

ACHATANDO A CURVA DA COVID-19: DISCUTINDO ESTRATÉGIAS USANDO O GEOGEBRA

Flattening COVID-19's curve: arguing strategies using GeoGebra.

Esdras Jafet Aristides da **SILVA**
Universidade de Pernambuco - Campus Mata Norte, Nazaré da Mata, Pernambuco, Brasil
esdras.jafet@upe.br
<https://orcid.org/0000-0001-7510-6238>

Douglas de Souza Rodrigues da **SILVA**
silva.s.r.douglas@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-0739-0641>

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo ●

RESUMO

Motivados pela atual pandemia de COVID-19, neste trabalho abordamos as duas principais estratégias para combater a proliferação desta doença: o distanciamento social e a melhoria dos hábitos de higiene das pessoas. O objetivo é levar essa discussão para dentro do ambiente escolar, buscando mostrar ao aluno desse nível de escolaridade, que essas ações podem influenciar diretamente a taxa de transmissão do vírus e levar ao achatamento da curva de infectados. Neste sentido, desenvolvemos uma pesquisa qualitativa, de característica exploratória-explicativa, ancorada na modelagem matemática, visando descrever a eficácia dessas estratégias a partir da experimentação em ambiente computacional. Desta forma, a partir do modelo epidemiológico clássico SIR, desenvolvemos duas aplicações no GeoGebra. A primeira delas é apresentada sob a forma de atividade de experimentação, dirigida ao aluno, exemplificando a aplicação da matemática em problemas do mundo real: a disseminação de doenças. A segunda é para o professor, e mostra como emprestar a reputação da matemática, a força da modelagem como metodologia de ensino e aprendizagem e o poder da matemática dinâmica do GeoGebra para reforçar a importância das medidas de combate à Covid-19, que devidos as consequências econômicas, sofrem crescente resistência por parte da população. Nossas aplicações demonstram a capacidade crescente do GeoGebra de lidar com modelos matemáticos sofisticados. Assim, é possível discutir problemas sociais relevantes já na educação básica, com participação efetiva dos alunos.

Palavras-chave: COVID-19, Modelagem matemática, Ensino de matemática, Modelo SIR, GeoGebra

ABSTRACT

Motivated by COVID-19 pandemic, in this work we approach the two main strategies to fight the proliferation of this disease: the social distancing and the improving people's hygiene habits. The objective is to take this discussion into the school environment, seeking to show students at this level of education, that these actions can directly influence the transmission rate of the virus, and to lead the flattening of the infected curve. In this sense, we development a qualitative research, with an exploratory-explanatory characteristic, anchored in mathematical modeling, aiming to describe the effectiveness of these strategies from experimentation in a computational environment. Therefore, from the classic epidemiological model SIR, we developed two applications on GeoGebra. The first one is presented in the form of experimentation activity, directed to the student, exemplifying the application of mathematics in real-world problems: the spread of diseases. The second one is for the teacher; It shows how to lend the reputation of mathematics, the strength of modeling as a teaching and learning methodology, and the power of dynamic mathematics from GeoGebra to reinforce the importance of measures to combat COVID-19, that due to economic consequences, they suffer increasing resistance by the people. Our applications demonstrate the GeoGebra increasing ability to deal with sophisticated mathematical model. As hence, it is possible to discussing relevant social problems in basic education already, with effective participation of the students.

Keywords: COVID-19, Mathematical Modeling, Mathematics Teaching, SIR Model, GeoGebra

1. INTRODUÇÃO

A identificação de 27 casos de pneumonia em dezembro de 2019 na cidade de Whuan, província de Hubei na China, chamou a atenção para o surgimento de um novo agente patogênico capaz de provocar Síndrome Respiratória Aguda Grave (SRAG) em humanos. Em 07 de janeiro de 2020 o centro de controle de doenças chinês identificou um novo tipo de coronavírus denominado *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2* (SARS-CoV-2) como sendo o patógeno responsável pela síndrome, posteriormente denominada COVID-19 pela Organização Mundial de Saúde (OMS). A COVID-19, que é transmitida principalmente por *fômites respiratórios* (como perdigotos emitidos durante a tosse, sintoma presente em boa parte dos infectados), tem um potencial relativamente alto de fazer com que os indivíduos infectados precisem de assistência médica especializada, incluindo internação em unidades de tratamento intensivo (UTI), com taxa de mortalidade considerável. Por essa razão, já em 30 de janeiro de 2020, a OMS classificou o surto chinês como uma Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional, alertando principalmente os países com sistemas de saúde vulneráveis (Sohrabi et al., 2020).

Como previsto, a epidemia se espalhou pelo mundo e foi declarada uma pandemia em 11 de março de 2020 pela OMS (Brasil, 2020). Com taxa de transmissão elevada, o mundo vê o número de casos aumentar rapidamente, sobrecarregando os sistemas de saúde da maioria dos países em pouco tempo, com considerável número de mortes. A tabela 1 exibe os dados epidemiológicos de alguns países registrados pela Johns Hopkins University Center for Systems Science and Engineering (JHU CSSE), disponibilizados a partir de seu repositório GitHub (<https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19>).

Sem uma vacina ou medicamento específico, o tratamento dos sintomas em ambiente hospitalar se mostra a única alternativa para os pacientes que apresentam a forma grave da doença. Esse cenário impõe aos responsáveis pela saúde pública a implantação de estratégias que permitam diminuir a velocidade com que as pessoas contraem a COVID-19; o que vem sendo denominado *achatamento da curva de infectados*. Para atingir esse objetivo, a OMS reforça que é essencial promover a *melhoria dos hábitos de higiene das pessoas* — como lavar as mãos frequentemente com água e sabão ou usar álcool em gel — e, em especial, a adoção do *distanciamento social*. Essa última medida, no entanto, tem forte impacto econômico e enfrenta grande resistência por parte da população, como o mostra o levantamento realizado em Aquino et al. (2020).

Tabela 1: Dados da COVID-19 em alguns países até o dia 20/05/2020

País	Confirmados	Recuperados	Mortos
EUA	1.559.750	97.628	92.333
Rússia	308.705	85.392	2.972
Brasil	271.885	106.794	17.983
Espanha	232.037	150.376	27.778
Itália	226.699	129.401	32.169

Fonte: Elaborado pelos autores.

Uma vez que o distanciamento social tem se mostrado uma estratégia eficiente para levar ao achatamento da curva de infectados, a questão natural é como convencer, especialmente os mais jovens, que abrir mão de suas práticas de convívio social e melhorar hábitos de higiene, são medidas extremamente necessárias que não devem ser negligenciadas?

Neste artigo buscamos levar a discussão para o ambiente escolar, com intuito de mobilizar os alunos a promoverem essas informações em suas comunidades. Neste sentido, desenvolvemos uma pesquisa qualitativa, de características exploratória-explicativa, ancorada na modelagem matemática, visando possibilitar ao aluno, ainda que de forma intuitiva e idealizada, a construção do conhecimento necessário que permita reforçar sua percepção sobre a eficácia dessas estratégias de combate a proliferação de doenças virais transmitidas por contato. A ideia é emprestar a fama de ciência exata da matemática, a força da modelagem matemática como metodologia de ensino e aprendizagem, e o poder das ferramentas da tecnologia da informação para este fim.

Os estudos em epidemiologia aplicada têm por base a utilização de modelos matemáticos compartimentais fundamentados na teoria das equações diferenciais ordinárias e estão descritos em praticamente toda a bibliografia de referência sobre o tema (Hethcote, 2000, Brauer, 2010, Castillo, 2012). Mesmo os modelos mais complexos atualmente utilizados na tentativa de entender os aspectos qualitativos e quantitativos da COVID-19, como em Castilho, C. et al (2020), Shong, P. X. et. al. (2020) e Reed, J. M. et al. (2020), fazem uso dessa metodologia. As estratégias de combate, são obtidas a partir de simulações computacionais usualmente implementadas em linguagens de programação como MatLab, Python, Maple, etc. Este aparato teórico-metodológico costuma fazer parte dos currículos de formação de professores da educação básica (Boyce, 2020), mas estão distantes do nível de escolaridade que buscamos atingir. Embora existam aplicativos especializados, disponíveis de forma online inclusive, como o Epidemix (<https://royalveterinarycollege.shinyapps.io/epidemix/>), acreditamos que eles não

favorecem a construção do conhecimento em ambiente escolar que julgamos necessária.

No contexto da educação básica, o software GeoGebra aparece como um dos mais utilizados e difundidos. Embora sua utilização pareça se concentrar sob a capacidade de realizar construções geométricas de forma dinâmica (Tavares & Lopes, 2019), a inclusão de recursos para tratar problemas de probabilidade e estatística, manipular expressões de forma simbólica, bem como a capacidade de executar algoritmos numéricos, o colocam como uma ferramenta computacional apropriada para discussão de aplicações sofisticadas da matemática. O recente trabalho sobre métodos numéricos de resolução de equações diferenciais utilizando o GeoGebra feito por Bezerra e Ramos (2020) sugere a possibilidade de lidar com modelagem matemática com base nesse tipo de equação usando esse software, o que parece pouco usual no Brasil. Assim, desenvolvemos duas aplicações no GeoGebra, uma voltada ao aluno e outra ao professor da educação básica.

Na aplicação para os alunos usamos a abordagem clássica de simular o modelo SIR utilizado no estudo da disseminação de doenças virais não letais que conferem imunidade permanente. O objetivo é mostrar que o modelo exibe o comportamento qualitativo típico de epidemias desse tipo: crescimento exponencial inicial, a fase de redução da taxa de crescimento até atingir o platô da curva de infectados e finalmente, o decaimento até a extinção da epidemia. Embora esse modelo não seja adequado para previsões, nem para estudar a COVID-19, que é uma doença letal em alguns casos, se presta a identificar características qualitativas que foram vivenciadas em países onde a epidemia já passou, como a China. A aplicação é desenvolvida nos moldes de uma atividade a ser realizada pelo aluno, possibilitando vivenciar as fases da construção de conhecimento envolvidas na metodologia da modelagem matemática.

Na aplicação para o educador, adaptamos a simulação desenvolvida para os alunos para explicar, qualitativamente, a eficiência das medidas de combate à COVID-19 sugeridas pelas autoridades de saúde pública. Embora direcionado ao professor, a aplicação também pode ser feita em forma de atividade pelo aluno, desde que lhe seja fornecida orientação.

2. A CURVA EPIDEMIOLÓGICA DOS INDIVÍDUOS INFECTADOS

Quando um surto de alguma doença é detectado, o primeiro passo realizado pelos agentes de saúde é monitorar o número de infectados ao longo do tempo. Registros disponibilizados periodicamente, exibidos em boletins epidemiológicos, fornecem valores

para o número de casos confirmados $C(t)$, o de óbitos devido à doença $M(t)$, bem como o de infectados que se recuperaram $R(t)$. Todos como funções do período de tempo considerado. Com isso, a expressão

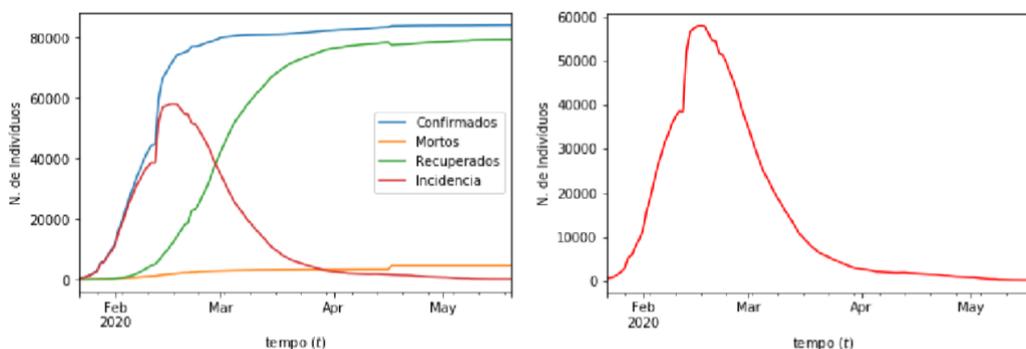
$$I(t) = C(t) - [M(t) + R(t)] \quad (1)$$

corresponde a uma amostra da função $I(t)$ que modela o número de infectados ao longo do tempo. Conectando-se os pontos $(t, I(t))$ num sistema de coordenadas cartesianas, onde o eixo horizontal representa o tempo e o eixo vertical registra o número de indivíduos (infectados), obtemos uma aproximação da chamada *curva de infectados ou curva de prevalência* da doença (Marthceva, 2015). A Figura 1 exhibe as curvas epidemiológicas do surto de COVID-19 na China (Figura 1a) com destaque para a curva de infectados (Figura 1b), construídas a partir dos dados disponibilizados pela universidade Johns Hopkins desde o início do surto até o dia 20 de maio de 2020.

Da curva de infectados (Figura 1b) podemos inferir algumas características básicas acerca do surto epidêmico:

- a epidemia apresenta uma fase inicial de crescimento exponencial;
- a segunda fase é marcada por uma inflexão na curva, indicando crescimento no número de infectados, porém com velocidade cada vez menor;
- eventualmente o número de infectados atingirá seu maior valor, caracterizado pelo “pico” na curva de infectados, usualmente denominado de *platô* da curva;
- após atingir o platô, o número de infectados começa a diminuir rapidamente até se manter em valores relativamente baixos.

Essa análise intuitiva, obtida a partir dos dados de um caso particular, gera questionamentos: todas as epidemias têm esse comportamento? Quanto tempo leva para atingir o platô da curva de infectados? Quais fatores epidemiológicos influenciam o platô da curva de infectados? É possível reduzir esse platô, ou seja, é possível achatar a curva de infectados? Como? Para se obter as respostas é necessário um estudo fenomenológico do surto, e muitas dessas só podem ser obtidas incluindo a modelagem matemática.



(a) Curvas epidemiológicas até 20/05/2020. (b) Curva de incidência $I(t)$ até 20/05/2020.

Figura 1: Curvas epidemiológicas de COVID-19 na China desde o início do surto até o dia 20/05/2020. Fonte: Produzido pelos autores (dados coletados da Universidade Johns Hopkins).

Ao abordar o modelo epidemiológico SIR, Weiss (2013) chama a atenção para resultados importantes em epidemiologia que passaram despercebidos pelas autoridades de saúde pública por muito tempo. Ele aponta que a razão para isso está no fato de que tais resultados não podem ser obtidos única e exclusivamente dos dados registrados pelas unidades de saúde. Entre esses resultados destaca-se a existência de um valor limiar, denominado *número de reprodução básico* ou *taxa de contágio*, representado por R_0 , que determina se um surto de uma doença tem potencial para desencadear uma epidemia ($R_0 > 1$) ou não ($R_0 < 1$). O R_0 é definido como o número médio de novos infectados produzidos a partir de um indivíduo infeccioso quando introduzido numa população formada exclusivamente por indivíduos suscetíveis à doença (Hethcote, 2000). No caso da COVID-19, Read et al. (2020) estimaram que o R_0 para o Brasil no início da pandemia era de $R_0 = 3.5$, mas que agora, no momento da escrita deste artigo, é estimado em torno de $R_0 = 1.4$.

Outros conceitos importantes só foram demonstrados a partir da modelagem matemática. Por exemplo, a ideia que em qualquer epidemia parte da população sai ilesa, denominada de *imunidade de rebanho*, bem como o estabelecimento de percentuais de vacinados em campanhas de imunização (Weiss, 2013). Ficando claro a importância da modelagem matemática no estudo da disseminação de doenças infecciosas.

3. MODELAGEM MATEMÁTICA E EPIDEMIOLOGIA

De modo geral, um modelo pode ser visto como uma criação cultural cuja essência é a representação idealizada da realidade, com o objetivo de torná-la descritível, qualitativa e quantitativa. Em resumo, transcreve-se um problema em linguagem científica para que então possa ser tratado pelo *método científico* (Sayão, 2001). Quando essa transcrição

se dá em linguagem matemática, usualmente a partir de sistemas de equações (algébricas, diferenciais, integrais, integro-diferenciais, etc.) temos os chamados *modelos matemáticos*. O processo de transformação de um questionamento do mundo real em um problema matemático, resolvê-lo e interpretar as soluções obtidas na linguagem original corresponde ao que é denominado *modelagem matemática* (Bassanezi, 2002).

O desenvolvimento de um modelo matemático, portanto, exige a mobilização de uma ampla variedade de competências e habilidades. É preciso entender a situação-problema dentro de seu próprio contexto, selecionar variáveis, formular hipóteses, produzir o modelo, utilizar o conhecimento matemático para obter soluções — o que pode exigir simplificação do problema original — interpretar e validar as respostas e, possivelmente, retornar ao início do processo para fazer ajustes. Essas características têm destacado, especialmente nos anos recentes, a modelagem matemática como uma promissora metodologia de ensino e aprendizagem da matemática na educação básica. Ela coloca o estudante como o sujeito ativo do processo, invertendo significativamente os papéis dos alunos e do professor (Santos & Lima, 2010). Boa parte das recentes pesquisas em educação matemática tem defendido esse caminho, que está em consonância com as diretrizes do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) refletidas nas recentes modificações do Sistema Educacional Brasileiro a partir das recomendações da Base Nacional Comum Curricular em vigor (Brasil, 2018).

De acordo com Marthceva (2015), o uso da modelagem matemática em epidemiologia tem seus primeiros registros no ano de 1766 com os trabalhos de Daniel Bernoulli, mas foi o estabelecimento do conceito de doença infecciosa por Robert Koch em 1890 que abriu caminho para os avanços nessa área, resultando na conquista do Prêmio Nobel por Sir Ronald Ross, graças aos seus trabalhos sobre a transmissão da malária. Em 1927, Kermarck e McKendric impulsionaram a área introduzindo os *modelos compartimentais* no estudo da disseminação de doenças infecciosas transmitidas por contato. Nessa abordagem a população de indivíduos envolvidos na dinâmica da doença é dividida em compartimentos distintos e se deseja modelar o fluxo de indivíduos entre eles. Essa metodologia está na base do desenvolvimento de modelos matemáticos aplicados à epidemiologia utilizados hoje em dia, dos mais simples aos mais realistas.

Neste trabalho abordamos uma versão bastante simplificada do modelo introduzido por Kermarck e McKendric, o chamado modelo SIR, resultante da divisão da população em três compartimentos: os indivíduos Suscetíveis, os Infecciosos e os indivíduos que não mais

participam da dinâmica da doença, denominados de Removidos. Na seção adiante abordamos esse modelo no contexto de uma doença viral não letal, transmitida por contato, que confere imunidade permanente, como algumas viroses. Nesses casos a letra R passa a representar o compartimento dos Recuperados.

4. O MODELO SIR BÁSICO

O modelo epidemiológico compartimental que discutiremos nesta seção é descrito matematicamente pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI, \\ I' &= \beta SI - \gamma I \\ R' &= \gamma I, \end{aligned} \tag{2}$$

onde, $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ são funções do tempo t que representam, respectivamente, as populações dos indivíduos de acordo com a situação epidêmica descrita acima.

Os *parâmetros epidemiológicos* do modelo são representados pelas constantes positivas β e γ que modelam, respectivamente, a *taxa de transmissão* do patógeno por contato entre indivíduos infecciosos e suscetíveis e a *taxa de remoção* dos indivíduos infectados. O modelo é complementado com condições iniciais, isto é, com valores

$$S(0) > 0, I(0) > 0, R(0) \geq 0, \tag{3}$$

que representam a população inicial, $t = 0$, em cada compartimento.

A dinâmica do sistema ocorre a partir do fluxo de indivíduos entre os compartimentos, representada na Figura 2, onde indivíduos suscetíveis se tornam infecciosos e os infectados se recuperam adquirindo imunidade permanente. Em surtos epidêmicos em populações de humanos, que em geral tem curta duração, variações demográficas naturais geralmente são desconsideradas.

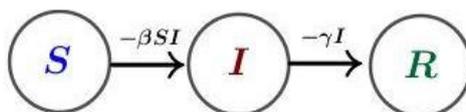


Figura 2: Diagrama de fluxo para o modelo SIR básico.
Fonte: Produzido pelos autores

Modelos matemáticos dados por equações na forma (2) e (3) são ditos *Problemas de Valor Inicial* (PVI) e fazem parte da chamada Teoria das Equações Diferenciais

Ordinárias (EDO), abordada durante a formação do professor de matemática (Boyce, 2020). As soluções são as funções $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ que mencionamos e as técnicas matemáticas utilizadas para encontrá-las não fazem parte das propostas pedagógicas para a educação básica.

Do ponto de vista prático, os profissionais de saúde, assim como a sociedade em geral, não estão unicamente interessados na representação algébrica das soluções, mas em aspectos qualitativos que determinam seu comportamento. Essas características podem ser extraídas a partir de técnicas gráficas, apoiadas em soluções aproximadas obtidas numericamente a partir da utilização de ferramentas computacionais. Essas técnicas fazem parte da chamada Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais e boa parte delas estão implementadas no GeoGebra.

O GeoGebra disponibiliza um comando para encontrar numericamente as soluções de um PVI e, simultaneamente, esboçar o gráfico das soluções diretamente na *Janela de visualização gráfica*. Aliada a capacidade de interpretar os parâmetros do modelo como *controles deslizantes*, podemos simular o modelo dado pelas equações (2) e (3) e, em tempo real, ver o efeito dos parâmetros sobre o comportamento qualitativo das soluções.

4.1 Simulando o modelo SIR básico com o GeoGebra

Nesta seção apresentamos uma construção simplificada do modelo SIR básico no GeoGebra Clássico 5, versão para desktop, que acreditamos estar acessível a todos os alunos da educação básica. O download do programa pode ser feito diretamente da página oficial do programa, de onde também é possível utilizar a versão online (<https://www.geogebra.org/download>). Os passos aqui descritos, com pouquíssimas adaptações, funcionam na versão online.

O comando básico para resolver numericamente sistemas de equações diferenciais é: *ResolverEDONumericamente* ($\{Slinha, Ilinha, Rlinha\}, t0, \{S0, I0, R0\}, tf$). Vamos descrever cada um desses elementos:

- a lista $\{Slinha, Ilinha, Rlinha\}$ representa a lista de derivadas, os lados direitos das equações no sistema de EDOs (2);
- $t0$ e tf representam o *tempo inicial* e o *tempo final* da simulação. Usamos $tf = 90$ (dias). A sintaxe original do comando identifica esses valores como *<Abscissa Inicial>* e *<Abscissa Final>*, respectivamente;

- finalmente, a lista $\{S_0, I_0, R_0\}$ especifica as condições iniciais do PVI, estabelecidas em (3). Usamos $S_0 = 0.99$, $I_0 = 0.01$ e $R_0 = 0$. A sintaxe original identifica essa lista como *<Lista de Ordenadas Iniciais>*.

Para a construção do modelo, executamos os seguintes passos:

- 1) Inicialmente criamos as constantes (números no GeoGebra). No campo *Entrada*: digitamos: $S_0 = 0.99$ e pressionamos a tecla *<enter>*. Repetimos o procedimento para $I_0 = 0.01$, $R_0 = 0$, $t_0 = 0$ e $t_f = 90$, um de cada vez;
- 2) Antes de definir as derivadas do modelo, criamos um *controle deslizante* para representar o parâmetro β associado à taxa de transmissão. Fazemos isso a partir do botão correspondente na barra de ferramentas, como mostra a Figura 3.



Figura 3: Botão *Controle Deslizante* na barra de ferramentas do GeoGebra.
Fonte: Produzido pelos autores.

Após selecionarmos o botão e clicarmos na janela de visualização o controle é criado. Um menu de configuração é exibido, como mostra a Figura 4.

Para configurá-lo fazemos o seguinte:

- a) com o botão $[a]$ no canto direito do campo *Nome* definimos o nome do controle para β .
- b) definimos o valor mínimo para *min*: 0 e máximo para *max*: 1.0. Esses valores representam *nenhuma transmissão* e *transmissão máxima* respectivamente. Definimos *incremento*: 0.01.
- c) agora é só confirmar a configuração pressionando o botão [OK].

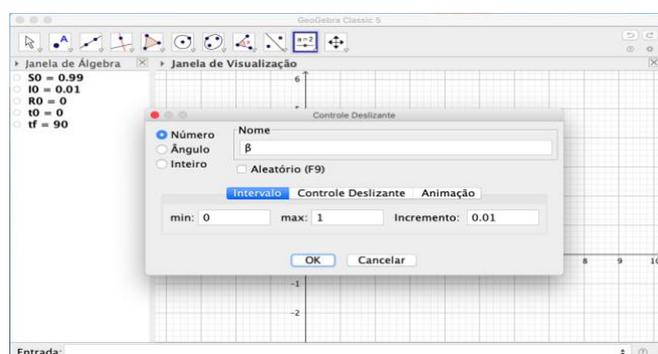


Figura 4: Menu de configuração do *Controle Deslizante* para a taxa de transmissão β .
Fonte: Produzida pelos autores.

- 3) O parâmetro taxa de recuperação γ corresponde, no cenário mais básico, ao inverso do tempo de infecção. No caso da COVID-19, que tem tempo médio de infecção de 14 dias, podemos definir $\gamma = 1/14 \approx 0.071$.
- 4) No campo *Entrada*: digitamos $Slinha(t,S,I,R) = -\beta*S*I$ e pressionamos $\langle enter \rangle$. Repetimos o procedimento para: $llinha(t,S,I,R) = \beta*S*I - \gamma*I$ e $Rlinha(t,S,I,R) = \gamma*I$;
- 5) Finalmente, pedimos para o GeoGebra resolver o PVI com o comando *ResolverEDONumericamente*($\{Slinha, llinha, Rlinha\}, t0, \{S0, I0, R0\}, tf$).
- 6) O GeoGebra retorna as três curvas que compõem a solução, nomeadas por ltn1, ltn2, ltn3 que correspondem, respectivamente, a $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$, como mostra a figura 5.

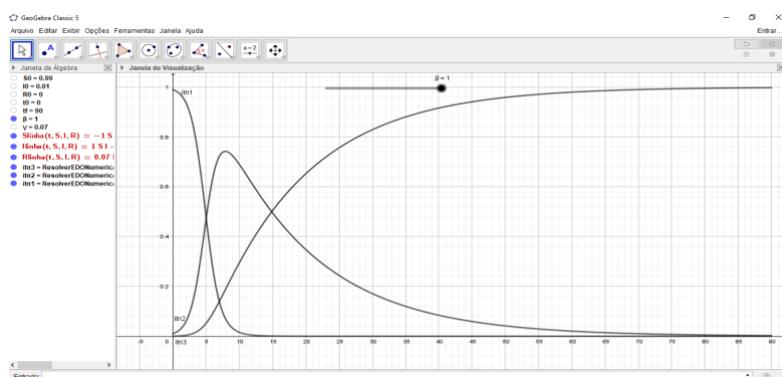


Figura 5: Solução numérica do PVI fornecida pelo GeoGebra.
Fonte: Produzida pelos autores.

Vamos fazer alguns ajustes para melhorar a visualização do resultado:

- a) na *Janela de Álgebra* clicamos com o botão direito do mouse sobre ltn1 e selecionamos *Propriedades*. Na aba *Básico* mudamos o nome para *St*. Na aba *Cor* atribuímos a cor *azul* e, na aba *Estilo*, atribuímos à *Espessura da Linha* o valor 6. Repetimos o para a curva ltn2 atribuindo o nome *It*, a cor *vermelha* e espessura 6. Para a curva ltn3 atribuímos o nome *Rt*, a cor *verde* e a mesma espessura das demais;
- b) Melhoramos a exibição das curvas ajustando os eixos independentemente na Janela de Visualização;
- 7) Finalmente, acrescentamos uma reta horizontal, digitando $y = 0.2$, para sinalizar o limite de 20% da população como capacidade de atendimento pelos sistemas de saúde. Acessando as propriedades dessa reta, modificamos o nome para *Limite* (representando a capacidade máxima do sistema de saúde), a cor para *Laranja* e o estilo para *pontilhado*.

O resultado final está representado na Figura 6. A curva em vermelho corresponde a *curva dos infectados*. A solução foi obtida considerando a taxa máxima $\beta = 1$, que é o valor especificado no controle deslizante.

Desmarcando a curva dos Suscetíveis (em azul) e a curva dos Recuperados (em verde) na *Janela de Álgebra*, exibimos apenas a curva dos infectados. A primeira observação é que esta curva possui as características qualitativas que destacamos quando produzimos a curva correspondente aos casos de COVID-19 na China a partir dos dados oficiais (ver Figura 1b): uma fase inicial de crescimento exponencial, uma inflexão na curva com crescimento em velocidade decrescente, um platô representando o número máximo de infectados e, após o platô, um decrescimento acelerado para níveis de infectados próximos de zero (ver seção 2). O modelo reflete adequadamente os aspectos qualitativos da situação real, reforçando a ideia de que surtos epidêmicos usualmente apresentam esse tipo de comportamento. Além disso, considerando a taxa de transmissão máxima, observamos que a chamada imunidade de rebanho só se estabelece após aproximadamente 70% da população ter se infectado. Esse percentual, evidentemente é fictício dado o modelo idealizado que usamos, mas sugere que o número de infectados deve ser razoavelmente grande até se atingir esse tipo de imunidade.

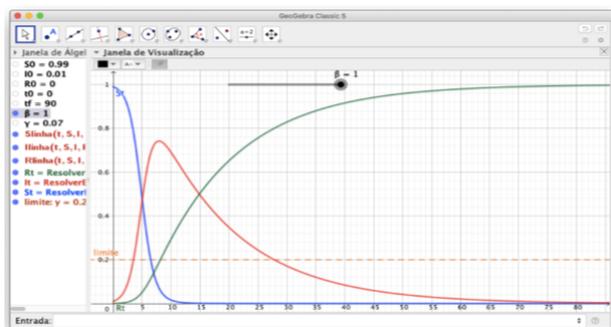


Figura 6: Curvas epidemiológicas obtidas a partir da simulação do modelo SIR básico com taxa de transmissão máxima $\beta = 1$. As curvas dos Suscetíveis, Infectados e Removidos estão apresentadas nas cores azul, vermelho e verde, respectivamente.

Fonte: Produzido pelos autores.

Para investigarmos o achatamento da curva de incidência usamos o controle β para a taxa de transmissão da doença. O objetivo é identificar o efeito dessa taxa sobre a forma da curva. Ao diminuirmos a taxa de transmissão percebemos que a curva é achatada com uma diminuição do platô, ao mesmo tempo em que a duração do surto epidêmico aumenta. A Figura 7 mostra que para mantermos o número de infectados dentro da capacidade de atendimento precisamos reduzir a taxa de transmissão para, pelo menos, $\beta = 0.16$.

Essa simples atividade prática, amplamente acessível aos alunos, permite discutir, em sala de aula, aspectos qualitativos relativos à disseminação de uma doença epidêmica, *destacando, como medida de contenção, a importância em se reduzir a taxa de transmissão do patógeno*. A questão agora é como fazer isso? Sem um tratamento específico nem

vacina, como no caso da COVID-19, as estratégias sugeridas são bons hábitos de higiene e distanciamento social. Para explicarmos isso precisamos entender algumas das hipóteses que fundamentam a formulação do modelo.

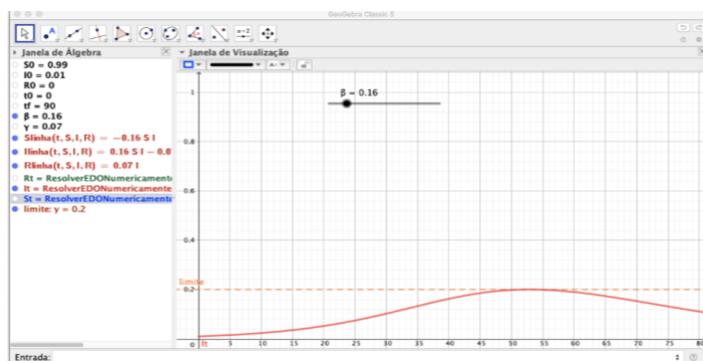


Figura 7: Investigação do efeito da taxa de transmissão sobre o achatamento da curva de incidência (infectados). Para atender a capacidade de atendimento, a taxa de transmissão precisa baixar para $\beta = 0.16$ aumentando, em consequência, a duração (em dias) do surto.
 Fonte: Produzido pelos autores.

4.2 Entendendo a construção do modelo SIR

Como vimos, no cenário simplificado e fictício que estamos considerando, um surto epidêmico divide a população em três compartimentos distintos. A população varia em cada compartimento, e é modelada pelas funções $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$, respectivamente. Neste sentido, $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ representa a população total ao longo do tempo. Estamos interessados em entender o comportamento dessas funções ao longo do tempo.

Vamos considerar a curva de infectados. Fixado um intervalo de tempo Δt (intervalos diários, semanais, mensais, etc.), $I(t)$ representa o número de infectados no tempo t . Com isso se ni representa os novos infectados e nr os novos recuperados no intervalo de tempo $(t, t + \Delta t]$, a expressão

$$I(t + \Delta t) = I(t) + ni - nr \tag{4}$$

fornece o número de infectados no tempo $t + \Delta t$. Dessa forma, precisamos estabelecer hipóteses, com base no processo epidemiológico da disseminação da doença, para modelarmos matematicamente ni e nr .

Como em todo processo de modelagem, hipóteses são assumidas a fim de termos uma descrição idealizada do fenômeno modelado. Aqui supomos que:

- a população é grande e está misturada de forma homogênea;

- ao se infectar, o indivíduo se torna automaticamente infeccioso; isto é, estamos supondo que o tempo de incubação da doença é 0;
- o número de contatos de um indivíduo é proporcional ao tamanho $N(t)$ da população, com constante de proporcionalidade $c > 0$. Assim, $c \cdot N(t)$ representa o número de contatos de um indivíduo infectado por unidade de tempo;
- para haver contágio, o contato de um indivíduo infeccioso precisa ser com um indivíduo suscetível. A probabilidade de isso acontecer é $S(t)/N(t)$;
- nem todo contato de indivíduo infeccioso e suscetível resulta em infecção. Fazemos $0 \leq p \leq 1$ representar a probabilidade do contato resultar em infecção.

Com essas hipóteses, o número de novos infectados por unidade de tempo produzidos por um indivíduo infeccioso é $(c \cdot N(t) \cdot S(t)/N(t)) \cdot p$. Isso implica que no intervalo $(t, t + \Delta t]$, o número de novos infectados resultante da interação entre todos infecciosos e suscetíveis é

$$ni = c \cdot S(t) \cdot p \cdot I(t) \cdot \Delta t = c \cdot p \cdot S(t) \cdot I(t) \cdot \Delta t. \quad (5)$$

Por outro lado, uma fração γ da população de indivíduos infecciosos se recupera e é removida da dinâmica epidemiológica por unidade de tempo. Assim

$$nr = \gamma \cdot I(t) \cdot \Delta t \quad (6)$$

representa o número de novos recuperados no intervalo de tempo $(t, t + \Delta t]$. Substituindo (5) e (6) na equação (4) que modela a dinâmica dos indivíduos infecciosos obtemos

$$I(t + \Delta t) = I(t) + c \cdot p \cdot S(t) \cdot I(t) \cdot \Delta t - \gamma \cdot I(t) \cdot \Delta t. \quad (7)$$

Do ponto de vista da saúde pública, ganha importância a velocidade em que o patógeno se espalha. Em outras palavras, é importante determinar como varia o número de infectados em relação ao tempo. Na média, essa velocidade é dada pela expressão

$$\frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} = c \cdot p \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma I(t). \quad (8)$$

Essa medida de velocidade de propagação da doença se torna mais precisa à medida que diminuirmos o intervalo de tempo Δt entre os registros do número de infectados. Com base nas hipóteses, uma *boa aproximação* é supor que o tempo se passa de forma contínua, o que permite considerar Δt arbitrariamente pequeno. Assim, o limite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} = c \cdot p \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma I(t), \quad (9)$$

representa a *velocidade instantânea* de propagação da doença em nível populacional. Usando a terminologia usual, a equação (9) pode ser reescrita na forma

$$I' = \beta SI - \gamma I \quad (10)$$

que corresponde a dinâmica dos indivíduos infecciosos do modelo (2), onde omitimos a dependência explícita em t que fica subentendida. Raciocinando de forma inteiramente análoga obtemos as equações para S' e R' em (2).

A discussão acima, embora um tanto quanto técnica, fornece inúmeras oportunidades de intervenção em sala de aula. A primeira delas trata da necessidade do estabelecimento de hipóteses em todo e qualquer processo de modelagem, buscando sempre uma situação idealizada do problema que permita analisar as questões relevantes do fenômeno. Ao lidar com essas hipóteses, por sua vez, busca-se informações em outras áreas do conhecimento, específicas ao problema em questão, o que favorece as conexões interdisciplinares. A modelagem das hipóteses geralmente resulta em novos conceitos matemáticos que aqui envolveram, entre outras coisas, *proporcionalidade*, *noções de probabilidade*, *aproximação* e *taxas de variação*. Essa última justificando inclusive a modelagem no contexto de equações diferenciais ordinárias aqui representada na perspectiva de velocidade instantânea de propagação do patógeno.

Como vimos, a taxa de transmissão é obtida na forma $\beta = c \cdot p$, onde c representa a taxa de contato entre os indivíduos da população e p a probabilidade de contágio quando ocorre um contato efetivo entre um suscetível e um infectado. Dessa forma, podemos interpretar c como uma medida do distanciamento social e p como uma probabilidade de contágio que, em última instância, poderia ser associada aos hábitos de higiene capazes de reduzir a chance de infecção mesmo em contato com o vírus, como lavar as mãos com frequência ou a utilização de máscaras faciais.

Na seção seguinte adaptamos o modelo SIR que construímos para investigarmos como c e p , nessa interpretação, afetam individualmente o comportamento da curva de infectados. A associação dessas taxas com o distanciamento social e medidas de higiene vai permitir, ainda que de forma simplificada, termos uma ideia da importância dessas medidas de controle da disseminação de uma epidemia como no caso da COVID-19.

5. INVESTIGANDO AS ESTRATÉGIAS DE COMBATE À COVID-19

Nesta seção abordamos as estratégias de *melhoria dos hábitos de higiene* e o *distanciamento social* no combate a disseminação de uma infecção viral.

Inicialmente adaptamos o modelo SIR de antes para incluir os óbitos devido à doença, separando a classe dos Recuperados em duas: a classe dos *Recuperados* e a classe dos *Mortos*, refletindo a abordagem que vem sendo dada a pandemia do novo coronavírus. Com isso, as equações do modelo ganham a forma:

$$\begin{aligned}S' &= -\beta SI, \\I' &= \beta SI - \gamma I - dI, \\R' &= \gamma I, \\M' &= dI,\end{aligned}\tag{11}$$

com $\beta = c \cdot p$. As constantes positivas γ e d representam, respectivamente a *taxa de recuperação* e a *taxa de mortalidade* devido à doença. Como antes, o modelo é complementado com condições iniciais

$$S(0) > 0, I(0) > 0, R(0) \geq 0 \text{ e } M(0) \geq 0.\tag{12}$$

Para a simulação do modelo no GeoGebra, usamos as configurações: $S_0=0.99$, $I_0=0.01$, $R_0=0$ e $M_0=0$ para as condições iniciais, $\gamma = 0.071$, $d = 0.003$ para os parâmetros fixos e, para os controles deslizantes $0 \leq c, p \leq 1$ com *Incremento* = 0.01. A construção segue basicamente os passos efetuados para o modelo SIR básico, por essa razão não os descreveremos. Além disso, detalhes estéticos foram acrescentados, o que pode dificultar a implementação sem o conhecimento técnico adequado (para o aluno, é necessário o apoio de um instrutor). A ideia, é apenas usar o modelo para analisar as estratégias de combate a disseminação da doença. Um *applet* do GeoGebra com toda a construção está disponível no site (<https://www.geogebra.org/m/xctz2whx>). A partir dele podemos acessar o recurso *Protocolo de Construção* do menu *Exibir* do sistema, ou mesmo o *Abrir com o GeoGebra App* na versão online, para se ter acesso aos passos realizados na construção.

A Figura 8 mostra o resultado final da construção onde podemos investigar o efeito das medidas de distanciamento social e dos hábitos de higiene em relação ao achatamento da curva de infectados e da capacidade de atendimento dos sistemas de saúde, configurada para 20% da população. Os valores usados para configurar os parâmetros são fictícios e não visam estabelecer previsões. O interesse repousa em aspectos qualitativos, buscando entender a importância das estratégias de controle da disseminação da doença.

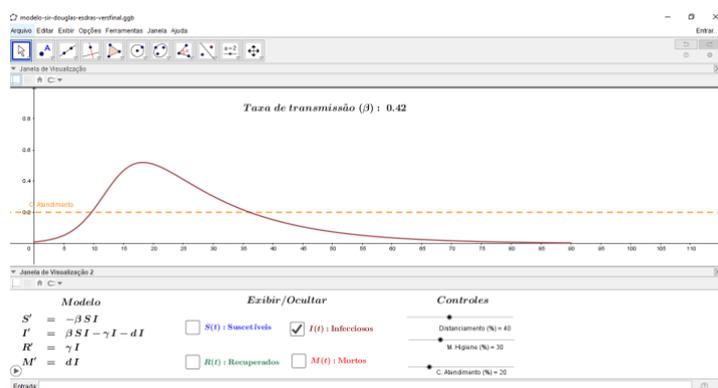


Figura 8: Investigando o efeito dos níveis de distanciamento social e de medidas de higiene sobre o platô da curva de incidência e seu relacionamento com a capacidade de atendimento dos sistemas de saúde.
Fonte: Produzida pelos autores.

Na Figura 8 simulamos o cenário onde as medidas de higiene garantem proteção em torno de 30% de chance de contágio quando um indivíduo suscetível é exposto ao patógeno. Com taxa de distanciamento social de 40% observamos que a curva de infectados ultrapassa a capacidade de atendimento. Concluimos ser preciso aumentar o distanciamento social ou melhorar os hábitos de higiene para achatá-la. Considerando que há uma limitação natural referente aos hábitos de higiene, optamos por manter a taxa de proteção desta medida em 30% e investigar qual deveria ser o índice de distanciamento social necessário para achatá-la nessas condições. A figura 9 mostra que, o índice de distanciamento social precisa ser de pelo menos 76%.

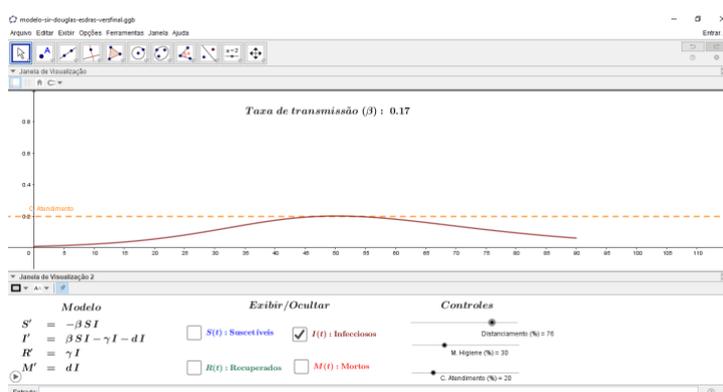


Figura 9: Índice de distanciamento social suficiente para achatá-la quando fixada a taxa dos hábitos de higiene.
Fonte: Produzida pelos autores.

Nossa aplicação também permite que outros cenários possam ser analisados incluindo, por exemplo, o aumento da capacidade de atendimento. Essa também vem sendo uma medida adotada pelas autoridades responsáveis pela saúde pública.

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho buscamos levar a discussão sobre as medidas de combate à pandemia de COVID-19 para dentro do ambiente escolar, a partir da utilização da modelagem matemática como metodologia de ensino e aprendizagem, com o objetivo de reforçar a importância de se adotarem melhores hábitos de higiene e, especificamente, o distanciamento social, como estratégias eficientes contra a disseminação da doença.

Usamos um modelo epidemiológico do tipo SIR fundamentado na teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, mostrando que é possível conduzir a discussão nesse ambiente escolar a partir da utilização de recursos de Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC). Utilizamos o software de matemática dinâmica GeoGebra, construindo duas aplicações que possibilitam a investigação, por parte dos alunos, da eficiência dessas estratégias de combate à doença.

Além da construção das aplicações no GeoGebra, discutimos hipóteses básicas utilizadas na formulação do modelo, onde conceitos como proporcionalidade, crescimento exponencial, platô da curva, achatamento da curva, etc. que costumam surgir nos noticiários, foram esclarecidos. Noções de probabilidade e estatística, como a taxa de recuperação da doença estar associada ao fato de que o tempo de infecção supostamente é uma variável aleatória de tipo exponencial, podem ser objetos de investigações posteriores pelos alunos. Outras possibilidades se mostram viáveis, e estão incluídas nas diretrizes estabelecidas na Base Nacional Comum Curricular, como a validação dos resultados obtidos a partir de dados reais da pandemia, que estão amplamente disponíveis. Uma verificação da eficácia in loco desta abordagem em sala de aula é o passo seguinte de nossa pesquisa e já está em andamento.

Esperamos ter mostrado aos professores de matemática que, com o auxílio da tecnologia, é possível tratar no ambiente escolar, questões relevantes da vida real, mesmo quando a matemática envolvida parece estar fora dos objetivos de aprendizagem do aluno da educação básica. Questões envolvendo vacinação, como, por exemplo, o percentual de vacinados para conter uma epidemia, tópico que ganhará relevância em breve, são

estabelecidos usando modelos epidemiológicos compartimentais como o SIR. No momento em que grupos antivacinas ganham força pelo mundo, esse assunto com certeza precisará fazer parte do debate escolar.

REFERÊNCIAS

- Aquino, E. M. L., et al. (2020). Social distancing measures to control the COVID-19 pandemic: potential impacts and challenges in Brazil. *Ciência & Saúde Coletiva*. doi: <https://doi.org/10.1590/1413-81232020256.1.10502020>
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Editora Contexto.
- Bezerra, F. D. M. & Ramos, M. W. A. (2020) Métodos de Euler e Runge-Kutta por meio de um applet do geogebra. *Professor de Matemática Online (PMO)*. doi: <https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo82>
- Boyce, W. C. (2020). *Equações Diferenciais Ordinárias e Problemas de Valores de Contorno*. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos (LTC).
- Brasil. (2019). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Educação é base*. Brasília, MEC/CONSED/UDIME. Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_verseofinal_site.pdf
- Brasil. (2020). Boletim Epidemiológico: Doença pelo coronavírus 2019. *Brasil, Ministério da Saúde*. Recuperado de <https://www.saude.gov.br/images/pdf/2020/April/06/2020-04-06-BE7-Boletim-Especial-do-COE-Atualizacao-da-Avaliacao-de-Risco.pdf>
- Brauer, F. & Chaves-Castillo, C. (2010). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. New York: Springer.
- Castilho, C., et al. (2020). Assessing the efficiency of different control strategies for the COVID-19 epidemic. *Electronic Journal of Differential Equations*, v. 2020. n. 64, Recuperado de: <http://ejde.math.txstate.edu>
- Hethcote, H. W. (2000). The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*, v. 42, n. 4, 599-653. doi: <https://doi.org/10.1137/S0036144500371907>
- Marthceva, M. (2015). *An introduction to mathematical epidemiology*. New York: Springer.
- Read, J. M. et al. (2010) Novel coronavirus 2019-ncov: early estimation of epidemiological parameters and epidemic predictions. *medRxiv*, Cold Spring Harbor Laboratory Press. doi: <https://doi.org/10.1101/2020.01.23.20018549>

- Santos, M. C. & Lima, P. F. (2010). Considerações sobre a matemática no ensino fundamental. *Anais do I seminário nacional: currículo em movimento-perspectivas atuais*. Belo horizonte.
- Sayão, L. F. (2001). Modelos Teóricos em Ciência da Informação-Abstração e Método Científico. *Ciência da informação*, SciELO Brasil, v. 30, n. 1, 82-91.
- Shong, P. X. et al. (2020). An epidemiologica forecast model and software assessing intervotions on COVID-19 epidemic in China. MedRxiv, Cold Spring Habor Laboratory Press. Doi: <https://doi.org/10.1101/2020.02.29.200294>.
- Sohrabi, C. et al. (2020). World Health Organization Declares Global Emergency: A review of the 2019 novel coronavirus (COVID-19). *International Journal of Surgery*, 76, 71-76. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijisu.2020.02.034>
- Tavares, F. G. & Lopes, C. E. (2019). Mapeamento Do Uso Do Geogebra No Ensino De Estatística. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*. doi: <http://doi.org/105007/1981-1322.2019.e62800>
- Stewart, J. & Day, T. (2016). Biocalculus: Calculus, Probability, and Statistics for the Life Sciences. USA: Cengage Learning.
- Weiss, H. H. (2013). The SIR Model and the Foundations of Public Health. *MATerials MAThemàtics*, v. 2031, 1-17.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA

Achatando a curva da covid-19: discutindo estratégias usando o geogebra

Esdras Jafet Aristides da Silva

Doutor em Matemática

Universidade de Pernambuco - Campus Mata Norte, Matemática, Nazaré da Mata, Pernambuco, Brasil

esdras.jafet@upe.br

<https://orcid.org/0000-0001-7510-6238>

Douglas de Souza Rodrigues da Silva

Licenciando em Matemática

silva.s.r.douglas@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-0739-0641>

Endereço de correspondência do principal autor

Av. Jockey Clube, 18. Apto. 101. Bloco A

CEP - 50630-440. Recife, PE, Brasil

AGRADECIMENTOS

Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

Concepção e elaboração do manuscrito: E. J. A. Silva, D. S. R. Silva

Simulação Computacional: E. J. A. Silva, D. S. R. Silva

Discussão dos resultados: E. J. A. Silva, D. S. R. Siva



FINANCIAMENTO

Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM

Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES

Não se aplica.

LICENÇA DE USO – uso exclusivo da revista

Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution](#) (CC BY) 4.0 International. Esta licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista

Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista

Mérciles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista

Recebido em: 09-06-2020 – Aprovado em: 24-08-2020

