Artigo Original

REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A RELEVÂNCIA DO REGISTRO GRÁFICO NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

The relevance of the graphic register in the teaching and learning of ordinary differential equations

Michele Carvalho de **BARROS**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão/PR, Brasil
mcbarros@utfpr.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-4249-0883

Lilian Akemi **KATO**
Universidade Estadual de Maringá, Maringá/PR, Brasil
lilianakemikato@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8770-3873

Jana **TRGALOVA**
Claude Bernard University Lyon 1, Lyon, France
jana.trgalova@univ-lyon1.fr
https://orcid.org/0000-0001-7688-9254

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

À luz da teoria dos registros de representação semiótica, assumimos a mobilização de diferentes registros como elemento necessário para a compreensão de conceitos matemáticos. Estudos apontam que o ensino e a aprendizagem das equações diferenciais ordinárias (EDOs), usualmente, se dá, pela utilização e manipulação do registro simbólico-algébrico em detrimento dos demais registros como, por exemplo, o registro gráfico. Neste contexto, este artigo tem por objetivo discutir a importância do registro gráfico nos processos de ensino e de aprendizagem das EDOs. Para tanto, elaboramos e aplicamos, a um grupo de estudantes do ensino superior, uma sequência de situações, que abordavam o conceito de equação diferencial ordinária (EDO) utilizando diferentes registros de representação semiótica, tendo em vista o favorecimento da abordagem qualitativa das suas soluções. Os resultados apontam que o uso do registro gráfico para obter informações a respeito das soluções de uma EDO, possibilitou, aos alunos estabelecerem relações entre a EDO e sua família de soluções, entre a EDO e seu campo de vetores, reconhecendo as EDOs em suas diferentes representações o que favorece a compreensão do objeto matemático em estudo.

Palavras-chave: Registro de representação semiótica, Abordagem qualitativa, Campo de vetores.

ABSTRACT

Considering the theory of registers of semiotic representation, we acknowledge the mobilization of different registers as a necessary element for the understanding of mathematical concepts. Studies report that the teaching and learning of ordinary differential equations (ODEs) usually happens through use and manipulation of symbolic-algebraic registers, as opposed to other varieties, such as the graphic register. Given this context, our article aims at discussing the importance of graphic registers for both teaching and learning of ODEs. Therefore, we devised a series of situations – directed at higher education students – which address the concept of ordinary differential equations by means of different registers of semiotic representation; favoring a qualitative approach to their solutions. Results indicate that the use of graphic registers to obtain information about an ODE's solution enabled students to create connections between the equation, their family of solutions and their vector field. Thus, allowing students to recognize different representations of ODEs and to better understand the mathematical object at hand.

Keywords/Palabras clave: Register of semiotic representation, Qualitative approach, Vector field.

1 INTRODUÇÃO

O conceito de equações diferenciais ordinárias (EDOs) foi desenvolvido gradualmente, conforme a necessidade de resolver problemas que envolviam derivadas e diferenciais. Sua história teve início no século XVII com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) (Boyce & Diprima, 2013).

Por muitos anos o foco dos estudos envolvendo este objeto matemático, era elaborar métodos algébricos de resolução, com o objetivo de determinar a expressão analítica da família de soluções de uma EDO. Diversos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento destes métodos. Leibniz estudou o método para determinar as soluções de EDOs lineares de primeira ordem, Newton resolveu as equações do tipo $dy/dx=f(x,y)$ usando séries infinitas (Boyce & Diprima, 2013).

Leonhard Euler (1707-1783) ajudou na compreensão do papel das funções logarítmicas, trigonométricas e exponenciais no estudo das EDOs, além de elaborar métodos numéricos que viabilizavam aproximações para as soluções de vários tipos de EDOs. Com o avanço computacional, foi possível criar métodos numéricos mais refinados, como os desenvolvidos por C. Runge, que generalizam o método de Euler obtendo ordens de precisão mais altas (1856-1927) (Saglam-Arslam, 2004).

No entanto, o aprimoramento dos métodos numéricos não resolveu alguns tipos de EDOs, como por exemplo, as não lineares. Isso só foi possível a partir de uma nova forma de análise das EDOs, a abordagem qualitativa, desenvolvida por Henri Poincaré (1854-1912) no final do século XIX (Saglam-Arslam, 2004).

Esta abordagem, diferente dos métodos algébricos de resolução, não fornece a expressão analítica das soluções, contudo, possibilita uma análise sobre o comportamento das soluções de uma EDO do tipo $y'=f(x,y)$, como intervalos de crescimento, comportamento assintótico, entre outros. As informações a respeito das soluções, normalmente, são obtidas graficamente, assim, a abordagem qualitativa também é chamada de abordagem gráfica ou geométrica (Barros, 2017).

Nessa incursão histórica podemos considerar as soluções de uma EDO utilizando três formas de abordagens: a algébrica, que foca na aplicação de técnicas algébricas de resolução, a numérica que utiliza métodos de aproximações numéricas, e a qualitativa, que embora não obtenha a expressão analítica das soluções, fornece uma análise global dessas. Contudo, apesar de existirem diferentes formas de abordagens para as soluções de uma EDO, Oliveira e Igliori (2013) verificaram que o ensino e a aprendizagem das EDOs, no Brasil, privilegiam a abordagem algébrica.

Segundo Barros e Kato (2016), a predominância da abordagem algébrica em detrimento das outras formas de abordagens, também é constatada nos livros didáticos que abordam o conceito de EDOs. As autoras analisaram os dois livros didáticos mais utilizados nas universidades públicas do estado do Paraná e verificaram que as abordagens numérica e qualitativa pouco figuram nestes livros. Além disso, o registro gráfico[1] (RG), na maioria dos casos, não é utilizado para obter informações sobre a EDO e sim como uma forma de ilustrar a família de soluções obtida.

Como consequência deste ensino algebrizado, que também ocorre em outros países, como a França, por exemplo, Godillo (2006) verificou que mesmo os alunos já formados (estudantes do CAPES[2]) não conseguiam estabelecer relações entre os conceitos que envolviam as EDOs, dentre essas, a correspondência entre a reta tangente e a EDO, entre a EDO e sua família de soluções.

Para amenizar estas dificuldades Godillo (2006) desenvolveu uma engenharia didática composta por atividades que envolviam o campo de vetores de uma EDO, que é um registro gráfico. Após o desenvolvimento das atividades, o autor verificou que apesar da influência da abordagem algébrica na resolução das atividades, os estudantes foram capazes de relacionar as propriedades gráficas da família de soluções com a expressão algébrica da EDO, sem precisar resolver a equação.

Diante do exposto, inferimos que a utilização de diferentes registros favorece, aos estudantes e também aos professores, a ocorrência de discussões e reflexões acerca do conceito da EDO, que extrapolam sua expressão algébrica, ao direcionar para uma visão global do comportamento das soluções que não depende, necessariamente, da existência de uma solução analítica. Neste sentido a questão que nos moveu para esta investigação

[1] O termo registro gráfico será abordado na próxima seção.
[2] Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement Secondaire, que certifica os professores, na França, para a prática em faculdades e em escolas secundárias.

refere-se a avaliar qual o uso do registro gráfico para o ensino e para a aprendizagem das EDOs?

Norteados por essa interrogação definimos como objetivo, desta pesquisa, discutir a importância do registro gráfico nos processos de ensino e de aprendizagem das EDOs, para tanto, elaboramos e aplicamos, a um grupo de estudantes de cursos de engenharias, uma sequência de situações envolvendo EDOs, fazendo uso de diferentes registros de representação tendo em vista o favorecimento da abordagem qualitativa das suas soluções e consequentemente o emprego do registro gráfico.

2 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA PARA AS EDOS

Quando estudamos um conceito matemático, precisamos utilizar uma escrita, um símbolo ou uma notação que o represente, pois "o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas" (Duval, 2003, p.24). Segundo Duval (2012, p. 267), reconhecer e compreender os objetos matemáticos nas suas diferentes representações é "um ponto estratégico para a compreensão da matemática".

Assim, para termos indícios de aprendizagem de um conceito é preciso que o indivíduo seja capaz de articular diferentes registros de representação semiótica[3] que representem este conceito, pois,

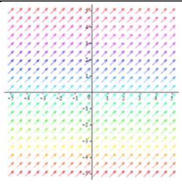
> a coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis (Duval, 2012, p.270).

No caso das EDOs, uma atividade pode ser apresentada utilizando sua expressão algébrica e sua resolução obtida por meio de cálculos algébricos ou numéricos ou de um gráfico. O Quadro 1 apresenta alguns dos possíveis registros para os conceitos que envolvem as EDOs, um exemplo e a legenda que usaremos ao longo do texto.

Quadro 1: Alguns registros de representação semiótica para as EDOs

Tipo de Registro	Exemplo	Legenda
Registro simbólico-algébrico	$dx/dt = 2 - 3x$	RSA

[3] A partir desta parte do texto, utilizaremos o termo registro para nos referir aos registros de representação semiótica.

Registro gráfico		RG
Registro da língua natural	Se a derivada de uma função f é positiva em um intervalo I, então f é crescente neste intervalo.	RLN

Fonte: Elaborado pelas autoras

Quando um sistema de representação permite as atividades: formação de uma representação identificável, tratamento e conversão, ele pode ser considerado um registro de representação (Duval, 2012). A formação de uma representação identificável implica na seleção de relações e de dados do conteúdo a representar.

O tratamento é uma transformação de representação que ocorre dentro de um mesmo registro, ou seja, uma transformação interna ao registro. Por exemplo, quando resolvemos a equação *3x+2=x-4*, realizamos o seguinte procedimento (tratamento):

$$3x + 2 = x - 4$$
$$3x - x = -4 - 2$$
$$2x = -6$$
$$x = -3$$

Figura 1: Exemplo de tratamento
Fonte: Elaborado pelas autoras

Quando a transformação é externa ao registro de partida (o registro inicial da representação a converter), ela recebe o nome de conversão. A conversão é uma transformação que consiste em alterar a representação inicial de um objeto, conservando a totalidade ou uma parte do conteúdo da representação inicial (Figura 2).

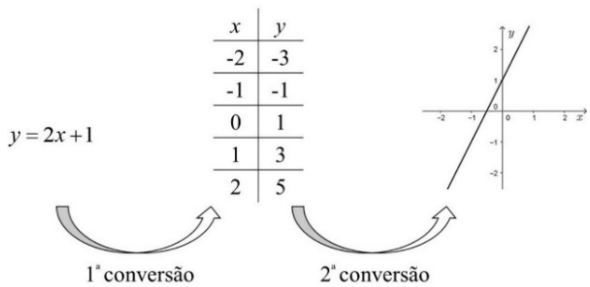


Figura 2: Exemplo de conversão entre registros de representação
Fonte: Elaborado pelas autoras

Para analisar a atividade cognitiva requerida na conversão entre registros, Duval (2003) classifica os registros de representação, segundo a sua natureza, em multifuncionais e monofuncionais, discursivos e não discursivos. Os registros multifuncionais são aqueles em que os tratamentos não são algoritmizáveis e os monofuncionais são aqueles nos quais as transformações de expressões são algoritmizáveis. Os registros discursivos utilizam-se de uma linguagem natural e formal ou de escritas simbólicas (linguagem matemática). Os registros não discursivos baseiam-se em figuras geométricas, gráficos cartesianos ou de esquemas advindos de um mesmo tipo de representação visual.

Quadro 2: Classificação dos diferentes tipos de registro de representação semiótica

	Representação discursiva	**Representação não discursiva**
Registros multifuncionais Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural *Associações verbais (concepções)* *Formas de raciocínio:* - argumentos a partir de observações, de crenças. - deduções válidas a partir de teoremas (substituição)	Figuras geométricas planas ou em perspectiva (de configurações de formas em 0, 1, 2, 3) Apreensão operatória e não somente perceptiva Construções utilizando instrumentos
Registros monofuncionais Os tratamentos são principalmente algorítmicos.	Sistema de escrita - numérico (binário, decimal) - literal, algébrico, simbólico (linguagem formal) Cálculo	Gráficos cartesianos Mudanças de sistemas de coordenadas Interpolação, extrapolação

Fonte: Duval (2003, p. 14)

O grau de dificuldade para a aprendizagem matemática difere em relação à natureza dos registros utilizados. Em relação aos tratamentos, as maiores dificuldades referem-se aos registros multifuncionais. Já as conversões podem ser menos complexas se envolvem registros de mesma natureza (ambos multifuncionais ou ambos monofuncionais), ou mais complexas quando envolvem passagens entre registros monofuncionais e registros multifuncionais (Duval, 2001).

Assim, em relação as conversões, Duval (2009), classifica-as como congruente e não congruente. Para que uma conversão seja congruente, o pesquisador considera as seguintes condições:

i) Correspondência semântica dos elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar. Considera-se como unidade significante elementar toda a unidade que se destaca do "léxico" de um registro (p.68).

ii) Univocidade semântica terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida corresponde uma só unidade elementar no registro de representação de chegada.

iii) Mesma ordem possível de apreensão das unidades significantes nas duas representações.

Utilizando estes critérios podemos determinar a congruência entre duas representações semioticamente diferentes que retratam, ao menos parcialmente, o mesmo conteúdo. Quando uma ou mais dessas condições não são satisfeitas, temos uma conversão não congruente.

Segundo Duval (2011), quando a conversão envolve o registro gráfico (RG), os estudantes apresentam dificuldades em sua interpretação e leitura, pois muitos deles não conseguem relacionar as informações do RG, representação cartesiana, e do registro simbólico-algébrico (RSA), equação, mesmo para os casos mais simples, como, por exemplo, quando a representação gráfica é uma reta.

Para analisar se uma conversão é congruência precisamos fazer a distinção das unidades significativas de cada registro de representação e também das transformações implícitas necessárias para mudar de registro. No registro algébrico, estas unidades são, de certa forma, claras, como os símbolos relacionais (<, >, =, ...), de operações ou de sinais (+, -), de variáveis, de expoente, coeficiente e constante. Normalmente, cada símbolo corresponde a uma unidade significativa (Duval, 2011).

Contudo, de acordo Duval (2011), a análise das propriedades figurais (variáveis visuais) de um gráfico não é tão clara. O autor diferencia as variáveis visuais gerais das variáveis visuais relativas para o caso do gráfico de uma reta ou parábola, mas que também podem ser utilizadas para outros casos. As variáveis gerais são concernentes à implantação da tarefa, ou seja, o que se deve ressaltar como figura sobre o fundo: uma linha ou zona. Ou em relação à forma da tarefa, procurando verificar, ou não, se uma linha é uma reta ou uma curva (aberta ou fechada). As variáveis relativas estão relacionadas com uma simples modificação de configuração da linha traçada/eixos orientados, conforme ilustrado no Quadro 3.

Quadro 3: Valores e variáveis visuais para a reta no plano cartesiano

Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais
- o sentido da inclinação do traçado:	- a linha **sobe** da esquerda para a direita; - a linha **desce** da esquerda para a direita; OBSERVAÇÃO: a referência esquerda/direita é o sentido normal do percurso visual de uma página em caracteres latinos
- os ângulos do traçado com os eixos:	Há uma **repartição simétrica** do quadrante **percorrido.** o ângulo formado com o eixo horizontal **é menor que** o ângulo formado com o eixo vertical;

	- o ângulo formado com o eixo horizontal **é maior que** o ângulo formado com o eixo vertical. OBSERVAÇÃO: no caso em que o traçado não passa pela origem, basta deslocar o eixo vertical, por exemplo, até o ponto de intersecção da reta com o eixo horizontal.
- a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical:	- o traçado passa **abaixo** da origem; - o traçado passa **acima** da origem; - o traçado passa **pela origem**.

Fonte: Duval (2011, p. 101)

As variáveis visuais do Quadro 3 são relativas a um gráfico de uma reta com expressão algébrica dada por $y = ax + b$ cujas unidades significativas são as constantes *a* e *b*. O Quadro 4 mostra a correspondência algébrica com os valores obtidos no Quadro 3.

Quadro 4: Valores e variáveis visuais para no plano cartesiano

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	Ascendente Descendente	Coeficiente > 0 Coeficiente < 0	Ausência de sinal Presença do sinal -
Ângulos com os eixos	Partição simétrica Ângulo menor Ângulo maior	Coefic. variável = 1 Coefic. variável < 1 Coefic. variável > 1	Não há coefic. Escrito Há coefic. escrito Há coefic. Escrito
Posição sobre os eixos	Corta acima Corta abaixo Corta na origem	Acresc. Constante Subtrai-se constante Sem correção aditiva	Sinal + Sinal – Ausência de sinal

Fonte: Duval (2011, p. 101)

Analisando o Quadro 4 podemos ver que o conceito de inclinação está relacionado com o coeficiente da variável independente. Já este coeficiente está associado com as variáveis visuais: sentido da inclinação do traçado (ascendente ou descendente) e os ângulos formados pelo traçado com os eixos coordenados. Desta forma, para Duval (2011), não existe congruência entre a direção da reta no plano e o coeficiente angular na expressão algébrica.

As análises realizadas por Duval (2011) nos Quadros 3 e 4, serviram de base para a elaboração dos Quadros 6, 8 e 9 da seção 4.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

Este artigo é parte da tese da primeira autora, que tinha como objetivo investigar o potencial de uma sequência de situações, envolvendo problemas no contexto da Modelagem Matemática, na perspectiva dos registros de representação semiótica e das mudanças de domínio, na condução do processo de aprendizagem das EDOs para estudantes dos cursos de engenharias.

Para tanto, foi elaborada e aplicada uma sequência de situações[4] no decorrer de um curso de extensão, com duração de vinte e sete (27) horas, em uma universidade pública do estado do Paraná. Participaram do curso quinze alunos dos cursos de Engenharias (Ambiental, Alimentos, Civil e Eletrônica) que estavam matriculados na disciplina de Equações Diferenciais.

Os alunos[5] foram divididos em quatro grupos, os quais chamaremos de grupo 1 (G1), grupo 2 (G2), grupo 3 (G3) e grupo 4 (G4). A escolha por este público alvo se deu pelo fato desses alunos já terem cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, que aborda os conceitos: função, derivada e integral, os quais são pré-requisitos para o estudo das EDOs.

A sequência de situações era composta de um questionário inicial, de nove atividades que trabalhavam o conceito de EDO utilizando diferentes de registros de representação semiótica e de três problemas no contexto da Modelagem Matemática, em que os estudantes deveriam estudar situações reais cujas análises demandariam uma compreensão das EDOs.

Neste trabalho, apresentamos a segunda, a terceira e a quarta atividade que compunha a sequência, as quais chamamos de Atividade 2, Atividade 3 e Atividade 4, respectivamente. Escolhemos estas atividades por requererem uma análise qualitativa das soluções da EDO dada, utilizando o sinal da derivada da função ou seu campo de vetores.

O curso foi desenvolvido com a seguinte dinâmica: os alunos recebiam uma folha contendo as atividades e tentavam resolvê-las com a mínima interferência da professora. Ao final, a folha era recolhida e analisada pela professora. No próximo encontro, as respostas eram apresentadas, sem identificação, aos alunos, sempre da menos estruturada para a mais estruturada. As respostas eram discutidas pelos alunos até obterem uma conclusão considerada satisfatória por todos, inclusive pela professora. Em seguida, uma folha com novas atividades era entregue aos alunos e a dinâmica se repetia.

A próxima seção apresenta as atividades, suas resoluções e análises.

[4] Consideramos, aqui, uma sequência de situações, como sendo uma série de questões que devem ser propostas e apresentadas em certa ordem visando a estruturação e ampliação do conhecimento dos estudantes em cada atividade.
[5] Foram adotados nomes fictícios para os alunos.

4 DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS

As atividades 2 e 3 foram aplicadas após a correção da Atividade 1, que tinha por objetivo auxiliar os estudantes na compreensão de como se constrói um campo de vetores e trabalhar o conceito de EDO autônoma, conhecimentos que seriam requeridos nas atividades posteriores.

Atividade 2

Seja f uma função derivável e definida em $\mathbb{R}$. Sabemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f\,'(x) = 3f(x)$. Faça um estudo sobre o comportamento da função f.

Figura 3: Atividade 2 da sequência
Fonte: Barros (2017, p. 123, adaptada de Arslan (2005, p. 105))

Nesta atividade os alunos deveriam fazer um estudo do comportamento da função *f*, sem conhecer a expressão algébrica da função ou da sua derivada. O objetivo era que eles descrevessem o comportamento da função *f*, de preferência sem resolver a EDO, apontando as condições para que ela seja crescente (decrescente) ou constante, chegando à seguinte conclusão:

i) Se $f(x) > 0$ temos que $f'(x) > 0$, portanto, f é estritamente crescente para todo x real.
ii) Se $f(x) = 0$ temos que $f'(x) = 0$, portanto, f é constante para todo x real.
iii) Se $f(x) < 0$ temos que $f'(x) > 0$, portanto, f é estritamente decrescente para todo x real.

O Quadro 5 resume as estratégias/respostas utilizadas pelos alunos na resolução desta atividade.

Quadro 5: Tipos de respostas obtidas na Atividade 2

Estratégia utilizada	Comentários	Quantidade de alunos			
		G1	G2	G3	G4
Em branco					4
Utilizar o sinal da derivada para analisar o comportamento da função f.	Se *y* é negativo a derivada é negativa, portanto, a função decresce. Se *y* é positivo a derivada é positiva, portanto, a função cresce. Se *y* é zero, a derivada é zero, portanto, a função é constante.		2		
	Quando $f'(x)=0$, a função é nula. Quando $f'(x)>0$, a função é crescente. Quando $f'(x)<0$, a função decrescente.			3	

Resolver a equação diferencial.	Os valores de *x* não importam, pois a função é constante $\int 3f(x) = f(x) \Rightarrow 3\int f(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = 0$		2		
Realizar uma conversão de registro.	A derivada é 3 vezes o valor da função em *x*.	3			
Escrever uma lei de formação qualquer para a função *f.*	Função do primeiro grau *f(x)=ax+b*, *f'(x)=a*, o coeficiente angular dependerá se, na função, for positiva.	1			
Total		15			

Fonte: Barros (2017, p. 177)

Analisando o Quadro 5, podemos observar que somente dois alunos do G2 conseguiram responder à questão de forma satisfatória. Para isso, foi preciso que eles identificassem as variáveis significativas do registro simbólico (sinal da derivada *f'(x)*) e utilizassem os conhecimentos sobre derivadas e funções, para relacionar estas variáveis com o comportamento das soluções (Quadro 6), realizando uma conversão do RSA para o registro da língua natural (RLN).

Quadro 6: Unidades significativas da EDO e as variações simultânea nas soluções

RSA (EDO)		**RLN (Soluções)**
Unidades significativas	**Valores**	**Variações simultâneas para as soluções**
Sinal de *f'*	> 0	As soluções são estritamente crescentes
	= 0	A solução é constante
	< 0	As soluções são estritamente decrescentes

Fonte: Barros (2017, p. 126, adaptado de Arslan (2005, p. 106))

Podemos observar que não existe congruência semântica entre o sinal da derivada no RSA, *f´(x) > 0*, (derivada positiva ou maior que zero) e a expressão na língua natural (as soluções são estritamente crescentes). Segundo Cardoso (2014), a não congruência da conversão pode acarretar a baixa taxa de êxito dos estudantes ao realizá-la. Ademais, os registros são de natureza diferentes, o RSA é monofuncional e o RLN é multifuncional, o que, para Duval (2003) torna a conversão entre eles mais complexa.

Também observamos que os alunos não fazem menção a família de soluções de uma EDO e sim a uma única solução. Gordillo (2006) e Arslan (2005) afirmam que a passagem de solução de uma equação sendo um número para a uma família de soluções (funções), não é algo simples e se configura um salto conceitual para o aluno.

Os alunos que deixaram a atividade em branco, explicaram à pesquisadora que era preciso conhecer a função *f* para resolver a equação, ou seja, necessitavam da expressão analítica da função. Acreditamos que a dependência da expressão algébrica da função, decorre do fato das aulas e dos livros-texto das disciplinas de Cálculo darem ênfase a representação algébrica dos conceitos (Cargnin, 2013), fato também verificado nos livros textos de EDOs (Barros & Kato, 2016), assim, para estabelecer uma relação entre a função e a sua derivada, os alunos precisavam da expressão algébrica da função.

Outro fato que nos chamou a atenção foi que, apesar dos participantes estarem cursando a disciplina de equações diferenciais, somente dois aplicaram a técnica de resolução algébrica, porém sem sucesso. Embora, tivéssemos quatro alunos que já haviam cursado a disciplina de EDO, nenhum deles utilizou esta estratégia, o que foi contrário ao constatado por Arslan (2005), Gordillo (2006) e em um teste piloto que aplicamos com outros alunos da mesma universidade. Segundo Arslan (2005), os alunos que já estudaram o conceito de EDO, mesmo que de forma errônea, tendem a aplicar a estratégia algébrica para sua resolução.

Desta forma, inferimos que o fenômeno de não congruência da conversão associado aos demais fatores descritos podem ter sido a causa da maioria dos alunos não terem respondido de forma satisfatória a esta atividade. Após responderem a Atividade 2, os alunos passaram para a Atividade 3, descrita a seguir, que tinha como objetivo analisar o comportamento das soluções da EDO utilizando seu campo de vetores.

Atividade 3

O gráfico abaixo ilustra o campo de vetores para a equação diferencial $y' = f(y)$:

a) Comente o comportamento das soluções dessa equação.

b) Trace algumas curvas soluções sobre o campo de vetores da EDO dada.

c) Comente o comportamento das soluções quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

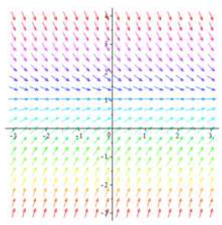


Figura 4: Atividade 3 da sequência
Fonte: Barros (2017, p. 131)

Para o item a) obtivemos as seguintes respostas:

Quadro 7: Respostas obtidas para a Atividade 3 a)

Comentários	Quantidade de alunos			
	G1	G2	G3	G4
y = 1 implica em *y' = 0*, portanto, solução constante *y > 1* implica em *y' < 0*, portanto, solução decrescente *y < 1* implica em *y' > 0*, portanto, solução crescente	1	2		
y = 1 implica em *y' = 0* *y > 1* implica em *y' < 0* *y < 1* implica em *y' > 0*		2		
Se *y = 1*, solução constante			2	4

Se *y* > *1*, solução decrescente Se *y*< *1*, solução crescente				
Para *y* < *1* a derivada é crescente e para *y* > *1* a derivada é decrescente e em *y* = *1* a derivada é nula	3		1	
Total	15			

Fonte: Barros (2017, p.181)

Para responder o item a) os alunos precisavam realizar uma conversão do RG (registro de partida) para o RLN (registro de chegada), ou seja, era necessário identificar as variáveis visuais RG e relacioná-las com o comportamento das soluções (Quadro 8).

Quadro 8: Variáveis visuais do registro gráfico e as variações simultâneas paras as soluções da EDO

RG (Campo de vetores)			**RLN (Soluções)**
Variáveis visuais	**Valores**	**Sinal da derivada**	**Variações simultâneas para as soluções**
Sentido da inclinação dos vetores no plano	Ascendentes	> 0	As soluções são estritamente crescentes
	Sem inclinação	= 0	A solução é constante
	Descendentes	< 0	As soluções são estritamente decrescentes

Fonte: Barros (2017, p. 132)

Podemos observar que a conversão realizada envolve registro de natureza distintas RG (monofuncional e não discursivo) e RLN (multifuncional e discursivo). E além de identificar as variáveis visuais do RG, é preciso compreender a relação vetores/soluções, ou seja, os vetores do gráfico representam os vetores diretores das retas tangente a um ponto do gráfico de uma solução de $y' = f(y)$.

Desta forma, os valores para os quais a inclinação do vetor é ascendente, significa que o coeficiente angular da reta tangente a um ponto do gráfico de *f* é positivo, consequentemente, a derivada também é positiva e isso implica que as soluções são estritamente crescentes, ou seja, é preciso recorrer a uma representação auxiliar (sinal da derivada) e a um teorema matemático que não estão explícitos no registro de partida, consequentemente, a conversão realizada é não-congruente.

Também era preciso verificar para quais valores de *y* a inclinação dos vetores era ascendente, nesse sentido, era necessário perceber que as modificações nas inclinações ocorrem na vertical, ou seja, para mudanças nos valores da variável dependente. Consequentemente, o sinal da derivada depende do valor da variável dependente, o que é não é algo habitual para os alunos, pois no ensino do Cálculo Diferencial e Integral, as mudanças de sinais da derivada ocorrem quando mudamos os valores da variável independente (Barros, 2017).

Das respostas obtidas no Quadro 7, podemos observar que dois alunos do G2 relacionaram os valores da variável *y* para os quais, o sentido da inclinação do vetor era ascendente, com o sinal positivo da derivada e, consequentemente, com a solução crescente. Os outros alunos do grupo, somente, relacionaram a inclinação do vetor com o sinal da derivada.

Os alunos do G1 foram os que mais tiveram dificuldades na análise do gráfico, pois, inicialmente, buscavam determinar a função que correspondia ao gráfico, o que indica a necessidade recorrer a uma expressão algébrica para situação. Uma mudança na estratégia de resolução só foi possível depois da interferência da pesquisadora, que pediu que eles observassem o gráfico sem tentar obter uma função.

A dependência algébrica da função, pode ser decorrência do fato que segundo Rasmussen (2001, *apud* Dullius, Veit & Araujo, 2013), quando os alunos pensam em função, eles veem uma equação e não um gráfico. Esta necessidade da expressão algébrica, assim como na atividade anterior, está relacionada com o ensino do Cálculo, que não favorece o uso de outros registros, o que pode causar dificuldades em analisar o gráfico sem estar acompanhado da expressão algébrica (Cargnin, 2013). Em particular, ao próprio ensino de EDO que privilegia o uso do RSA, pois foca-se na apresentação de técnicas algébricas de resolução (Barros, 2017).

O item b) solicitava que fosse traçado algumas curvas soluções sobre o campo de vetores. Ele tinha como objetivo familiarizar os alunos com os representantes gráficos envolvidos: o campo de vetores e as curvas soluções. Também, queríamos verificar se os alunos iriam respeitar o traçado das curvas soluções, como, por exemplo, não cortar a reta $y=1$.

Para este item, todos os alunos apresentaram respostas similares a da Figura 5, isto é, apesar de respeitarem o comportamento das soluções em relação aos intervalos de crescimento (decrescimento) e a solução de equilíbrio, eles não tiveram coordenação do traçado em relação à inclinação dos vetores, simplesmente traçaram curvas crescentes nas regiões em que os vetores tinham inclinação positiva, sem respeitar a tangente, o que indica que a noção de campo de vetores ainda não estava bem definida para eles.

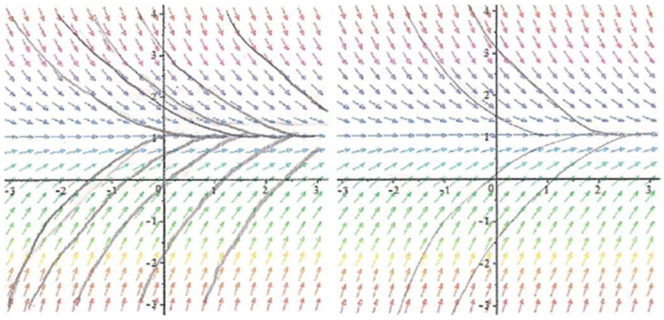


Figura 5: Respostas de um aluno do G2 e de um do G3, respectivamente a Atividade 3, item b)
Fonte: Barros (2017, p. 182)

No item c), os alunos precisavam analisar o comportamento assintótico das soluções, realizando uma extrapolação do traçado do gráfico, ou seja, um tratamento no RG. Para responder à questão proposta, era preciso uma conversão do RG para o RLN (Quadro 9).

Quadro 9: Variáveis visuais e as variações simultâneas nas soluções para a Atividade 3

RG (Campo de Vetores)		RLN (Soluções)
Variáveis visuais	**Valores**	**Variações simultâneas nas soluções**
Comportamento assintótico do campo de vetores	Tendem para um valor limite	As soluções tendem para um valor limite
	Divergem para $\pm\infty$	As soluções divergem para $\pm\infty$

Fonte: Barros (2017, p. 134)

Nenhum aluno analisou o comportamento das soluções quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ separando-as nos casos $y = 1$, $y > 1$ e $y < 1$, sete alunos disseram que o comportamento das soluções não se altera quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, pois a equação dependia somente da variável y (Quadro 10), o que pode ser decorrência do fato que normalmente no ensino do Cálculo Diferencial e Integral as funções são explicitas em relação a variável independente (Barros, 2017).

Quadro 10: Respostas dos alunos a Atividade 3 c)

Tipo de repostas	Comentários	Quantidade de alunos			
		G1	**G2**	**G3**	**G4**
Em branco.			1		
O valor de x não interfere na resposta	Quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.ele não interfere no comportamento pois a equação depende de y.	4	3		
As soluções têm o mesmo comportamento quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$	Tende a 1.			3	
As soluções possuem comportamento diferente quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$				4
Total		15			

Fonte: Barros (2017, p.183)

Segundo Duval (2011), além do RG ser pouco utilizado nas aulas de Matemática na maioria das vezes, seu emprego está vinculado a uma abordagem ponto a ponto, que consiste em marcar alguns pontos, obtidos a partir da expressão algébrica dada, no plano cartesiano. Já a conversão do RG para outros registros de representação é pouco trabalhada, o que pode ter dificultado o desenvolvimento deste item, pois, para responder à questão solicitada, o aluno precisava realizar uma conversão do RG para o RLN.

Após as discussões das Atividades 2 e 3, os alunos receberam a Atividade 4, que foi incluída na sequência por causa das dificuldades apresentadas pelos alunos no desenvolvimento da Atividade 2.

Atividade 4

Seja y uma função derivável e definida em $\mathbb{R}$. Sabemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $y' = -3y - 7$.

Faça um estudo sobre o comportamento das soluções desta equação.

Figura 6: Atividade 4 da sequência
Fonte: Barros (2017, p. 136)

Esta atividade solicitava um estudo do comportamento das soluções da equação y' = -3y-7, de forma análoga a Atividade 2. O Quadro 11 apresenta as respostas obtidas.

Quadro 11: Respostas dos alunos a Atividade 4

Estratégia utilizada	**Comentários**	**Quantidade de alunos**			
		G1	**G2**	**G3**	**G4**
Utilizar o sinal da derivada para analisar o comportamento da função *y*.	Se $y>-7/3$, $y'<0$, portanto, as soluções são decrescentes. Se $y=-7/3$, $y'=0$, portanto, as soluções são constantes. Se $y<-7/3$, $y'>0$, portanto, as soluções são crescentes.				3
	Se $y>-7/3$, portanto, as soluções são decrescentes. Se $y=-7/3$, portanto, as soluções são constantes. Se $y<-7/3$, portanto, as soluções são crescentes.				1
Utilizar o sinal da derivada e conjunto com o campo de vetores para analisar o comportamento da função *y*.	Se $y>-7/3$, $y'<0$, portanto, as soluções são decrescentes. Se $y=-7/3$, $y'=0$, portanto, as soluções são constantes. Se $y<-7/3$, $y'>0$, portanto, as soluções são crescentes.	3	4		
	Se $y>-7/3$, portanto, as soluções são decrescentes. Se $y=-7/3$, portanto, as soluções são constantes. Se $y<-7/3$, portanto, as soluções são crescentes.	1			
	Se $y>-2$, positivo a y' é crescente. Se $y<-2$, negativo a y' é decrescente. Quando está em -2 a y' é constante.	1			
Total de alunos		13			

Fonte: Barros (2017, p. 186)

Diferente da Atividade 2, que os alunos pouco discutiram e não conseguiam escrever uma resposta, nesta atividade os alunos apresentaram justificativas para suas respostas (diálogo entre os alunos do G1):

Théo: Eu fiz igual a que a gente fez antes, se a derivada é menor que zero, ela cresce. Aí eu isolei o y.
Vivian: Ela cresce ou ela decresce?
Théo: Quando a derivada é maior que zero ela cresce. Aqui quando y é menor que menos sete terços ela cresce. E quando é maior ela decresce.
Vivian: Ah, tá, ela decresce. Daí quando ela é menor que três, ela é constante?
Théo: Quando y é igual a menos sete terços ela é constante.
Gustavo: É que esse valor é menos sete terços, não três ((valor para qual os vetores eram paralelos ao eixo das abscissas no campo de vetores)).
Vivian: Ah, tá.
[...]
Théo: Então, àquela hora um dos problemas era que a gente deixava só, que é a função né? Que tinha que colocar mais, no plural, né? É mais que uma.
Gustavo: A função.
Théo: Todas as funções são crescentes, seria isso ... mais de uma função.
(Barros, 2017, p. 187)

Podemos observar (Quadro 11), que os alunos utilizam o sinal da derivada (RSA) em conjunto com o campo de vetores (RG), relacionando as informações obtidas nos dois registros (Figura 7).

Nesta atividade, a maioria dos alunos conseguiu relacionar as unidades significativas (sinal da derivada) do RSA com as variações concomitantes nas soluções (RLN), conforme indicadas no Quadro 6.

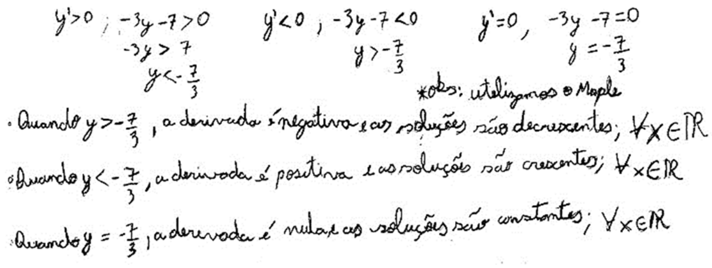


Figura 7: Resposta de um dos alunos do G1 a Atividade 4
Fonte: Barros (2017, p. 188)

Os alunos que utilizaram simultaneamente os registros RSA e RG para responder a situação, realizaram com o auxílio de um software, uma conversão para o RG (campo de vetores), contudo, não utilizaram somente este registro para obter suas respostas, eles articularam os dois registros RSA e RG, para depois realizar uma conversão para o RLN (Figura 8).

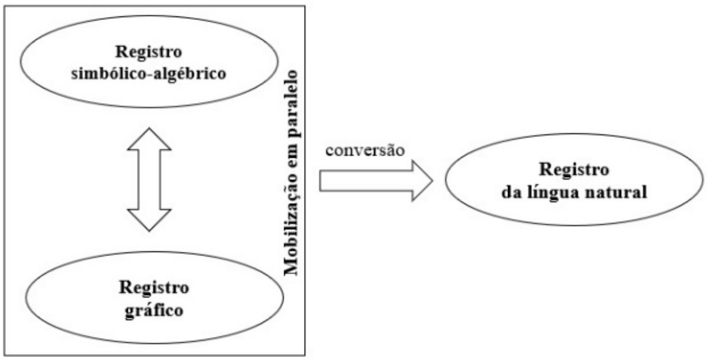


Figura 8: Mobilização em paralelo de dois registros de representação
Fonte: Adaptado de Barros (2017, p. 189)

Segundo Duval (2003), a compreensão de um objeto matemático está relacionada com a mobilização em paralelo de, ao menos, dois registros de representação, ou com a possibilidade de mudar de registro a todo o momento. Além disso, é importante identificar cuidadosamente se uma conversão consiste em "uma simples mudança de registros ou em uma mobilização em paralelo de dois registros diferentes" (p. 24).

Para a aprendizagem em matemática, a conversão entre os registros precisa ocorrer em uma mão dupla, isto é, a conversão precisa ser realizada em ambos os sentidos (Duval 2003). Apesar dos alunos utilizarem um software para realizar a conversão do RSA (EDO) para RG (campo de vetores), eles conseguiram perceber as mudanças no sinal da derivada (RSA) e as mudanças que ocorrem no campo de vetores (RG), ou seja, os alunos realizaram, o que Moretti e Luiz (2014) chamam de procedimento informático de interpretação global, conforme ilustrado na Figura 9.

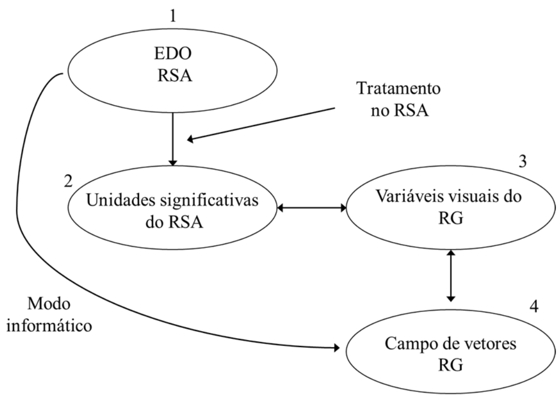


Figura 9: Procedimento informático de interpretação global para as EDOs
Fonte: Barros (2017, p. 190, adaptado de Moretti & Luiz, 2014, p. 69)

Para Moretti e Luiz (2014), a conversão em duplo sentido é garantida no procedimento informático de interpretação global quando o aluno consegue relacionar as unidades significativas do RSA com as variáveis visuais do RG, o que foi feito pelos alunos do G1 e G2. A utilização do RG e dele em paralelo com o RSA, como descrito aqui, passaram a ser uma prática comum para esses alunos, resultando em justificativas coerentes, com o problema apresentado, evidenciando alguns significados às variáveis envolvidas por meio dessas análises, nas demais atividades que foram propostas na sequência e que não são exploradas nesse artigo.

5 ALGUNS APONTAMENTOS ACERCA DO ENSINO E DA APRENDIZAGEM DAS EDOS

Neste artigo objetivamos trazer uma discussão sobre a importância do registro gráfico nos processos de ensino e de aprendizagem das EDOs, considerando o contexto no qual sua forma de ensino tem se apresentado, relatamos aqui as soluções e discussões, apresentadas por um grupo de estudantes de cursos de engenharias, para uma sequência de três atividades estruturadas de forma a priorizar a abordagem qualitativa das soluções das EDOs.

Conforme exposto na seção anterior, inicialmente os alunos apresentaram dificuldades em relacionar as unidades significativas do RSA com as variações simultâneas para as soluções do RLN na Atividade 2, bem como não apresentaram a noção de infinitas soluções (família de soluções). Na Atividade 3, as informações sobre a EDO dada, só poderiam ser obtidas pela análise do campo de vetores (RG), o que fez com que os alunos começassem a identificar as variáveis visuais do RG e as utilizassem para responder a atividade. Apesar da dificuldade em relacionar estas variáveis visuais com as variáveis significativas dos outros registros (RSA e RLN), os alunos utilizaram o RG para obter informações das soluções da EDO e não somente como forma de representar a família de soluções, conforme verificado por Barros e Kato (2016) nos livros didáticos de EDO.

Na Atividade 4, que requeria um estudo do comportamento das soluções de uma EDO sem conhecer de forma explícita a expressão algébrica da função ou da sua derivada, os alunos fizeram uso da noção de infinitas soluções e da relação entre derivada e função para responder o que foi solicitado, o que indica que eles foram capazes de obter informações utilizando o sinal da derivada, sem a necessidade de recorrer a solução algébrica. Alguns dos alunos realizaram uma conversão do RSA (equação) para o RG (campo de vetores) e além de obterem informações por meio deste registro, eles o coordenaram com o RSA, conseguindo identificar e relacionar as unidades significativas do RSA (equação) com as unidades visuais do RG (campo de vetores).

A partir da experiência com essas atividades no curso de extensão, a utilização em paralelo dos registros RG e RSA, pelos participantes, possibilitou que eles reconhecessem que mudanças no sinal da derivada da função provocavam mudanças no campo de vetores e vice-versa, com isso os alunos começaram a estabelecer relações entre a EDO e seu campo de vetores, entre derivada e função, entre a EDO e sua família de soluções, ou seja, uma aprendizagem que não está focada somente na aplicação de técnicas algébricas de resolução.

Nesse contexto defendemos que a utilização de vários registros, a coordenação entre registros e as conversões realizadas no desenvolvimento das atividades de EDOs possibilitam que os alunos tenham capacidade para reconhecer o conceito EDO em diferentes formas de representação, o que, segundo Duval (2003), leva a conceitualização do objeto matemático.

REFERÊNCIAS

Arslan, S. (2005). *L'Approche Qualitative Des Équations Différentielles en Classe de Terminale S:* Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences? (Thèse de Doctorat). Universite Joseph Fourier, Grenoble.

Barros, M. C. & Kato, L. A. (2016) O ensino das Equações Diferenciais em livros didáticos adotados para os cursos de Engenharia: um estudo à luz das mudanças de domínios e dos registros de representações semióticas. *Revista Ensino de Ciências e Engeharias*. Recuperado de http://www.latec.ufrj.br/revistas/index.php?journal=ensinodeciencias&page=article&op=view&path%5B%5D=803&path%5B%5D=779

Barros, M. C. (2017) *Equações diferenciais ordinárias no contexto dos registros de representação semiótica e da modelagem matemática*. (Tese de doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

Boyce, W.E. & Diprima, R.C. (2013) *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* 9a ed. Rio de Janeiro: LTC.

Cardoso, V. C. (2014). *Ensino e aprendizagem de álgebra linear:* uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais. (Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Cargnin, C. (2013). *Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real:* possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas. (Tese de doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

Duval, R. (2001). Comment décrire et analyser l´activité mathématique ? Cadres et registres. In: *Actes de journée em hommage à Régine Douady.* Organizado por l´équipe didirem. Unisersité Paris 7, Paris.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: *Aprendizagem em Matemática:* Registros de representação semiótica. Machado, S. D. A. (org.) Campinas-SP, Papirus.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano:* registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Fascículo I. trad. LEVY L. F; SILVEIRA, M. R. A. São Paulo: Editora da Física.

Duval, R. (2011). Gráficos e equações: articulação de dois registros. Trad.: Méricles T. Moretti. *Revemat:* Florianópolis-SC, v. 6, n. 2, (pp. 96-112).

Duval, R. (2012). Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo do pensamento. *Revemat.* Florianópolis, v. 07, n. 2, 266-297.

Gordillo, J. A. M. (2006) *Articulation des registres graphique et symbolique pour l'etude des equations differentielles avec cabri geometre:* Analyse des difficultés des étudiants et du rôle du logiciel. (Thèse de Doctorat). Universite Joseph Fourier, Grenoble.

Moretti,M. T. & Luiz, L. S. (2014) O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário. In. *As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na Educação Matemática*. Orgs. BRANT, C. F., MORETTI, M. T. (pp. 67-87). Ijuí. Ed. Unijuí

Oliveira, E., A. & Igliori, S., B., C. (2013). Ensino e aprendizagem de equações diferenciais: um levantamento preliminar da produção científica*. Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*. v. 4, n.2, 1-24.

Rasmussen, C. (2001) New directions in differential equations A framework for interpreting students' understandings and difficulties. Journal of Mathematical Behavior, v.20. (pp.55-87). In : DULLIUS, M. M. ; VEIT, E. A. ; ARAUJO, I. S. (2013) Dificuldades dos alunos na aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. *Alexandria*, v.6, n.2, 207-228.

Saglam-Arslan, A. (2004). *Les Équations Différentielles en Mathématiques et en Physique:* Étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports personnels des étudiants de première année d'université à cet objet de savoir.(Thèse de Doctorat) Université Joseph-Fourier - Grenoble I, Grenoble.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
A relevância do registro gráfico no ensino e na aprendizagem das equações diferenciais ordinárias.

Michele Carvalho de Barros
Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (2017)
Professora Adjunta
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento Acadêmico de Matemática, Campo Mourão/PR, Brasil
mcbarros@utfpr.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-4249-0883

Lilian Akemi Kato
Doutora em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (2004)
Professora Associada
Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Matemática, Maringá/PR, Brasil
lilianakemikato@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8770-3873

Jana Trgalova
Doutora em Educação Matemática
Claude Bernard University Lyon 1, Lyon, France
jana.trgalova@univ-lyon1.fr
https://orcid.org/0000-0001-7688-9254

Endereço de correspondência do principal autor
Avenida dos Álamos, 611, cep: 87301-380. Campo Mourão, PR, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Agradecemos à Universidade Tecnológica Federal do Paraná, à Universidade Estadual de Maringá e à Claude Bernard University Lyon 1 pelo apoio e estrutura disponibilizados durante desenvolvimento da pesquisa de doutorado. À Capes pelo apoio financeiro durante o período de doutorado sanduíche na França. Aos alunos que participaram do curso de extensão. E por fim, agradecemos a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para o desenvolvimento deste manuscrito.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: M. C. Barros, L. A. Kato, J. Trgalova
Coleta de dados: M. C. Barros
Análise de dados: M. C. Barros, L. A. Kato, J Trgalova
Discussão dos resultados: J. M. C. Barros, L. A. Kato, J. Trgalova
Revisão e aprovação: M. C. Barros, L. A. Kato, J. Trgalova

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Pesquisa aprovada pela Comitê Permanente de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Maringá (UEM), pelo parecer número 1.164.719; e com Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE) número 43667815.6.0000.0104 aprovado em julho de 2015.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM).

Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 21-05-2020 – Aprovado em: 30-07-2020