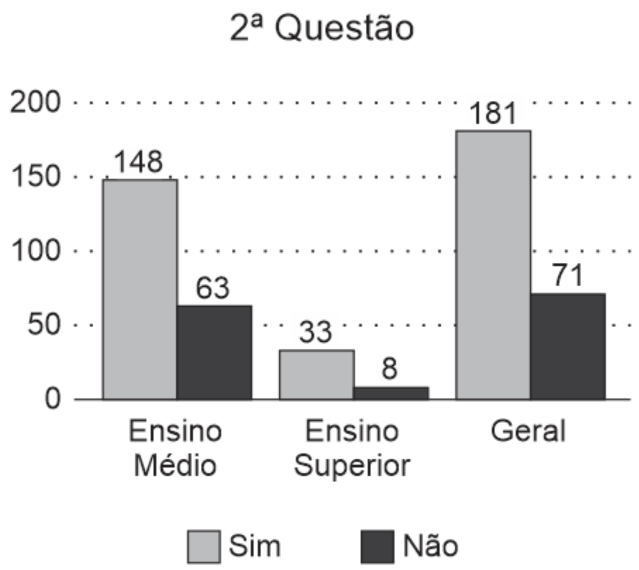


**Figura 1**: Resultado da 2ª Questão.
Fonte: Elaborada pelos autores.

Caso se considerem apenas as respostas dos universitários, houve 33 SIM (80,48%.) e 08 NÃO (19,52%), revelando que a proporção de respostas incorretas aumentou.

Note que essa amostra experimental manifesta certa tendência dos alunos em considerarem o evento como inserido em um espaço amostral equiprovável, mesmo quando nada for dito a esse respeito. Essa tendência, de certa forma, não surpreende, pois parece refletir os equívocos registrados nas obras estudadas durante est investigação. Além disso, o resultado do teste não deixa de servir como indício de suposta falha no processo ensino-aprendizagem do assunto probabilidade nas turmas avaliadas.

## 3 CONCLUSÃO

A fonte da motivação inicial deste trabalho foi a definição de probabilidade apresentada no livro Oliveira & Fernández (2010), obra utilizada na disciplina Matemática e Realidade ministrada aos alunos do PROFMAT durante o semestre 2019.2 na UFRN. O referido compêndio induz o leitor a pensar que a única definição de probabilidade existente é a de Laplace, nele apresentada, com menção à equiprobabilidade, sem que essa propriedade tivesse sido estabelecida previamente.

A constatação desses problemas estimulou investigar estudos mais recentes tanto sobre o tema quanto propostas de como introduzir tal assunto aos alunos dos ensinos fundamental e médio. Em razão disso, inicialmente as dissertações do PROFMAT sobre o tema foram as referências prioritariamente consultadas. Verificou-se então que algumas delas repetem os mesmos equívocos acima mencionados, como por exemplo em Carloni (2019). Observa-se, no entanto, que as definições de probabilidade frequentista e axiomática já são apresentadas em várias dissertações, conforme se constata em Lainetti (2019), Oliveira (2013) e Martins (2019).

Prosseguindo na investigação, passou-se a estudar como os livros didáticos expõem esse tema. Aí mais uma vez foi verificado que a maioria dos compêndios desenvolve o assunto, direcionando o leitor para concluir, nas entrelinhas, basicamente duas ideias. A primeira praticamente aponta a equiprobabilidade como uma propriedade corriqueira dos espaços amostrais, isto é, como a coisa mais normal do mundo de ocorrer nos experimentos aleatórios, conforme se verifica em Smole & Diniz (2018). Induz-se no leitor a impressão de que basicamente só existem eventos elementares equiprováveis, concepção obviamente falsa. A segunda ideia subentendida é que nesse mundo perfeito não se precisa saber nada sobre probabilidade além da definição de Laplace.

Nesse contexto de falhas, poucos livros introduzem a versão axiomática e uma quantidade ainda menor apresenta a definição frequentista. Essa constatação é compreensível nas obras destinadas ao ensino básico, devido ao fato de que tais definições se apoiem em certos conhecimentos não condizentes com o referido nível de ensino. Autores dos livros que registram a versão axiomática se limitam, por exemplo, a apresentar a definição envolvendo apenas dois conjuntos disjuntos, conforme se observa em Iezzi et al. (2018).

Para tentar medir como a abordagem dos livros utilizados refletem na retenção do conceito de probabilidade, foi aplicado a alunos dos ensinos médio e universitário em Natal, Rio Grande do Norte, o teste cujos resultados apresentados na seção 2 corroboram perfeitamente o que os livros refletem. A grande maioria dos avaliados se detém no caso de espaço amostral equiprovável e finito em que a definição de Laplace é a forma de medir a probabilidade de tais eventos.

Assim, os dados coletados no teste aplicado, quando relacionados com o conteúdo abordado nos livros didáticos, contrariam o que este artigo reiteradamente destaca: a propriedade da equiprobabilidade não é tão fácil de se manifestar nos experimentos aleatórios, nos espaços amostrais, como autores dão a entender e alunos parecem pensar ao resolver problemas. Na realidade, a situação de não-equiprobabilidade é que é natural.

A par do que já foi exposto, sugere-se que a construção do conceito axiomático de probabilidade apresentado na seção 2 deva ser tentada, desde que a segunda propriedade seja construída da forma como foi apontada neste texto. Se o processo de ensino assim for procedido, os alunos não necessitarão ficar separando em casos, pouco importando se o espaço seja equiprovável ou não, o que permitiria ao professor desenvolver em sala situações bem mais realistas. Assim, é necessário que os livros didáticos do ensino básico contenham pelo menos as abordagens clássica e axiomática de probabilidade, propiciando ao aluno a oportunidade de conhecer quando melhor se aplica cada um desses conceitos.

Tratando ainda da ausência da abordagem axiomática nos livros didáticos, cabe destacar que o professor deve suprir esse vazio conceitual, explorando com exemplos e exercícios em que a definição de Laplace não se adequa à solução de tais problemas. Para isso, o professor não deve limitar-se ao uso de dados tradicionais, moedas, cartas de baralho, objetos esses quase sempre utilizados para instrumentalizar espaços amostrais equiprováveis. Experimentos como os mencionados na seção 2 enriquecem a aprendizagem, à medida que o aluno vai sendo paulatinamente colocado em contato com o universo dos espaços amostrais não-equiprováveis.

A Probabilidade envolve situações de grande complexidade, mesmo quando aplicada em situações e em problemas aparentemente simples, corriqueiros. Assim sendo, a clareza e a precisão das definições básicas afetas ao tema são essenciais à aprendizagem desse assunto no ensino básico, servindo, portanto, como valioso instrumento para reduzir barreiras cognitivas que assustam os estudantes.

Nesse contexto, a primeira barreira a ser removida é a da errônea internalização da equiprobabilidade como propriedade geral dos espaços amostrais. Certamente, a retificação desse equívoco foi a tônica insistentemente presente neste artigo, devido ao efeito nefasto que esse erro reproduz na base conceitual e na solução de problemas sobre probabilidade.

## REFERÊNCIAS


Avelar, A. R. (2018). *Reflexões sobre o ensino de probabilidade em nível básico e a resolução de seus problemas clássicos*. (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade de Brasília.

Bernstein, P. L. (1997). *Desafio aos deuses: a fascinante história do risco*. Rio de Janeiro: Campus.

Biajoti, E. D. (2013). *Experimentos probabilísticos: noções de probabilidade no ensino fundamental II*. (Dissertação de Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal, São Carlos.

Carloni, P. C. (2019). *O estudo de probabilidade no ensino médio*. (Dissertação de Mestrado Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

Coutinho, C. Q. S. (2004). *Texto nº 2: Conceitos probabilísticos, os parâmetros curriculares nacionais e os livros didáticos*. *In*: Mesa Redonda do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Universidade Federal de Pernambuco. Recuperado de http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/13/MR10.pdf

Hand, D. J. (2014). *The improbability principle: Why coincidences, miracles, and rare eventes happen every day*. New York: Scientific American.

Hazzan, S. (2004). *Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade*. São Paulo: Atual. v.5.

Iezzi, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R., ALMEIDA, N. Matemática: ciências e aplicações. São Paulo: Saraiva, 2018. Manual do Professor. Ensino Médio, v2.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa Educacionais Anísio Teixeira. *Provas e gabaritos.* ENEM: 2008 – 2019. Recuperado de http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Lainetti, T. S. F. (2019). *Explorando a não-equiprobabilidade de eventos na educação básica* (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal, Rio de Janeiro.

Leonardo, F. M. (2018). *Conexões com a Matemática: manual do professor – ensino médio, v.3.* São Paulo: Moderna.

Martins, F. M. (2019). *Variáveis discretas e probabilidade: uma abordagem inicial no ensino médio* (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal, São João del-Rei.

Morgado, A. C. O. (2016). *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM.

Nehab, D. F. (2019). *Não há progresso sem Matemática*. Recuperado de https://impa.br/noticias/nao-ha-progresso-sem-matematica-e-computacao-diz-pesquisador/

Oliveira, K. I. M., Fernández, A. J. C. (2010). *Iniciação à Matemática: Um curso com problemas e soluções*. Rio de Janeiro: SBM.

Oliveira, M. R., Carneiro, M. L. (2009). *Coleção elementar da matemática: sequências, análise combinatória, matriz – v.3.* Belém: GTR.

Oliveira, N. J. (2013). *Noções de probabilidade e aplicações ao caso discreto (Dissertação de* Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberlândia.

*Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCN).* Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf

*Portaria no. 1818, de 13 de novembro de 2006* (2006). Títulos recomendados para o ensino médio. Divulga o resultado da avaliação do Livro Didático do Componente Curricular de Matemática e Língua Portuguesa, realizada no âmbito do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio - PNLEM/2007: Brasília, DF. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/port_1818.pdf

Pereira, P. B. S. S., Nascimento G. F., Sibo, G. A., Goulart, A. (2016). *Definição clássica e definição frequentista de probabilidade: uma abordagem em sala de aula.* Recuperado de http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7963_3734_ID.pdf

Salsa, I. S., Moreira, J. A. (2008). *Probabilidade e Estatística*. Secretaria de Educação à Distância – SEDIS.

Silva, C. A. G., Medeiros, V. S., Pereira, A. G. C. (2015). *Introdução à Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda.

Smole, K. S., Diniz, M. I. (2016). *Matemática: ensino médio* – manual do professor, v.2. São Paulo: Saraiva.

Souza, J. (2018). *Matemática: novo olhar, ensino médio – manual do professor, v.2*. São Paulo: FTD.

## NOTAS

**TÍTULO DA OBRA**
Algumas reflexões sobre a definição de probabilidade

**André Gustavo Campos Pereira**
Doutor
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Matemática, Natal, Brasil
andre.gustavo.campos.pereira@gmail.com.br
https://orcid.org/0000-0001-6835-2318

**George Luiz Coelho Cortes**
Aluno de mestrado (PROFMAT)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Matemática, Natal, Brasil
glcc1@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0003-2482-7259

**George Homer Barbosa de Medeiros**
Aluno de mestrado (PROFMAT)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Matemática, Natal, Brasil
homer.12@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8979-2662

**Fernando Montanaro Paiva de Almeida**
Aluno de mestrado (PROFMAT)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Matemática, Natal, Brasil
fer_naro@yahoo.com.br

https://orcid.org/0000-0003-4699-1826

**Francisco Erivan de Almeida Júnior**
Aluno de mestrado (PROFMAT)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Matemática, Natal, Brasil
matematicaufrn@hotmail.com
**https://orcid.org/0000-0002-8131-6204**

**Igor Bruno Dantas Nunes**
Aluno de mestrado (PROFMAT)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Matemática, Natal, Brasil
profigor.nunes@gmail.com
**https://orcid.org/0000-0002-7718-9978**

**Arthur Henrique da Silva**
Aluno de mestrado (PROFMAT)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Matemática, Natal, Brasil
arthurmat14@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7239-3585

**Gleydson Medeiros de Souza**
Aluno de mestrado (PROFMAT)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Matemática, Natal, Brasil
professortp.gleydson@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4468-9941

**Endereço de correspondência do principal autor**
R. Alameda dos Bosques, 680, Cond. Bosque das Palmeiras, casa 327, Parque do Jiqui, 59153-155, Parnamirim, RN, Brasil.

**AGRADECIMENTOS**
Agradecemos à Ana Clara Simioli Campos pela ajuda na escrita do abstract, ao aluno do PROFMAT Gleydosn Winston Araújo do Nascimento por suas sugestões na escrita de alguns trechos deste artigo, ao professor Paulo de Sousa Sobrinho por parte da coleta dos dados apresentados neste artigo e ao PROFMAT/UFRN que nos proporcionou a infra-estrutura necessária para a realização das discussões e preparação deste artigo.

**CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA**
**Concepção e elaboração do manuscrito:** A.G.C. Pereira, G.L.C. Cortes, G.H.G. de Medeiros, F.E.A. Júnior, I.B.D. Nunes, A.H. da Silva, F.M.P. de Almeida e G.M. de Souza.
**Coleta de dados:** A.G.C.Pereira, I.B.D. Nunes.
**Análise de dados:** G.H.G. de Medeiros, F.E.A. Júnior
**Discussão dos resultados:** A.G.C. Pereira, G.L.C. Cortes, G.H.G. de Medeiros, F.E.A. Júnior, I.B.D. Nunes, A.H. da Silva, F.M.P. de Almeida e G.M. de Souza.
**Revisão e aprovação:** A.G.C. Pereira, G.L.C. Cortes, G.H.G. de Medeiros, F.E.A. Júnior, I.B.D. Nunes, A.H. da Silva, F.M.P. de Almeida e G.M. de Souza.

**CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA**
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

**FINANCIAMENTO**
Não se aplica.

**CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM**
Não se aplica.

**APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA**
Não se aplica.

**CONFLITO DE INTERESSES**
Não se aplica.

**PUBLISHER**
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

**EDITOR**
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

**HISTÓRICO**
Recebido em: 14-11-2019 – Aprovado em: 09-04-2020.