

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: UMA ANÁLISE DE LIVROS-TEXTO INDICADOS POR CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA BRASILEIROS

Ordinary Differential Equations: An analysis of Textbooks indicated by Mathematics Degree Courses in Brazilian

Alessandra Lucero **SILVA**
Universidade Federal do Pampa, Itaqui-RS, Brasil
alelucero182@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-0614-7842> 

Maria Arlita da Silveira **SOARES**
, Universidade Federal do Pampa, Caçapava do Sul-RS, Brasil
mariasoaes@unipampa.edu.br
<https://orcid.org/0000-0001-5159-8653> 

Leugim Corteze **ROMIO**
Universidade Federal do Pampa, Itaqui-RS, Brasil
leugimromio@unipampa.edu.br
<https://orcid.org/0000-0001-5164-3792> 

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo 

RESUMO

Este texto tem por objetivo apresentar uma pesquisa que analisou de que modo as propostas para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), presentes em livros-texto, podem contribuir no trabalho de professores de Matemática da Educação Básica ao selecionarem situações-problema envolvendo o conceito de função. Os pressupostos teóricos para construção desta pesquisa referem-se a Abordagem Qualitativa e a Análise de Modelos Matemáticos. Optou-se por uma pesquisa qualitativa com a produção e análise dos dados seguindo pressupostos da Análise de Conteúdo. A fonte de produção de dados foi a análise de dois livros-texto de Equações Diferenciais mais citados por cursos brasileiros de Licenciatura em Matemática. A análise dos dados permitiu concluir que ambos os livros apresentam modelos matemáticos para estudar EDO, sendo as funções mais exploradas as exponenciais, quadráticas e trigonométricas, em detrimento da função logarítmica, não abordada nos capítulos analisados. Quanto a abordagem qualitativa, verificou-se que é utilizada, também, em ambos os livros, porém de forma limitada em um deles, pois não explora as potencialidades do campo de direções.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias, Abordagem Qualitativa, Análise de Modelos Matemáticos, Campo de Direções

ABSTRACT

This text aims to present a research that analyzed how the proposals for the study of Ordinary Differential Equations (EDO), present in textbooks, can contribute to the work of school Mathematics teachers when selecting problem situations involving the concept of function. The theoretical assumptions for the construction of this research refer to the Qualitative Approach and the Analysis of Mathematical Models. We opted for a qualitative research with the production and analysis of data following the premises of Content Analysis. The source of data production was the analysis of two textbooks on Differential Equations most cited by Brazilian Mathematics Degree courses. The analysis of the data allowed to conclude

that both books present mathematical models to study EDO, the most explored functions are exponential, quadratic and trigonometric, in detriment of the logarithmic function, not addressed in the analyzed chapters. As for the qualitative approach, it was found that it is also used in both books, but to a limited extent in one of them, as it does not explore the potential of the directions field.

Keywords/Palabras clave: Ordinary Differential Equations, Qualitative Approach, Analysis of Mathematical Models, Directions Field

1 INTRODUÇÃO

A importância do estudo de disciplinas específicas na formação inicial do professor de Matemática (Álgebra e Cálculo, por exemplo), bem como, suas implicações nas atividades desse profissional, em particular, as desenvolvidas na Educação Básica são discutidas por documentos produzidos pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e por pesquisas da área da Educação Matemática.

No documento elaborado pela SBEM, em 2003, durante a realização do Seminário Nacional de Licenciaturas em Matemática, lê-se que o conhecimento abordado nas disciplinas específicas “envolve a aprendizagem de conceitos matemáticos avançados e a ressignificação de conceitos elementares, de modo a contemplar tanto uma fundamentação e argumentação matemáticas, quanto sua prática profissional futura” (SBEM, 2003, p. 12). Neste sentido, as disciplinas específicas são entendidas como ampliadoras do conhecimento, pois permitem ampliar o conhecimento matemático do futuro professor, tanto do ponto de vista escolar quanto acadêmico.

A disciplina de Cálculo, em cursos de licenciatura, segundo Fiorentini (2005), é uma disciplina ampliadora do conhecimento matemático. Estudá-la é fundamental pois possibilita, em especial, o entendimento do conceito de função e suas aplicações, conceito este estudado desde os Anos Finais do Ensino Fundamental (em particular, a partir do 9º ano). Além disso, amplia “a visão do futuro professor sobre o desenvolvimento histórico da própria matemática, que teve consequências contundentes para a humanidade nos últimos séculos” (SBEM, 2013, p. 19).

Sabe-se que as funções modelam diversas situações da própria matemática, do dia a dia e de outras áreas do conhecimento. Assim, ampliar o entendimento desse conceito é um dos papéis da formação inicial do professor. Nesta etapa da formação é preciso explorar os vários tipos de funções: lineares, racionais, polinomiais, periódicas, exponenciais e logarítmicas, entre outras. Neste sentido, entende-se que o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), conteúdos/conceitos presentes nos cursos de Cálculo na

maioria dos cursos de licenciatura em Matemática brasileiros, torna mais consistente o conceito de função e, conseqüentemente, possibilita ao professor estabelecer subsídios para abordar situações reais que podem ser modeladas por diferentes funções, bem como, fenômenos naturais, sociais e econômicos que podem, também, ser modelados por leis que envolvem taxas de variação, resultando em equações diferenciais (Machado, 1988).

Os livros-texto podem ser decisivos na forma como se ensina e se aprende, pois, o processo de aprendizagem de conteúdos, mediante a adoção de livros-texto, ocorre pela forma como eles são apresentados e discutidos, além de exemplos abordados e de atividades propostas. Dessa forma, é necessário trabalhar com livros-texto adequados aos objetivos do professor e do aluno (Lajolo, 2008). Estendendo essas afirmações para o âmbito da formação inicial de professores de matemática em cursos de Licenciatura, compreende-se que devem ser utilizados livros-texto que auxiliam, o professor formador e o futuro professor, no estabelecimento de relações entre os conteúdos estudados no Ensino Superior e os conteúdos que o futuro professor ensinará na Educação Básica. No que tange o livro-texto de Equações Diferenciais Ordinárias, este deve contribuir para o estabelecimento de relações entre os conceitos de EDO aprendidos em cursos de formação inicial de professores e os conceitos/conteúdos ensinados na Educação Básica relacionados à EDO, como, por exemplo, proporcionalidade, função e a Matemática como uma ferramenta para análise e interpretação de fenômenos reais.

A partir desses entendimentos iniciais, delimitamos a seguinte questão de pesquisa: De que forma as propostas para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, apresentadas em livros-texto, podem contribuir com o trabalho do professor de Matemática da Educação Básica ao selecionar situações-problema que envolvam o conceito de função? Para respondê-la foi elaborado como objetivo, analisar e identificar o modo como as propostas para o estudo de EDO, apresentadas em dois livros-texto, permitem contribuir no trabalho do professor de Matemática, em especial, nas situações-problema envolvendo o conceito de função.

2 ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: ALGUNS ENTENDIMENTOS

O estudo de EDO em cursos de licenciatura em Matemática, conforme já mencionado, contribui, dentre outros aspectos, para associar a Matemática Acadêmica aos

conteúdos matemáticos da Educação Básica na resolução, por exemplo, de situações reais. Javaroni (2007), afirma que as EDO modelam diversos fenômenos físicos:

Muitos dos princípios, ou leis, que descrevem o comportamento do mundo físico são proporções, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual determinados fenômenos acontecem. Ao modelar esses fenômenos, freqüentemente se obtêm equações que envolvem as variações das quantidades (variáveis), presentes e consideradas essenciais na situação analisada. Assim, as leis que regem tal fenômeno podem ser representadas por equações de variações. Quando essas variações são instantâneas e o fenômeno se desenvolve continuamente, as equações são denominadas equações diferenciais (Javaroni, 2007, p. 30).

Corroboram com esta ideia os pesquisadores Laudares e Miranda (2007) ao mencionarem que as EDO apresentam-se como objeto para o estudo dos fenômenos físicos, usando a derivação com as noções de “taxa de variação” em problemas de várias áreas do conhecimento, bem como as funções, que frequentemente representam os fenômenos matemáticos. Ademais, cabe destacar que as soluções de EDO são funções que satisfazem determinada equação.

De maneira geral, uma equação diferencial é uma pergunta do tipo “Qual a função cuja derivada satisfaz determinada relação?” Ou seja, uma equação diferencial é uma equação (no sentido de igualdade envolvendo uma incógnita) onde a incógnita é uma função, sendo que as informações disponíveis para a determinação da função desconhecida envolvem uma derivada (Machado, 1988, p. 153)

Defende-se que, ao analisar modelos matemáticos que envolvem EDO, o licenciando estará trabalhando com a solução desta equação, que se refere a uma função. Deste modo, analisar o comportamento das soluções de EDO é analisar o comportamento de funções. Assim, o estudo de EDO constitui-se como potente objeto de enriquecimento do trabalho do futuro professor no ensino de funções, pois fornece subsídios para ampliar a discussão no que tange à taxa de variação entre as grandezas envolvidas.

Diferentes pesquisas (Dullius, Araújo & Veit, 2011; Javaroni & Soares, 2012; Filho, Laudares & Miranda, 2014; Dullius, Veit & Araújo, 2013; Laudares & Miranda, 2007) têm sugerido que as EDO devem ser abordadas de modo contextualizado. Ressaltando, assim, que constituem um objeto privilegiado para o estudo de fenômenos físicos, usando a derivada com a noção de taxa de variação. Estes trabalhos, também, têm apontado que as EDO podem ser estudadas por meio de modelos matemáticos “clássicos” (misturas entre recipientes, sistema massa-mola, desintegração radioativa, crescimento populacional, entre outros). Além da perspectiva de explorar as EDO por meio da Modelagem Matemática ou da Análise de Modelos Matemáticos.

Javaroni (2007, p. 26) ressalta que há diferenças conceituais e procedimentais entre Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos. Nas palavras da pesquisadora, a “modelagem matemática pode ser definida como processo dinâmico utilizado para a elaboração e validação de modelos matemáticos, e tem como um de seus objetivos principais a possibilidade de previsão de tendências acerca do objeto estudado”. Distintamente da Modelagem Matemática, a Análise de Modelos Matemáticos caracteriza-se em partir de modelos que atendam situações ditas ‘reais’, sendo realizada a análise, estudo, aplicação de técnicas algébricas ou numéricas de resolução, até determinar a solução. Para esta pesquisa ressalta-se a ênfase à abordagem Análise de Modelos Matemáticos, pois entende-se que os livros-texto favorecem o trabalho com este tipo de abordagem.

Javaroni (2007) sublinha que a importância dos modelos matemáticos está centrada na possibilidade de expressar, matematicamente, as peculiaridades de determinado fenômeno físico (situação-problema). Conforme Stewart (2013), as EDO podem ser a principal aplicação do Cálculo, pois quando se tenta utilizar as ferramentas do Cálculo, geralmente, se faz para analisar uma EDO que modela determinado fenômeno em estudo.

Entende-se que o estudante que se depara com um Modelo Matemático, que envolve EDO, necessita possuir subsídios para inferir sobre o problema, estes subsídios tampouco referem-se apenas à habilidade de solucionar EDO analiticamente, pois os modelos matemáticos são proporcionalmente complexos em relação ao fenômeno que representam. Quando o modelo matemático é uma EDO nem sempre é possível analisá-lo por meio da solução explícita, pois nem toda função incógnita pode ser obtida por intermédio de uma quantidade finita de passos de integração e manipulação algébrica. (Bassanezi, 2002 apud Javaroni, 2007).

Entretanto, pesquisas realizadas (Dullius et al., 2011; Javaroni & Soares, 2012; Javaroni, 2007; Filho et al., 2014; Dullius et al., 2013; Laudares & Miranda, 2007) verificaram que professores de Ensino Superior trabalham apenas EDO que possuem solução analítica (aspectos algébricos). Em outras palavras, EDO cujas soluções podem ser representadas por funções elementares. Ao estudar apenas os métodos de resolução analítica, desconsidera-se a questão central da resolução de uma EDO, isto é, compreender sua solução, não oferecendo subsídios para o estudante responder a pergunta: “Como as soluções se comportam?”. Ou seja, sem uma abordagem qualitativa, conforme sugerido nas pesquisas.

A abordagem qualitativa possui uma natureza interpretativa, cujo processo consiste em inferir sobre o comportamento das soluções da EDO, por intermédio de interpretações geométricas, por exemplo, com a exploração de campos de direções, embora não seja fundamental resolvê-las (Javaroni, 2007). Campo de direções é um gráfico no qual são representados segmentos de retas. Cada segmento, refere-se a reta tangente a solução naquele ponto, o segmento informa o coeficiente angular da solução que possui o ponto. Este método potencializa a interpretação geométrica das soluções das EDO (caso existam) e o processo de visualização das EDO. Os campos de direções representam o comportamento global das soluções das EDO, sem exigir o tratamento algébrico para explicitar essas soluções. Acredita-se que utilizar campos de direções no processo de aprendizagem possibilita aos licenciandos analisar diferentes tipos de EDO e, conseqüentemente, poder trabalhar distintos modelos matemáticos (Javaroni, 2007).

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para esta pesquisa foram adotados pressupostos da pesquisa qualitativa como procedimentos metodológicos, definidos pela Análise de Conteúdo. Conforme Bardin (1977), a Análise de Conteúdo possui 3 fases, a saber: pré-análise; exploração do material; e, tratamento dos dados, inferência e interpretação. A primeira fase, pré-análise, compreende dois outros momentos, que ocorrem sem ordem cronológica definida, a escolha dos materiais e a elaboração de categorias de análise.

Para a primeira etapa foi realizado um mapeamento nos Projetos Pedagógicos de Cursos de Licenciatura em Matemática na modalidade presencial de Instituições de Ensino Superior brasileiras, afim de identificar livros-texto, mais citados, nas referências bibliográficas básicas dos componentes curriculares que preveem a abordagem do conteúdo EDO.

Para realizar o mapeamento, recorreu-se ao cadastro no e-MEC de instituições e cursos de Ensino Superior, base de dados oficial relativa às instituições reconhecidas pelo Ministério da Educação. Primeiramente, identificou-se o número de cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, utilizando-se os filtros: Cursos de Licenciatura em Matemática, em atividade, em todos os estados brasileiros, na modalidade presencial. Constatou-se que estavam registrados, no e-MEC, 714 cursos de Licenciatura em Matemática, no ano de 2017. A partir dos dados obtidos, pesquisou-se nos sites das instituições e, respectivos,

campus, os Projetos Pedagógicos dos Cursos (PPC). Sendo identificados 179 PPC (25,07% do total de cursos registrados no e-MEC).

No que tange as disciplinas que possuem o conteúdo EDO na ementa dos PPC, 76,53% preveem o ensino deste conteúdo. Importante destacar que este dado inclui disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral que abordam Equações Diferenciais, bem como as disciplinas específicas de Equações Diferenciais.

Selecionados os PPC que preveem o ensino de Equações Diferenciais, foram analisadas as bibliografias das disciplinas que abordam o conteúdo EDO, a fim de averiguar os livros-texto mais citados. Ressalta-se que as edições dos livros-texto, bem como o ano de elaboração dos PPC, também foram registradas.

Identificou-se que os dois mais citados foram “Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Valores de Contorno” cujos autores são William E. Boyce e Richard C. DiPrima e “Equações Diferenciais” cujos autores são Dennis G. Zill e Michael R. Cullen, citados, respectivamente, 123 e 64 vezes.

Em relação às categorias de análise, estas foram elaboradas à luz das concepções teóricas acerca do ensino e aprendizagem de EDO. Assim, definiu-se como categorias: análise de modelos e abordagem qualitativa.

- **Análise de Modelos:** Esta categoria foi elaborada com base nos entendimentos da pesquisadora Javaroni (2007). Nela, buscou-se compreender se os autores organizaram seus livros-texto utilizando a ideia de modelos matemáticos como ponto de partida para o ensino de funções. Além de verificar se são exploradas situações reais (relacionadas, por exemplo, a outras áreas do conhecimento como a Física).

- **Abordagem Qualitativa:** Esta categoria foi construída com base nos entendimentos de Dullius, Araújo e Veit (2011), Dullius, Veit e Araújo (2013), Javaroni e Soares (2012), Javaroni (2007), Filho, Laudares e Miranda, (2014) e Laudares e Miranda (2007), a fim de verificar quais aspectos das EDO são explorados, tais como, o estudo do comportamento das soluções das EDO.

No que tange à fase *exploração do material*, da Análise de Conteúdo, esta se caracteriza como a observação do material que constitui a fonte de produção de dados, neste caso, dois livros-texto que abordam o conteúdo EDO (para referir-se aos livros-texto, será utilizada a sigla LTA - *Livro-Texto A* - para o livro *Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Valores de Contorno*; e LTB - *Livro-Texto B* - para o livro *Equações Diferenciais*). A exploração do material “não apenas pode como deve incluir técnicas sistemáticas de análise” (Franco, 2005, p. 53), assim, a exploração foi realizada tendo em

vista as categorias de análise elencadas. Nesta fase, foram identificados quais conteúdos são trabalhados nos livros-texto, e suas respectivas seções, para definir quais capítulos seriam analisados. Optou-se por analisar a introdução do estudo de EDO e o capítulo referente ao estudo de EDO de 1ª ordem, pois o foco do trabalho foi restringido à forma como os conceitos de EDO são inicialmente apresentados aos estudantes.

Constatou-se que o LTA é composto de 11 capítulos, nos quais são abordados os conteúdos: EDO de 1ª ordem, EDO de 2ª ordem, EDO de ordem superior, solução em série de potência para EDO de 2ª ordem, Transformada de Laplace, Sistema de EDO, métodos numéricos para solucionar EDO, EDO não linear, EDP e séries de Fourier e problemas de valor de contorno e teoria de Sturm Liouville. Para esta pesquisa foram analisados o Capítulo 1 - Introdução e o Capítulo 2 - Equações Diferenciais de Primeira Ordem. No capítulo 1 são abordadas as ideias iniciais para a compreensão do conceito de EDO, bem como sua classificação. No capítulo 2 são trabalhadas, especificamente, EDO de 1ª ordem, e as técnicas para solucioná-la, teoremas da existência e unicidade da solução, modelagem com EDO e Equações de Diferenças de 1ª ordem.

Quanto ao LTB, este é formado por 7 capítulos, os quais abordam conteúdos tais como: EDO de 1ª ordem e suas aplicações, EDO lineares de ordem superior, aplicações de EDO de 2ª ordem, EDO com coeficientes variáveis e Transformada de Laplace. Há a seção denominada Apêndices, em que são apresentados conteúdos adicionais sobre Transformada de Laplace, Função Gama, Números Complexos e revisão sobre determinantes. Foram analisados o Capítulo 1 – Introdução às Equações Diferenciais, o Capítulo 2 – Equações Diferenciais de Primeira Ordem e o Capítulo 3 – Aplicações de Equações Diferenciais de Primeira Ordem. No capítulo 1 são apresentadas definições e terminologia referentes ao conteúdo Equações Diferenciais além de atividades propostas. No capítulo 2 os conteúdos expostos referem-se a métodos analíticos de resolução das equações e atividades propostas. No capítulo 3 são abordados os modelos matemáticos que envolvem EDO, atividades propostas e, no final é apresentado um Ensaio sobre Dinâmica Populacional.

Ao explorar os livros-texto identificou-se quais elementos dos capítulos selecionados seriam analisados considerando as categorias de análise. Em cada capítulo foram verificados os encaminhamentos para o ensino de EDO, que correspondem à forma como o conteúdo é apresentado, ensinado e a argumentação utilizada pelos autores, bem como exemplos utilizados e atividades propostas. Neste trabalho, levaram-se em consideração dois termos distintos, *exemplo* e *atividade proposta*. O termo *exemplo* refere-se à atividade

solucionada apresentada para discutir algum tópico e o termo *atividade proposta*, refere-se à atividade apresentada para que o estudante a solucione, afim de que sejam mobilizados os conceitos ensinados no capítulo no qual as atividades pertencem.

Na terceira fase da Análise de Conteúdo, denominada *tratamento dos dados, inferência e interpretação*, são realizadas interpretações, sobre os dados obtidos na fase anterior, considerando as categorias de análise e objetivos elencados (Bardin, 1977). A seguir são tratados os dados com a intenção de apresentar as inferências e interpretações produzidas ao ler as mensagens expostas nos livros-texto analisados. Optou-se por expor os resultados por categoria de análise. Para isso, a próxima seção foi organizada em duas subseções denominadas *Análise de Modelos e Abordagem Qualitativa*.

4 ANÁLISE DOS DADOS

4.1 Análise de Modelos

No Capítulo 1 (Introdução) do LTA, há 5 exemplos, dos quais destaca-se “Um Objeto em Queda” e “Controle Populacional” (crescimento de ratos na presença de corujas). Os modelos são construídos de forma a ressaltar os conceitos envolvidos, sejam eles da Matemática ou de outras áreas do conhecimento. Ao longo do capítulo são utilizados os exemplos para apresentar o conceito e formalizar a resolução de EDO da forma $\frac{dy}{dx} = ay - b$. Sublinha-se que, para estudar a classificação das ED – linear ou não linear, parcial ou ordinária; ordem e sistema de EDO, os exemplos não se referem a modelos matemáticos, exceto como exemplo de ED não linear, sendo citado o problema do pêndulo.

Ainda, no Capítulo 1 são propostas, no total, 128 atividades, das quais 49 se referem a modelos matemáticos, ou seja, 40% do total de atividades. Os modelos matemáticos envolvem conceitos de Química (desintegração de elementos químicos), Física (queda de objetos, Lei do Resfriamento de Newton, circuito elétrico, pêndulo e princípio da conservação de energia), Ecologia (presa-predador, elementos químicos em lagoas) e Biologia (absorção de remédios no corpo).

No Capítulo 2 (Equações Diferenciais de Primeira Ordem) do LTA é apresentada uma seção específica de Modelagem e Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem. É ressaltada a importância dos modelos matemáticos que envolvem EDO de primeira ordem, afirmando que permitem a investigação de fenômenos de diversas áreas

do conhecimento, tais como: ciências físicas, biológicas e sociais. Na sequência, são expostos exemplos cujas situações são representadas por modelos que envolvem EDO de Primeira Ordem, por exemplo: mistura de componentes a taxa constante, juros compostos e velocidade.

Nesse capítulo são apresentados, ao todo, 26 exemplos, dos quais sublinha-se o exemplo em que é discutida uma situação sobre juros compostos. Situação esta que apresenta conteúdos, geralmente, abordados no Ensino Médio (Função Exponencial, Matemática Financeira). Os autores apresentam uma EDO para modelar o problema, bem como sua solução, relacionando a equação com a função de juros compostos. Ademais, modelos matemáticos de outras situações são abordados, a saber: o modelo de Malthus que descreve a dinâmica populacional, epidemias e administração de recursos renováveis, discutidos em Biologia. Também são explorados temas de Química, tais como: meia vida, decomposição e reação entre elementos químicos. Além disso, os modelos matemáticos, também, são enfatizados ao abordar o conteúdo Equações Autônomas, especialmente, os modelos de dinâmica populacional.

No que concerne às atividades propostas no Capítulo 2, verifica-se que 30% utilizam modelos matemáticos para estudo de EDO. Em outros termos, 134 atividades de um total de 441 atividades destacam os modelos matemáticos. As demais atividades (307) propõem exercícios para solucionar EDO sem inseri-las em algum contexto.

Dentre as atividades que abordam modelos matemáticos, no Capítulo 2 do LTA, há atividades que abordam conhecimentos de Física, por exemplo, Princípio de Torricelli e movimento de corpos (Lançamento Vertical (Figura 1) e Queda Livre).

Uma bola com massa de 0,15 kg é jogada para cima, com velocidade inicial de 20 m/s, do teto de um prédio com 30 m de altura. Não leve em consideração a resistência do ar.

(a) Encontre a altura máxima acima do solo alcançada pela bola.

(b) Supondo que a bola não atinge o prédio quando desce, encontre o instante em que ela bate no chão.

(c) Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo.

Figura 1: Exemplo de atividade proposta que envolve conceitos de Física
Fonte: Boyce e Dprima (2015, p. 54)

A atividade proposta na Figura 1 utiliza um modelo referente a uma situação da Física (lançamento vertical para cima) que é, geralmente, trabalhado no Ensino Médio. Ao solucionar a EDO que descreve o fenômeno, o futuro professor precisa identificar que o comportamento da bola, lançada para cima, é parabólico, ou seja, a solução da EDO é uma função quadrática. Corrobora-se com Onuchic e Allevato (2011, p. 90) ao afirmarem que,

“Descobrir que tipos de relações do mundo real são representados por gráficos parabólicos é mesmo mais interessante e científico, até infinitamente mais valioso do que a habilidade em plotar a curva quando alguém lhe dá a equação”. As relações entre EDO e funções serão percebidas pelo futuro professor se este conectar o comportamento das situações representadas por EDO à função que as descreve. Além disso, é essencial compreender os conceitos e estruturas matemáticas presentes nas funções que modelam os fenômenos, por exemplo, padrões, proporcionalidade, conjuntos numéricos.

Foram identificadas no LTA, tanto exemplos como atividades propostas, situações que utilizam modelos matemáticos envolvendo conceitos de Matemática Financeira, como investimentos, empréstimos e financiamentos. Destaca-se que estes modelos são de situações de capitalização contínua, ou seja, envolvem equações do tipo $\frac{dS}{dt} = rS$, em que r refere-se à taxa de juros e S ao montante no instante de tempo t . A solução, para os problemas deste tipo, é a função exponencial $S = S_0 e^{rt}$ que, na Educação Básica, geralmente, é denominada de “fórmula” para o cálculo de juros compostos, com S_0 representando o investimento inicial.

Em síntese, os modelos matemáticos descrevem situações-problema sobre objetos em queda livre, meia vida de elementos químicos, crescimento/decrescimento populacional, drenagem de líquidos através de um orifício, problemas de Matemática Financeira, problemas envolvendo a variação de temperatura, epidemias, entre outros. No que tange aos tipos de funções exploradas destaca-se que os autores do LTA selecionaram atividades que enfatizam a função exponencial. Além de alguns modelos que envolvem funções trigonométricas e quadráticas. Em contrapartida, não é dada ênfase a função logarítmica. Não realizar a conexão entre função logarítmica e as situações que podem ser modeladas por ela pode limitar o conhecimento do futuro professor, no que tange as contextualizações que podem ser feitas entre esta função e fenômenos reais por ela representados.

Ao analisar o LTB é possível verificar que no primeiro capítulo há, ao todo, 21 exemplos, dos quais, destacam-se os da segunda seção, em que são apresentados alguns modelos matemáticos que envolvem Equações Diferenciais de 1ª ordem e Equações Diferenciais de 2ª ordem. Estes modelos referem-se a fenômenos que exigem conhecimentos abordados no Ensino Médio, principalmente, de Física. Por exemplo, ao estudar o modelo sobre corpos em queda livre é abordada a segunda lei de Newton, que explica a força que um corpo exerce considerando a aceleração e a massa do objeto, ou

ao estudar o movimento de um pêndulo simples, que envolve os conceitos da segunda lei de Newton e de aceleração angular.

Além dessas, há outras situações reais, que para serem modeladas, exigem o conhecimento de conceitos de Física, a saber: modelo sobre o sistema massa-mola, que envolve conceitos de proporcionalidade; Lei de Hooke e Força F exercida sobre objetos, cujos conceitos são descritos conforme a segunda Lei de Newton; circuitos simples em série, que envolvem conceitos da segunda Lei de Kirchhoff; modelo sobre drenagem de água através de um orifício, que utiliza ideias sobre hidrodinâmica e o Teorema de Torricelli. Dessa forma, verifica-se que os autores do LTB apresentam situações que envolvem EDO e conceitos que podem ser explorados pelo futuro professor de Matemática na Educação Básica.

Ainda, no Capítulo 1 são apresentadas 101 atividades propostas, destas 28 abordam modelos matemáticos, ou seja, 27,72% das atividades, as demais (73) propõem exercícios centrados na equação, sem considerar algum contexto. Em relação às atividades propostas que utilizam modelos matemáticos, as situações-problema propostas não precisam ser solucionadas, assim a função solução não é explorada. Entretanto, distintos fenômenos reais são apresentados, a saber: corpos em queda livre, circuitos em série, escoamento de líquidos, trajetória de projéteis, variação de compostos químicos no organismo, dentre outros. Destaca-se que grande parte destes fenômenos são retomados no Capítulo 3, afim de explorar sua solução.

No Capítulo 2, do LTB, são apresentados os métodos analíticos de resolução de EDO de 1º ordem. Optando por trabalhar o desenvolvimento teórico dos métodos, os exemplos elencados pelos autores não apresentam modelos matemáticos. Dessa forma, em nenhum dos 39 exemplos e das 341 atividades propostas são utilizados fenômenos reais como ponto de partida para sistematizar a resolução das EDO.

Em relação aos 16 exemplos presentes no Capítulo 3 do LTB, destacam-se situações que apresentam aplicações das equações na própria Matemática, por exemplo, trajetórias ortogonais, que se refere a uma curva que intercepta uma dada família de funções em ângulo reto. Esta discussão é interessante, pois aborda os conceitos matemáticos de Geometria Plana/Espacial (posição relativa entre retas) e Geometria Analítica, cujo estudo é recomendado por propostas curriculares nacionais (Brasil, 2002) e que estão relacionadas aos conceitos de Cálculo, no estudo da reta tangente.

Além de aplicações na própria Matemática, no Capítulo 3 são retomados os modelos matemáticos mostrados no Capítulo 1. Destes, destaca-se a possibilidade de os

professores das distintas áreas explorarem os diferentes aspectos de um mesmo conteúdo. Por exemplo, o professor de Química pode explorar as características dos elementos e compostos químicos e o professor de Matemática pode trabalhar com a elaboração de modelos relativos as reações químicas que podem ocorrer entre as substâncias. A Figura 2 refere-se a um modelo matemático em que é descrita uma reação química entre dois compostos, originando um terceiro composto.

Um composto C é formado quando dois compostos químicos A e B são combinados. A reação resultante entre os dois compostos é tal que, para cada grama de A , 4 gramas de B são usados. É observado que 30 gramas do composto C são formados em 10 minutos. Determine a quantidade de C em qualquer instante se a taxa da reação é proporcional às quantidades de A e B remanescentes e se inicialmente havia 50 gramas de A e 32 gramas de B . Qual a quantidade do composto C que estará presente após 15 minutos? Interprete a solução quando $t \rightarrow \infty$.

Figura 2: Exemplo que envolve conceitos de Química
 Fonte: Zill e Cullen (2001, p. 124)

O modelo descrito na Figura 2 envolve uma EDO não linear que possui como solução, a função exponencial $X(t) = 1000 \frac{1 - e^{-0,1258t}}{25 - 4e^{-0,1258t}}$. Desta forma, trabalhar com este modelo pode contribuir para que o futuro professor conheça um número maior de situações modeladas por funções exponenciais e, assim, possa explorá-las na sua prática profissional.

Na Figura 3 é mostrado um modelo matemático, exemplo presente do Capítulo 3, sobre a Lei do Resfriamento de Newton, cuja solução é exponencial. De modo que, é possível perceber a importância do estudo de EDO para resolução de problemas relacionados a, por exemplo, variação de temperatura. Em relação ao exemplo da Figura 3, é possível trabalhar a função $T(t) = 70 + 230e^{-0,19018t}$, pois esta é a solução da EDO que descreve o modelo.

Quando um bolo é retirado do forno, sua temperatura é de 300°F. Três minutos depois, sua temperatura passa para 200°F. Quanto tempo levará para sua temperatura chegar a 70 graus, se a temperatura do meio ambiente em que ele foi colocado for de exatamente 70°F?

Figura 03: Exemplo apresentado e discutido pelo LTB, envolvendo a Lei do Resfriamento de Newton
 Fonte: Zill e Cullen (2001, p. 107)

Na Figura 4 é apresentado um modelo sobre eletromagnetismo. A função solução pode ser explorada pelo futuro professor, no Ensino Médio, pois envolve uma função exponencial $i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$. Selecionar este tipo de situação é importante para que os

estudantes consigam conectar os conceitos matemáticos aos conceitos de outras áreas do conhecimento. Além disso, pode-se mostrar, de forma generalizada, a relação entre os conceitos de Voltagem (E), Resistência (R), Corrente (i) e Indutância (L) por meio da função $i(t) = \frac{E_0}{R} - ce^{-(R/L)t}$, de modo que a solução obtida é denominada de solução geral (ou família de soluções), pois não há dados a serem substituídos e que permitiriam obter uma solução particular.

Uma bateria de 12 volts é conectada a um circuito em série no qual a indutância é de 1/2 henry e a resistência, 10 ohms. Determine a corrente i se a corrente inicial é zero.

Figura 04: Exemplo apresentado e discutido pelo LTB, modelo sobre eletromagnetismo
Fonte: Zill e Cullen (2001, p. 109)

Em relação às atividades propostas no Capítulo 3, 65,28% (79 atividades de um total de 121) abordam modelos matemáticos. As principais situações reais exploradas referem-se àquelas já abordadas no decorrer das explicações dos conteúdos. A função mais abordada é a exponencial seguida da quadrática. As atividades que não foram categorizadas como modelos, 34,71%, propõem, em geral, que o acadêmico determine as trajetórias ortogonais para uma dada família de funções.

De todas as atividades propostas, nos três capítulos analisados, 19,01% (107 atividades de 563) são atividades que envolvem modelos matemáticos. Estas situações são oriundas de áreas do conhecimento como a Química, com modelos sobre reações químicas e meia vida de elementos químicos; a Física, com modelos sobre objetos em queda livre, circuitos em série, drenagem de líquidos; a Biologia, no que concerne à problemas sobre eliminação de medicamentos do corpo humano, crescimento/decrescimento de populações; a Economia, como a capitalização contínua; e, a Psicologia, ao explorar situações sobre memorização e esquecimento.

As funções exploradas nos exemplos e atividades propostas, nos três capítulos analisados, são geralmente exponenciais. Em algumas situações, há a abordagem de situações que são expressas por funções quadráticas. No que tange a função logarítmica, assim como os autores do LTA, os autores do LTB não a enfatizam como uma função que também modela situações reais.

4.2 Abordagem Qualitativa

No que concerne a categoria Abordagem Qualitativa de EDO no LTA, verifica-se que está presente logo nas primeiras páginas, nos dois primeiros exemplos apresentados, os mesmos modelos citados na discussão sobre a categoria Análise de Modelos. A Abordagem Qualitativa revela-se, conforme Javaroni (2007), quando o objetivo é investigar o comportamento das soluções da EDO. Dessa forma, o cerne da atividade matemática não se constitui em resolver a EDO por meio de algum método analítico. Como mencionado, o LTA propõe a discussão do que a EDO representa acerca dos modelos. Dentre os 5 exemplos presentes no Capítulo 1, destaca-se o exemplo em que, para análise do modelo, é inserido um campo de direções (Figura 5). Por meio do campo de direções, os autores destacam características e comportamentos dos modelos como as soluções de equilíbrio.

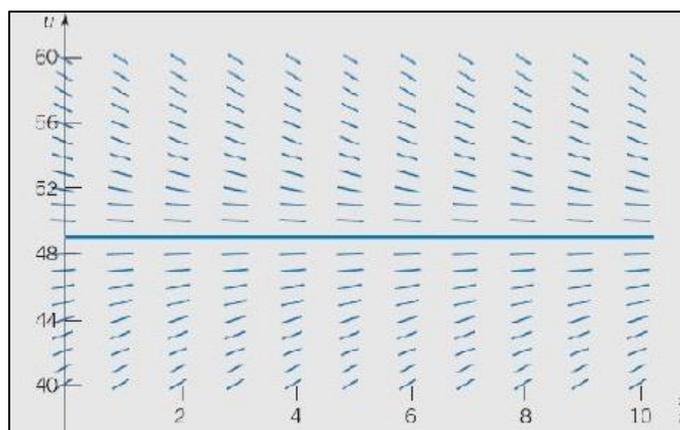


Figura 5: Campo de Direções sobre o modelo “objeto em queda”
Fonte: Boyce e Diprima (2015, p. 4)

Por meio do campo de direções (Figura 5) é possível obter a solução de equilíbrio do modelo ($v = 49m/s$). Ainda, percebe-se que todas as soluções tendem para $v = 49m/s$, à medida que o tempo passa, pois valores menores que $v = 49m/s$ tendem a aumentar até essa velocidade, enquanto valores maiores que $v = 49m/s$ tendem a diminuir até atingirem a solução de equilíbrio, portanto, pode-se inferir que as soluções convergem.

Ainda no Capítulo 1, na explanação dos conteúdos, os autores realizam a sistematização das soluções, da forma $\frac{dp}{dt} = rp - k$, dos modelos apresentados como exemplos. Enfatizam o comportamento das soluções e destacam a influência que cada parâmetro que compõe a EDO tem no comportamento de sua solução, considerando que

a equação possui solução que pode ser expressa por funções elementares. Verifica-se isto no Quadro 1, que apresenta um excerto do LTA, em que p_0 refere-se a população inicial de ratos, k a taxa predatória e r a taxa de crescimento da população.

Quadro 1: Excerto sobre o comportamento de soluções conforme parâmetros envolvidos

Se $p_0 = \frac{k}{r}$, então segue da Eq(19), que $p = \frac{k}{r}$ para todo t ; essa é a solução constante, ou de equilíbrio. Se $p_0 \neq \frac{k}{r}$, então o comportamento da solução depende do sinal do coeficiente $p_0 - \left(\frac{k}{r}\right)$ no termo exponencial na Eq 19. Se $p_0 > \frac{k}{r}$, então p cresce exponencialmente com o tempo t ; se $p_0 < \frac{k}{r}$, então p decresce e acaba se tornando nulo, o que ocorre a extinção dos ratos. Valores negativos de p , embora sendo possíveis na expressão (19), não fazem sentido no contexto desse problema particular.

Fonte: Boyce e Diprima (2015, p. 11)

A Abordagem Qualitativa é verificada em atividades do capítulo introdutório, pois é proposto ao futuro professor resolver problemas que consistem em perguntas com caráter investigativo, como o exemplo exposto no Quadro 2. Na categoria Análise de Modelos foi salientada a importância de o professor conhecer o maior número possível de situações reais para ensinar funções, além disso, é fundamental que o futuro professor consiga abordar as situações propostas aos estudantes sob a ótica qualitativa, pois assim pode-se explorar as propriedades e características do fenômeno estudado ressaltando um dos aspectos da Matemática, Ciência, que possui ferramentas para modelar fenômenos reais.

Quadro 2: Excerto sobre a abordagem de campos de direções em atividades propostas

"[...] desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \rightarrow \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em $t=0$, descreva essa dependência. [...]"

Fonte: Boyce e Diprima (2015, p. 7)

No Quadro 2, percebe-se que os autores do LTA entendem que é importante analisar o comportamento das soluções de EDO, sem resolvê-la. Para tanto, propõe-se a análise através do campo de direções. Ressalta-se que muitas das EDO, em especial, as que modelam fenômenos reais, não possuem solução que pode ser obtida por meio de uma sequência finita de passos de tratamento algébrico e integração e, conseqüentemente, expressa por funções elementares. Para resolver este problema, Javaroni (2007, p. 187) afirma que é possível "investigar o comportamento das soluções sem de fato encontrar as soluções analiticamente" por meio de um campo de direções.

O Capítulo 2 do LTA é dedicado ao estudo de métodos analíticos para resolução de EDO de primeira ordem. Apresenta uma seção específica com exemplos que se referem a modelos de diversas áreas do conhecimento. Estes exemplos são explorados, sob a ótica da abordagem qualitativa, pois é realizada uma discussão acerca da influência dos parâmetros no comportamento da solução. Pode-se afirmar que a abordagem qualitativa é explorada tanto nos exemplos que se referem à modelos matemáticos quanto em exemplos que envolvem apenas o contexto da própria Matemática.

Em relação ao LTB, no capítulo introdutório, é possível evidenciar, nos exemplos da seção que trabalha modelos matemáticos, indícios da Abordagem Qualitativa, pois o movimento de representar a situação real por meio de Equações Diferenciais é uma tarefa investigativa. É apresentada uma discussão referente à resolução dos problemas com o objetivo de obter uma equação que resolva o problema, sem que ocorra a aplicação de métodos analíticos.

No que concerne às atividades do Capítulo 1, pode-se afirmar que possuem caráter investigativo, pois propõem ao estudante que represente uma situação por meio de EDO. Na Figura 6, é apresentado um exemplo de atividade do capítulo, evidenciando a solicitação para expressar a atividade por meio de uma EDO, sem a necessidade de solucioná-la. A equação que modela este fenômeno é $\frac{dx}{dt} = r - kx$, em que r significa a taxa constante de entrada de droga na corrente sanguínea, enquanto que k corresponde a taxa constante de saída da droga, proporcional à $x(t)$, quantidade de remédio no instante t .

Uma droga é injetada na corrente sanguínea de um paciente a uma taxa constante de r gramas por segundo. Simultaneamente, a droga é removida a uma taxa proporcional à quantidade $x(t)$ de droga presente no instante t . Determine a equação diferencial que governa a quantidade $x(t)$.

Figura 6: Exemplo de atividade proposta em que é necessário representá-la por meio de uma equação
Fonte: Zill e Cullen (2001, p. 32)

No que se refere à Abordagem Qualitativa, nas atividades propostas no Capítulo 2, pode-se inferir que não é realizada, pois foram selecionadas atividades que visam aplicação de métodos analíticos para resolver EDO, sem haver discussão quanto ao comportamento que a função solução possui ou a influência dos parâmetros que compõem a função.

Na explanação dos conteúdos no Capítulo 3, é aprofundada a análise de modelos que envolvem EDO, destacando e justificando o comportamento de suas soluções. Ou seja, é possível perceber indícios da Abordagem Qualitativa para o trabalho com os modelos

matemáticos. No Quadro 3, é apresentado um excerto sobre a análise da função exponencial $N(t) = N_0 e^{kt}$.

Quadro 3: Excerto sobre a abordagem qualitativa realizada em um exemplo do LTB

[...] A função exponencial e^{kt} cresce com o tempo quando $k > 0$, e decresce quando $k < 0$. Logo, problemas que descrevem crescimentos, como a população, bactéria ou mesmo capital, são caracterizados por um valor positivo de k ; por outro lado, problemas envolvendo decrescimento, como desintegração radioativa, conduzem a um valor negativo de k .

Fonte: Zill e Cullen (2001, p. 104)

Neste excerto (Quadro 3) são discutidas situações as quais esta função modela. A função $N(t)$ é solução da equação $\frac{dN}{dt} = kN$, em que k refere-se à taxa de crescimento do fenômeno e N a população em qualquer instante t . Realizar a análise sobre as soluções é importante, pois, por meio desta, são destacadas características sobre o problema modelado. No que tange ao acadêmico e futuro professor, potencializa suas justificativas e argumentações matemáticas ao trabalhar, em sala de aula, fenômenos reais.

Quanto as atividades propostas do Capítulo 3, infere-se que estas são abordadas sob a ótica qualitativa. As atividades exploram alguns aspectos da solução da equação. Em comparação ao LTA, no LTB a abordagem qualitativa é evidenciada principalmente em atividades que envolvem modelos matemáticos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base na análise apresentada, pode-se afirmar que as propostas para o ensino de EDO, presentes no LTA, contribuem no que tange as possibilidades de contextualização, abordagem e representação de situações que envolvem funções. A contextualização é enriquecida, pois o estudo de EDO é realizado por meio de distintos modelos matemáticos. Estes modelos envolvem diversos conteúdos/conceitos que são trabalhados na Educação Básica, como Matemática Financeira, crescimento/decrescimento de populações, variação de temperatura, meia-vida de elementos químicos, reações químicas, misturas. Destaca-se que estes modelos exploram o conceito de exponencial. Ou seja, o estudo de EDO através do LTA amplia as possibilidades de contextos para o ensino de função exponencial. No que tange aos outros tipos de funções, como quadrática e trigonométrica, o LTA aborda algumas situações como objetos em queda livre e misturas. Entretanto, contextos para função logarítmica não são enfatizados. As propostas deste livro-texto ampliam os

argumentos para que o futuro professor consiga abordar qualitativamente as funções, visto que em diversos momentos há a preocupação em discutir o comportamento da solução (função) de uma EDO.

O estudo de EDO por meio do LTB contribui para que o futuro professor consiga elencar vários contextos ao ensinar função, principalmente função exponencial, característica semelhante ao LTA. Além disso, verificou-se que os modelos apresentados nas atividades propostas não são expressos por funções logarítmicas. Assim, ambos livros-texto não abordam situações-problema que podem ser utilizadas ao ensinar função logarítmica. No que tange à abordagem qualitativa, percebeu-se que o LTB explora o comportamento das soluções das EDO. No entanto, para estudar EDO não foram utilizados campos de direções, recurso que poderia potencializar a aprendizagem.

É importante destacar que os Modelos Matemáticos e a Abordagem Qualitativa fazem parte das escolhas teórico-metodológicas dos autores, mesmo que em menor número que as situações cujo contexto seja a própria Matemática e àquelas que exigem apenas o tratamento algébrico. Assim, para que o estudo de EDO proposto nos livros-texto contribua para o futuro professor estabelecer relações entre os conteúdos estudados no Ensino Superior e os conteúdos que trabalhará na Educação Básica, em particular funções, é importante que o professor formador escolha exemplos e atividades que proporcionem a análise de modelos matemáticos cujos contextos são outras áreas do conhecimento e que valorizem a abordagem qualitativa.

REFERÊNCIAS

- Bardin, L. (1970). *Análise de Conteúdo*. Edições 70.
- Boyce, W. E. & DiPrima, R. C. (2015). *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Rio de Janeiro: LTC.
- Brasil. MEC. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias)* (2002). Brasília: MEC/SEMTEC, 144p.
- Dullius, M. M., Araújo, I. S. & Veit, E. A. (2011) Ensino e Aprendizagem de Equações Diferenciais com Abordagem Gráfica, Numérica e Analítica: uma experiência em cursos de Engenharia. *Bolema*, v.24, n.38, 17-42.
- Dullius, M. M., Veit, E. A. & Araújo, I. S. (2013). Dificuldade dos Alunos na Aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v.26, n.2, 207-228.

- Filho, A. A. B., Laudares, J. B. & Miranda, D. F. (2014). A resolução de problemas em ciências com equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem usando análise gráfica. *Educação Matemática Pesquisa*, v.16, n.2, 323-348.
- Fiorentini, D. A. (2005). Formação Matemática e Didático-Pedagógica nas Disciplinas da Licenciatura em Matemática. *Revista em Educação*, n.18, 107-115.
- Franco, M. L. P. B. (2005). *Análise de Conteúdo*. Brasília: Líber Livro Editora.
- Javaroni, S. L. (2007). *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias* (tese de doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro.
- Javaroni, S. L. & Soares, D. S. (2012). Modelagem matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. *Acta Scientiae*, v.14, n.2, 260-275.
- Lajolo, M. (2008). Livro Didático: um (quase) manual de usuário. *Em Aberto*, v 16, n 69, 3-9.
- Laudares, J. B. & Miranda, D. F. (2007). Investigando a iniciação à modelagem matemática nas ciências com equações diferenciais. *Educação Matemática Pesquisa*, v.9, n.1, 103-120.
- Machado, N. J. (1988). *Matemática por assunto: noções de Cálculo*. São Paulo: Scipione.
- Onuchic, L. R. & Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas, caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, v. 25, n. 41, 73-98.
- Sociedade Brasileira de Educação Matemática. (2003). *Documento Base da Sociedade Brasileira de Educação Matemática: Subsídios para a Discussão de Propostas para os Cursos de Licenciatura em Matemática*. Seminário Nacional De Licenciaturas Em Matemática. Salvador.
- Sociedade Brasileira de Educação Matemática. (2013). *Boletim SBEM*. n. 21. Disponível em <http://www.sbembrasil.org.br/files/Boletim21.pdf>
- Stewart, J. (2013). *Cálculo, volume 2*. São Paulo: Cengage Learning.
- Zill, D. G. & Cullen, M. R. (2001). *Equações Diferenciais, volume 1*. São Paulo: Pearson Makron Books.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA

Equações Diferenciais Ordinárias: Uma Análise de Livros-Texto indicados por Cursos de Licenciatura em Matemática Brasileiros.

Alessandra Lucero Silva

Mestre

Universidade Federal do Pampa, Itaqui-RS, Brasil
alelucero182@gmail.com <https://orcid.org/0000-0002-0614-7842>**Maria Arlita da Silveira Soares**

Doutora

Professora Adjunta, Universidade Federal do Pampa, Caçapava do Sul-RS, Brasil
mariasoares@unipampa.edu.br <https://orcid.org/0000-0001-5159-8653>**Leugim Corteze Romio**

Doutor

Professor Adjunto, Universidade Federal do Pampa, Itaqui-RS, Brasil
leugimromio@unipampa.edu.br <https://orcid.org/0000-0001-5164-3792>**Endereço de correspondência do principal autor**

Av 21 de Abril, 66, Ed Vidor, apart 301, 98700-000, Ijuí, RS, Brasil

AGRADECIMENTOS

Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA**Concepção e elaboração do manuscrito:** A. L. Silva, M. A. S. Soares, L. C. Romio**Coleta de dados:** A. L. Silva, M. A. S. Soares, L. C. Romio**Análise de dados:** A. L. Silva, M. A. S. Soares**Discussão dos resultados:** A. L. Silva, M. A. S. Soares, L. C. Romio**Revisão e aprovação:** A. L. Silva, M. A. S. Soares, L. C. RomioCaso necessário veja outros papéis em: <https://casrai.org/credit/>**CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA**

O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO

Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM

Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES

Não se aplica.

LICENÇA DE USO – uso exclusivo da revista

Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution](#) (CC BY) 4.0 International. Esta licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista

Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista

Mérciles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista

Recebido em: 24-07-2020 – Aprovado em: 10-02-2021

