

# PENSAMENTO ALGÉBRICO NA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU

## Algebraic Thinking in Learning 1<sup>st</sup> Degree Equations

Constantino **HILÁRIO**

Pesquisador independente

[julinhohilario04@gmail.com](mailto:julinhohilario04@gmail.com)<http://orcid.org/0000-0003-4960-3518> Elias Manensa **SABE**

Universidade Rovuma –Montepuez, MTZ, Moçambique

[sabehelio@gmail.com](mailto:sabehelio@gmail.com)<http://orcid.org/0000-0003-2649-0135> Idio Vilar **ALBANO**

IPR-EFPEA , Zambezia, Milange, MLG, Moçambique

[idio.vilar.albano@gmail.com](mailto:idio.vilar.albano@gmail.com)<https://orcid.org/0000-0002-9866-474X> Marinez Meneghello **PASSOS**

Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Brasil

[marinezpassos@uel.br](mailto:marinezpassos@uel.br)<http://orcid.org/0000-0001-8856-5521>

### RESUMO

Nesta pesquisa, adotamos uma abordagem qualitativa e a mesma classifica-se em descritiva. O objetivo do estudo foi caracterizar o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico de alunos de uma turma da 8ª classe, na resolução de situações-problema relativas a Equações do 1º grau. Participaram na pesquisa 28 alunos de uma Escola Secundária da Autarquia de Montepuez, da província de Cabo Delgado, em Moçambique. Os dados foram recolhidos por meio de um questionário, cujas informações foram organizadas e analisadas segundo os procedimentos da Análise de Conteúdo proposta por Bardin (1977). Os resultados revelaram o domínio de atividades algébricas referentes aos níveis de desenvolvimento do Pensamento Algébrico Incipiente e o Pensamento Algébrico Intermediário, em que 24 alunos mobilizaram o nível incipiente e 4 alunos o nível intermediário. Estes resultados mostram que os alunos estão num processo de transição do Pensamento aritmético para o Algébrico e as habilidades desenvolvidas por eles revelam que estão na fase de se familiarizarem com problemas algébricos e suas operações. Assim, concluímos que as habilidades destes alunos em função do seu nível de instrução distanciam-se dos objetivos traçados no Programa de Matemática da 8ª classe do Sistema Nacional de Educação de Moçambique.

**Palavras-chave:** Pensamento Algébrico, Aprendizagem, Equações do 1º grau

### ABSTRACT

In this survey, we adopted a qualitative approach and the same was ranked in descriptive. The aim of this survey understood the level of development of the Algebraic Thinking of students of an 8<sup>th</sup> grade class, in solving situations-problem related to 1<sup>st</sup> degree equations. Participated in the survey 28 students of a Secondary School in the municipality of Montepuez, Cabo Delgado province, in Mozambique. The dates were collected through a questionnaire the information of which was organized and analyzed according to the procedures of the content analysis proposed by Bardin (1977). The results revealed the domain of activities related to the levels of development of Incipient Algebraic Thinking and Intermediate Algebraic Thinking, where 24 students mobilized the incipient level and 4 students mobilized the intermediate level. These results showed that students are in a process of transition from arithmetic Thinking to Algebraic Thinking and the skills developed by them reveal that they are in the phase becoming familiar with algebraic

problems and their operations. Thus we conclude that the skills of these students according to their level of education are distant from the objectives outlined in the 8<sup>th</sup> grade mathematics program in Mozambique.

**Keywords:** Algebraic Thinking, Learning, 1<sup>st</sup> degree equations

## 1 INTRODUÇÃO

Este artigo traz resultados de uma investigação que procurou caracterizar o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico de alunos da 8<sup>a</sup> classe ao realizarem atividades do tipo situação-problema referentes ao conteúdo de Equações do 1<sup>o</sup> grau, em uma escola Secundária, na Autarquia de Montepuez, da província de Cabo Delgado, em Moçambique.

Assumimos por Álgebra, para esse desenvolvimento, como sendo a substituição de números por letras alfabéticas, ou seja, operação de quantidades conhecidas com quantidades desconhecidas, em que as quantidades desconhecidas tomam como símbolo as letras alfabéticas.

Tal objeto de estudo da Matemática, pelo que observamos em nossas consultas na literatura relativa ao ensino da Matemática, vem sendo associado a várias pesquisas desenvolvidas ao longo de décadas e em diversos países. Como nos indica Canavarro (2007, p. 86), “nos últimos anos, muitos investigadores têm dedicado atenção a discutir este conceito, em especial no contexto do ensino da Matemática nos níveis elementares”. E, ainda, como pudemos verificar em Santos (2007), Beicher (2009), Silva (2012), Almeida (2016), Pimenta (2016) e Soares (2018), ao destacarem a atenção ao processo de ensino e de aprendizagem da Álgebra nas escolas, em particular ao Pensamento Algébrico desenvolvido por alunos e procurarem verificar como a Álgebra se manifesta e é percebida nesses processos por professores e alunos. O nosso estudo pautou-se, especificamente, na aprendizagem dos alunos.

Cabe lembrar que, apesar de existir um volume maior de pesquisas desenvolvidas em relação ao Pensamento Algébrico, à nível internacional, que se limitam a investigar a manifestação, as características e o desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos, porém, ainda prevalece uma lacuna em conectar os níveis do Pensamento Algébrico com as estratégias adotadas pelos alunos na realização de atividades, no contexto da aprendizagem da Matemática.

Associado a este cenário e ao fato de se verificar ausência de estudos desenvolvidos à nível nacional que integram o Pensamento Algébrico e a aprendizagem

de alunos na resolução de situações-problema que envolvem Equações do 1º grau, buscamos responder à seguinte questão: Qual é o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos da 8ª classe, durante a resolução de situações-problema relativas às Equações do 1º grau?

Tendo esta questão como norteadora, nosso objetivo geral tornou-se o de caracterizar o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico de alunos da 8ª classe ao realizarem atividades do tipo situação-problema referentes ao conteúdo de Equações do 1º grau. Para o alcance desse objetivo, definimos os seguintes objetivos específicos: (i) identificar as estratégias adotadas pelos alunos durante a resolução das situações-problema relativas às Equações do 1º grau; (ii) descrever os significados atribuídos aos objetos algébricos pelos alunos durante a resolução das situações-problema em questão; (iii) organizar e interpretar as respostas dos alunos em função dos níveis de desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Quanto à relevância dessa proposta destacamos que ela apresentou e descreveu os níveis de desenvolvimento do Pensamento Algébrico de alunos da 8ª classe de uma Escola Secundária na Autarquia de Montepuez, divulgando as estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução dos tais problemas. Fato que contribuiu no avivamento da literatura moçambicana sobre o fenômeno estudado.

Posta nossa questão, objetivos e motivações, trazemos na continuidade alguns esclarecimentos a respeito do modelo de Pensamento Algébrico utilizado para este desenvolvimento, diversos detalhes sobre os procedimentos metodológicos, a apresentação e a análise dos dados e, por fim, as considerações a que chegamos.

## 2 PENSAMENTO ALGÉBRICO: ALGUNS ESCLARECIMENTOS

Segundo Barbeiro (2012, p. 3) “as origens da Álgebra situam-se na Antiguidade, com a resolução de problemas, de Aritmética e Geometria, inicialmente expressa em linguagem natural”. O que também foi destacado por Barbeiro (2012, p. 3), quando cita Silva e Paulo (1958), que

Terá sido Diofanto (200-284 d.C) a introduzir o método de linguagem sincopada na sua forma primitiva, utilizando uma escrita com base em pequenas abreviações, marcando assim a passagem da Álgebra retórica, caracterizada pelo uso de linguagem corrente no processo de resolução de problemas e por uma ausência de símbolos, para a Álgebra sincopada.

Por outro lado, Ponte, Branco e Matos (2009, p. 5, assinalamentos dos autores) refere que “o termo “Álgebra” só surge alguns séculos mais tarde, num trabalho de Al-Khwarizmi (790-840), para designar a operação de “transposição de termos”, essencial na resolução de uma equação”.

Gamas (2013, p. 66) corrobora que:

Al-Khwarizmi e, além disso, autor de um tratado escrito por volta de 825, intitulado, no original *Hisab Al-jabr Wa Al Muqqabala*, traduzível por ‘Calculo por Restauração e Comparação e de onde deriva a designação ‘Álgebra’. O tratado chegou até nós e evidencia a importância da investigação de Al-Khwarizmi, considerado como o verdadeiro fundador da Álgebra, ainda que se reconheça nele o contributo, não explícito, todavia, de Diofanto. (assinalamentos do autor).

Desse modo, o termo Álgebra surgiu pela primeira vez com o matemático árabe al-Khwarizmi com o propósito de designar as técnicas de resolução de equações por transposição de termos, ainda que se considere Diofanto como precursor da Álgebra.

Outro argumento relativo à Álgebra foi dado por Groenwald e Beicher (2010a, p. 83), no qual referem que:

A Álgebra, actualmente, pode ser caracterizada por ter seu foco no estudo de relações matemáticas abstractas, no uso de fórmulas, na resolução de equações e inequações, incluindo, ainda, o estudo dos conjuntos numéricos e não numéricos, nos quais as operações são definidas de modo abstracto.

Importa salientar que as ideias apresentadas anteriormente, remetem-nos a uma análise na qual se condessa que, os autores encaram o conceito da Álgebra desde os primórdios tradicionais até o que se conhece da Álgebra nos dias de hoje. O que nos leva a considerar que este conceito surgiu dentro de problemas aritméticos e remete-nos a assumir que quando se fala da Álgebra, pode-se pensar em um tratado de equações, apesar de sua grande evolução.

De acordo com Almeida (2016) a partir do final dos anos 80 e início dos anos 90 – do século passado – os pesquisadores em Educação Matemática começam a se preocupar com o ensino e aprendizagem da Álgebra, ou seja, é neste “período em que começam a aparecer as primeiras pesquisas focadas no modo como os alunos desenvolvem a sua compreensão de conceitos e procedimentos algébrico” (Almeida, 2016, p.48). Em que, segundo o autor, a maior parte dos estudos desenvolvidos neste período, concluiu que o Pensamento Algébrico era o centro da aprendizagem dos alunos.

Lins e Gimenez (1997), citado por Souza e Silva (2016, p. 02), afirmam que “o Pensamento Algébrico é um modo de produzir significado para a álgebra”. Para Groenwald e Beicher (2010b, p. 246) “o pensamento algébrico consiste em um conjunto

de habilidades cognitivas que contemplam a representação, a resolução de problemas, as operações e análises matemáticas de situações tendo as ideias e conceitos algébricos como seu referencial”.

De igual modo, Canavarro (2007, p. 88), sublinha que, “no cerne do pensamento algébrico estão os significados, está o uso dos símbolos como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão”. Esses posicionamentos pressupõem que no centro do Pensamento Algébrico está envolvido o conjunto de técnicas que contemplam a modelação, representação, generalização e padronização das expressões algébricas, com finalidade de produzir significados.

Apesar do controverso nas ideias apresentadas anteriormente, constatamos que existe um ponto de convergência no que se refere à essência do Pensamento Algébrico, isto porque os autores, geralmente, destacam o trabalho algébrico (manipulação dos objectos algébricos) como centro do Pensamento Algébrico. Reforçando esta ideia, acreditamos que o aluno nas condições do pensar algebricamente, é capaz de criar e usar de forma autónoma técnicas que possam solucionar problemas de carácter algébrico.

Ponte, Branco e Matos (2009, p. 93) indicam que a “aprendizagem da resolução de equações do 1º grau a uma incógnita e do seu uso na resolução de problemas é objeto de trabalho no 3º ciclo, sendo necessário dar atenção às dificuldades dos alunos associadas aos conceitos básicos referentes às equações”. Vieira, Rios e Vasconcelos (2020, p. 22) destacam que “a compreensão e utilização da linguagem simbólica matemática no ensino e aprendizagem das expressões numéricas e das equações do 1º grau constitui importante pilar nesse processo, visto que essa utilização viabiliza a praticidade da resolução”.

Para que este processo ocorra com mais significância, é indispensável o professor acompanhar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos seus alunos, no sentido de auxiliar este processo por meio de metodologias de ensino adequadas. Daí a importância de estudarmos a respeito de como pensam os alunos algebricamente.

Reconhecendo a importância da prática de resolução de problemas e a necessidade de levar a cabo o trabalho da Álgebra por parte dos alunos no sentido de promover e desenvolver seu Pensamento Algébrico, à de destacar também a intervenção do professor, que é uma influência imprescindível neste processo, visto que para além de ensinar Álgebra, cabe a ele produzir e orientar tarefas que permitam aos alunos desenvolver suas habilidades diante da resolução de problemas algébricos.

O modelo de análise do Pensamento Algébrico aplicado neste desenvolvimento investigativo foi proposto por Almeida (2016) e permite verificar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos ao realizarem diferentes tarefas matemáticas. Para este modelo, o autor propõe quatro (4) níveis de desenvolvimento do Pensamento: Nível 0 – Ausência do Pensamento Algébrico; Nível 1 – Pensamento Algébrico Incipiente; Nível 2 – Pensamento Algébrico Intermediário; Nível 3 – Pensamento Algébrico Consolidado.

Escolhemos este modelo, principalmente, pelo fato de este ser para análise do Pensamento Algébrico de alunos além do “modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico proposto por Godino e seus colaboradores, para ser utilizado na formação de professores” (Almeida, 2016, p. 18). Outro ponto importante está relacionado ao modelo proposto por Almeida (2016) assumir como base para a definição dos níveis a estratégia adotada pelo aluno, e para os subníveis o grau de dificuldade dos problemas de partilha.

Sendo que a estratégia de resolução de problemas adotada como pilar para definir cada nível também é fenômeno de análise da nossa investigação. Como alerta Almeida (2016, p. 96) que devemos ter em conta que “o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico não é atribuído à tarefa a ser resolvida em si, mas sim, as estratégias de resolução da tarefa, a atividade Matemática mobilizada pelo aluno”. Desse modo, não se trata de níveis exclusivamente matemáticos (centrados na tarefa que para nós foram designadas por situação-problema), mas de estágios de funcionamento de conhecimentos matemáticos mobilizados pelo aluno na resolução de problemas.

No Quadro 1 descrevemos, na primeira coluna, os níveis do modelo de Pensamento Algébrico e, na segunda coluna, a característica ou habilidade relacionadas a cada nível.

**Quadro 1 – Modelo de Pensamento Algébrico**

<b>Nível</b>	<b>Caraterísticas ou habilidade à desenvolver</b>
Nível 0 – Ausência do Pensamento Algébrico	Trabalho virado na aritmética (operação de quantidades conhecidas, reconhecimento das propriedades e prioridades das operações).
Nível 1 – Pensamento Algébrico Incipiente/Primário	Linguagem sincopada (resolve problemas que envolvem quantidades desconhecidas por meio de substituição ou contagem).
Nível 2 – Pensamento Algébrico Intermediário	Linguagem simbólica (estabelece relações entre duas quantidades e reconhece a equação que corresponde o problema).
Nível 3 – Pensamento Algébrico Consolidado	Linguagem algébrica (capacidade de explorar dados do problema, capacidade de identificar e construir significados aos objetos algébricos, capacidade de modelar e generalizar estruturas por meio de incógnitas).

Fonte: Adaptado a partir de Almeida (2016).

Vale salientar que pelo que entendemos, estes níveis descritos anteriormente no quadro 1, para que o aluno alcance um destes, depende mais do seu desempenho no trabalho algébrico por durante a resolução dos problemas relativos a equações do primeiro grau.

De acordo com Bonadiman (2007, p. 55) “um dos objetivos da Matemática e a grande competência que ela visa de resolver é a capacidade de pensar e de resolver situações-problema”. Thompson (1989) citado por Pagliarini (2007, p. 25) destaca um problema como “uma descrição envolvendo quantidades estabelecidas, seguida de uma pergunta sobre alguma relação entre as quantidades cuja resposta pede a aplicação de uma ou mais operações aritméticas”. Outro ponto de vista é dado por Spinillo *et al.* (2017, p. 930), no qual referem que “problemas matemáticos são situações que tornam os conceitos significativos para o indivíduo, mobilizando um conjunto de operações e representações para sua resolução”.

A par das ideias dos autores, inseridas no parágrafo anterior, consideramos que um problema, especificamente em Matemática, é uma situação apresentada, quer por linguagem simbólica ou corrente, que carece de um conjunto de operações ou algoritmos para solucioná-lo. Desse modo, aos problemas conducentes a Equações do 1º grau que constam nesta pesquisa, designamos de situações-problema.

### **3 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS: ALGUNS DESTAQUES**

A pesquisa cujos resultados trazemos neste artigo caracteriza-se por uma abordagem qualitativa. Para Gerhardt e Silveira (2009, p. 32) este tipo de investigação “preocupa-se com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais”. Em função desta perspectiva assumida e delineada, durante o tratamento de dados procuramos evidenciar o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico de alunos da 8ª classe ao realizarem atividades do tipo situação-problema referentes ao conteúdo de Equações do 1º grau, sem empregarmos procedimentos estatísticos de análise, ou seja, focamos nossas interpretações nas estratégias apresentadas pelos alunos para a resolução das situações-problema que lhes foram propostas.

Participaram da proposta investigativa, 28 alunos de uma turma da 8ª classe do curso diurno de uma Escola Secundária da Autarquia de Montepuez, da província de

Cabo Delgado, no norte de Moçambique. Os depoentes, de ambos os sexos, tinham idades compreendidas entre os 13 a 17 anos. A seleção dos participantes foi baseada na amostragem por conveniência, dos quais participaram por sua livre e espontânea vontade. Neste conjunto, organizamos, por sorteio, os participantes em sete (7) grupos de quatro (4) alunos cada, dos quais, dois (2) alunos do sexo masculino e igual número do sexo feminino.

Como instrumento de recolha de dados, aplicamos um questionário. Este instrumento foi composto por quatro (4) situações-problema relacionadas às Equações do 1º grau.

Para a organização e a análise dos dados da pesquisa, assumimos os procedimentos indicados pela Análise de Conteúdo (Bardin, 1977) e que podem ser descritos e aplicados em três fases: (i) Organização do material – recolha, organização e codificação/identificação dos questionários; (ii) Codificação – criação de códigos em virtude das respostas dadas pelos alunos e na qual consideramos palavras representativas das estratégias utilizadas por eles, e que, posteriormente, foram agrupadas por códigos semelhantes entre si com base na releitura e reanálise das respostas agora codificadas; (iii) Categorização – última fase, na qual atribuímos categorias aos agrupamentos de códigos e descrevemos suas consistências em função das respostas dadas.

No sentido de preservar as identidades dos participantes, optamos por codificar os grupos da seguinte forma: G1, G2, G3, G4, G5, G6 e G7. Desse modo, G1 – Significa Grupo 1, G2 – Grupo 2, G3 – Grupo 3 e, assim, sucessivamente. E para as categorias, indicamos por: C1 – Categoria 1; C2 – Categoria 2; C3 – Categoria 3; C4 – Categoria 4 e que foram assim nominadas: C1 – Resolução de problemas por meio de contagem; C2 – Resolução de problemas por meio de linguagem simbólica; C3 – Manifestação de erro; C4 – Resolução de problemas por meio de tentativas e erro.

## **4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS**

Esta seção em que trazemos exemplares das respostas dos alunos, pois a completude dos dados ampliaria em muitas páginas este artigo, inviabilizando sua submissão a este periódico, e os resultados analíticos, foi estruturada da seguinte forma: primeiramente, expusemos a situação-problema, o objetivo que se pretendia alcançar

com a mesma, exemplos de resultados obtidos a partir das respostas dadas pelos alunos (um exemplo para cada categoria); em seguida, apresentamos uma tabela para cada problema com as categorias verificadas nas resoluções/respostas dos alunos, tendo em conta as estratégias por eles adotadas.

Situação-problema 1: *Miguel pensou em um número, somou-lhe 14 e obteve como resultado 22. Qual é o número que Miguel pensou? Explique os procedimentos de resolução.*

Com esta atividade pretendíamos colocar o aluno a modelar o problema por meio de uma Equação do 1º grau, sem o uso vicioso da letra ‘ $x$ ’ como símbolo da incógnita.

Resolução do G4: O número que o Miguel pensou para somar com 14 e obter resultado de 22 foi 8. Porque adicionado a 14 dá 22 ou ali mesmo subtraído, na recta graduada dará 8.

Resolução do G3:  $M + 14 = 22$ ;  $M = 22 - 14$ ;  $M = 8$ .

Resolução do G5:  $14 + 14x = 28 - 4x = 24 - 2x = 22$ . *Porque primeiro somou 14 + 14 que e  $x = a$  28 - 4 fui fica 24 dai somou = 22.*

No Quadro 2 organizamos as respostas interpretadas considerando as categorias. Cabe lembrar que de cada grupo participavam 4 alunos. Esclarecimentos e descrições do que consideramos para a alocação das estratégias evidenciadas nas respectivas categorias, foram comentados logo após o quadro.

**Quadro 2** – Resultados da Situação-problema 1

Categorias	Grupos de alunos
C1: Resolução de problemas por meio de contagem	G1, G2, G4, G6, G7
C2: Resolução de problemas por meio de linguagem simbólica	G3
C3: Manifestação de erro	G5

Fonte: Dados da pesquisa, 2020.

Os dados expostos no Quadro 2 indicam-nos que na realização desta situação-problema, as estratégias de resolução apresentadas pelos alunos se acomodaram em três categorias.

As estratégias adotadas pelos grupos G1, G2, G4, G6 e G7 dão-nos entender que os alunos compreendem um problema que envolve Equação do 1º grau, mas não conseguem explorar os dados do problema e usá-los de forma simbólica. Portanto, estes alunos pensam algebricamente segundo Groenwald e Beicher (2010a, p. 84), quando afirma que “quando o aluno aprende a calcular o valor desconhecido, em problemas de Matemática, mesmo sem atribuir a esse um valor ou símbolo que o represente, já está sendo introduzido o Pensamento Algébrico”.

Sendo assim, o Pensamento Algébrico desses alunos é incipiente (Nível 1), o que remete-nos à seguinte argumentação: “o aluno que se encontra no nível 1 entende a incógnita como espaço vazio que deve ser preenchido com valores particulares e conhecidos” (Radford, 2009 citado por Almeida, 2016, p. 136). Todavia, este fenômeno, foi verificado, no nosso caso, nas resoluções dos alunos, dos quais descartaram o uso de incógnitas durante a resolução de problemas.

A estratégia de resolução mobilizada pelo grupo G3 revela que estes alunos encontravam-se, na ocasião da coleta de dados, no nível do Pensamento Algébrico Intermediário (Nível 2). Sobre ele, Almeida (2016, p. 145) afirma que o aluno que se encontra neste nível mobiliza a capacidade de operar com o desconhecido como se fosse o conhecido, de forma analítica. Fato que percebemos nos nossos alunos, eles dispunham da capacidade de trabalhar com incógnitas em tarefas estruturais que envolviam Equações do 1º grau.

Situação-problema 2: António e Pedro juntaram ambos 600 MT<sup>1</sup> para gastarem nas férias do final do ano na cidade de Pemba. Se o António juntou mais 100 MT que o Pedro. Qual é em MT, a quantia que cada um deles juntou? Explique os procedimentos de resolução.

O objetivo desta questão foi o de colocar o aluno, para além de traduzir a situação por meio de uma Equação do 1º grau, mas, também, a estabelecer relações entre duas incógnitas em uma equação por meio de uma condição delimitada. As categorias referentes a esta situação-problema estão apresentadas no Quadro 3.

Resolução do G2: O António e Pedro juntaram ambos 600 meticais. O António tirou para a contribuição 300 e Pedro também tirou 300 o António juntou mais 100 que deu do total 700 MTZ isso quer dizer que o António juntou 400 MT o Pedro juntou 300 MT.  
 Resolução do G3: Seja  $A$  = valor de António e  $P$  = valor do Pedro  
 $A + P = 600$ ; como António juntou mais 100 Mt que o Pedro, então  
 $A = P + 100 \Rightarrow P + 100 + P = 600 \Rightarrow 2P = 500 \Rightarrow P = 250$   
 $A + P = 600 \Rightarrow A + 250 = 600 \Rightarrow A = 600 - 250 \Rightarrow A = 350$ .

**Quadro 3 – Resultados da Situação-problema 2**

Categorias	Grupos de alunos
C4 <sup>2</sup> : Resolução de problemas por meio de tentativas e erro	G1, G2, G4, G5, G6, G7
C2: Resolução de problemas por meio de linguagem simbólica	G3

Fonte: Dados da pesquisa, 2020.

<sup>1</sup> MT: abreviatura de Metical – moeda oficial moçambicana.

<sup>2</sup> A ordem das categorias nos quadros está relacionada aquelas com maior frequência de registros. Por isso, C4 antes de C2.

Os resultados apresentados no Quadro 3, indicam-nos que as estratégias apresentadas pelos alunos se adequaram em duas categorias: C4 e C2. As estratégias de resolução dos grupos G1, G2, G4, G5, G6 e G7, classificamos pela ausência do Pensamento Algébrico (Nível 0), ou seja, os componentes dos grupos realizaram a atividade por meio do conhecimento aritmético, inclusive, sem alcançar o resultado desejado. A resposta dada pelo grupo G3 revelou um aprimoramento das noções básicas da Álgebra, neste caso, desenvolveram capacidades do Nível 2 (Pensamento Algébrico Intermediário), ou seja, eles possuíam a capacidade de representar e operar com objetos algébricos.

**Situação-problema 3:** *Uma balança de dois pratos, contem doze (12) quilogramas de açúcar e outro prato contem cinco (5) quilogramas de açúcar. O Manuel pretende equilibrar a balança, mantendo a mesma quantidade de açúcar para cada prato. Qual é (em quilograma) a quantidade de açúcar que o Manuel terá que aumentar para que os pratos da balança tenham mesma quantidade de açúcar? Explique os procedimentos de resolução.*

Esta questão teve como objetivo, impulsionar o aluno a distinguir o significado da igualdade em uma expressão aritmética e em uma equação, que representa o ponto de equilíbrio entre duas expressões. Os resultados interpretativos referentes a esta atividade, forma organizados no Quadro 4.

Resolução do G2: *Para que o Manuel consiga obter a mesma quantidade de açúcar para cada prato é preciso que o Manuel aumente mais sete (7) quilogramas de açúcar para obter a mesma quantidade assim já estarão equilibradas as balanças.*

Resolução do G3:  $12 = 5 + x$  ;  $5 + x = 12$ ;  $x = 12 - 5$  ;  $x = 7$ .

Resolução do G4: *Para equilibrar as duas balanças o Manuel retirou 3,5 kg e acrescentou ao prato que tinha 5 kg obtendo assim em cada prato 8,5 kg.*

**Quadro 4 – Resultados da Situação-problema 3**

<b>Categorias</b>	<b>Grupos de alunos</b>
C1: Resolução de problemas por meio de contagem	G1, G2, G5, G6, G7
C2: Resolução de problemas por meio de linguagem simbólica	G3
C3: Manifestação de erro	G4

Fonte: Dados da pesquisa, 2020.

Ao analisarmos as respostas dadas pelos alunos a este problema, constatamos que enfrentam dificuldades em trabalhar com os dados do problema, como o caso da interpretação de certo número desconhecido em uma incógnita, estabelecimento de relações entre quantidades e formação e interpretação de métodos utilizados.

Tal disposição encontrada por nós, já foi revelada na pesquisa de Booth (1995) citado por Possamai e Baier (2013, p. 76) quando argumenta que “os estudantes manifestam dificuldades em Álgebra: a interpretação de letras, a formalização dos métodos utilizados e sua relação com os métodos da aritmética e a compreensão de notação e de convenções”. Neste contexto, as técnicas mobilizadas pelos grupos G1, G2, G5, G6 e G7 recaem no Nível 1 e o grupo G3 para o Nível 2.

**Situação-problema 4:** *Três clubes de basquetebol A, B e C, submetidos a uma competição do campeonato de jogos escolares 2019, marcaram um total de 240 pontos nas partidas que tiveram. Sabendo que o clube B marcou o dobro de pontos do clube A e o clube C marcou 40 pontos a mais que o clube B. Nessas condições, quantos pontos foram marcados por cada clube? Explique os procedimentos de resolução.*

O objetivo da Situação-problema 4 foi colocar o aluno a estabelecer relações entre três incógnitas e a formular suas próprias hipóteses e argumentar sobre elas, obedecendo as condições previamente definidas no problema, no sentido de encontrar uma solução viável.

Para este caso, acomodamos os registros dos grupos de alunos em duas categorias, C4 e C2, que podem ser consultadas no Quadro 5, logo após os exemplos, uma para cada uma delas.

Resolução do G4: *Dos 240 pontos marcados por cada clube, o A marcou 45 pontos, o B marcou 90 pontos e o C marcou 125 ou 135 pontos.*

Resolução do G3:

$A + B + C = 240:$	$B = 2A:$	$C = B + 40$
$A + 2A + B + 40 = 240$	$B = 2 \times 40$	$C = 80 + 40$
$3A + B = 200$	$B = 80$	$C = 120$
$3A + 2A = 200$		
$5A = 200$		
$A = 40$		

**Quadro 5 – Resultados da Situação-problema 4**

Categorias	Grupos de alunos
C4: Resolução de problemas por meio de tentativas e erro	G1, G2, G4, G5, G6, G7
C2: Resolução de problemas por meio de linguagem simbólica	G3

Fonte: Dados da pesquisa, 2020.

Nesta atividade, verificamos que os alunos deram soluções/respostas que desconsideraram as condições dadas. Pois, trataram esta questão como se fosse uma proposta que envolve, apenas, quantidades conhecidas, fato que os conduziu ao erro, como pode ser verificado no exemplo dado em que inserimos a Resolução do G4. Essa forma de tratar problemas algébricos dá-nos entender que eles enfrentam dificuldades,

como afirma Ponte, Branco e Matos (2009, p. 96), “muitas das dificuldades dos alunos na resolução de equações surgem dos erros que cometem no trabalho com expressões algébricas, por não compreenderem o significado destas expressões ou as condições da sua equivalência”. Sendo assim, as estratégias mobilizadas incidem no Nível 0 – ausência do Pensamento Algébrico.

Ao passo que os alunos do G3 revelaram habilidades que nos conduziram a afirmar que o, as estratégias mobilizadas por estes, recaem para o Nível 3 (Pensamento Algébrico Consolidado): “nesse nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico, o aluno é capaz de generalizar objetos intensivos e representa-los mediante linguagem simbólica-litera e operar esses objetos” (Godino *et al.*, 2014 citado por Almeida, 2016, p. 102). Porém verificamos nesta tarefa, a elaboração e a justificação de conjecturas por parte dos alunos envolvidos neste grupo.

Ao retomarmos todos esses resultados, obtidos durante a pesquisa, e que trouxemos parcialmente representados neste artigo, verificamos que eles evidenciam registros de soluções no que tange ao Modelo de Pensamento Algébrico (adotado) referente ao Nível 1, que é o domínio incipiente ou primário. E o domínio consolidado dessa forma de Pensamento, revelou-se na Situação-problema 4, por um único grupo dos participantes, G3.

Tais resultados se distanciam dos objetivos que destacam a aplicação das noções de Álgebra na resolução de Equações do 1º grau, traçados no Plano Curricular na Disciplina de Matemática, 8ª Classe, pois estes níveis de instrução são consistentes e pertinentes. Segundo o documento em questão, os alunos devem ser capazes além de resolver equações do 1º grau:

Traduzir na linguagem algébrica situações dadas na linguagem comum e vice versa; Interpretar o enunciado de um problema; Traduzir um problema por meio de uma equação linear; Resolver problemas concretos por meio de equações lineares, compreendendo os procedimentos envolvidos; Analisar a solução de uma equação no contexto do problema. (INDE, 2010, p. 33).

Face a esses objetivos definidos no Plano Curricular, verificamos dificuldades que carecem ser ultrapassados por parte dos alunos. Porém, para que isso aconteça, eles precisam de um acompanhamento dos professores, assim como das entidades envolvidas no sistema educativo, pois o apoio desses condiciona o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Comparando os resultados obtidos com os de Almeida (2016), que foram a ferramenta chave para a criação do modelo de níveis do Pensamento Algébrico pelo

autor, e empregue nesta pesquisa, verificamos que são convergentes, pois, o nível do Pensamento Algébrico mais ostentado na pesquisa de Almeida (2016) (com uma percentagem de 58%) e que, também, verificamos na nossa investigação foi o do Pensamento Algébrico Incipiente.

Outro aspecto a destacar nesta pesquisa é a adoção de estratégias para a resolução de situações-problemas por parte dos alunos. Com base nos resultados da pesquisa, notamos que os alunos mobilizaram mais a estratégia de substituição de incógnitas, que representavam os valores desconhecidos, por números de forma arbitrária, ou seja, atribuição de valores a incógnitas. Este fenômeno também verificou-se na pesquisa de Almeida (2016, p. 11) ao afirmar que “a maior parte dos participantes da pesquisa conseguem resolver problemas de partilha adotando a estratégia atribuir valores”.

Com este fenômeno verificado nas duas pesquisas, podemos afirmar que apesar dos alunos serem de países diferentes, com contextos e políticas educativas diferentes, em Matemática, no ramo da Álgebra, particularmente na resolução de situações-problema que envolvem equações do primeiro grau, as estratégias de resolução adotadas pelos alunos destes dois países tendem a ser as mesmas, e por consequência disso, a sua forma de pensar, algebricamente, é idêntica.

Por outro lado, enquanto a pesquisa de Almeida (2016) objetivou propor um modelo que possibilite identificar níveis de desenvolvimento do Pensamento Algébrico revelado por alunos de Educação Básica, esta pesquisa buscou caracterizar, em termos cognitivos, o nível de Pensamento Algébrico de alunos por meio deste modelo.

Por conta disso, estas duas pesquisas trazem uma nova compreensão em torno do Pensamento Algébrico, isto porque primeiro esta pesquisa é uma das poucas que procurou caracterizar a aprendizagem dos alunos referente a equações do primeiro grau, que é manifestada por meio do seu pensamento, por meio de um modelo de níveis pouco usado nas escolas e que achamos ser necessário seu uso, e segundo, porque este modelo de níveis de Pensamento Algébrico, proposto por Almeida (2016), possibilita identificar e avaliar o nível da aprendizagem dos alunos em relação a equações do primeiro grau.

Vieira, Rios e Vasconcelos (2020, p. 22) ressaltam que “a aprendizagem da matemática é tida como uma tarefa difícil, tanto para o aluno como para o professor, que, por mais que tente inovar sua metodologia, depara-se com dificuldades relacionadas a este processo como a leitura e interpretação de textos”. Constatamos isso por meio das

respostas dos alunos, que enfrentaram dificuldades durante a resolução dos problemas e por sua vez essas dificuldades advêm da sua aprendizagem na disciplina de Matemática. Este fenômeno pode ser observado nas respostas submetidas nas categorias C3 e C4 desta pesquisa.

Apesar deste fenômeno ser caracterizado por dificuldades durante a resolução dos problemas pelos alunos, notamos que alguns deles, cujas suas respostas estão inseridas na categoria C2, possuem habilidades que mostram serem capazes de resolver problemas algébricos. Desse modo, com base nos dizeres de Groenwald e Beicher (2010b, p. 244-246) no nosso estudo, essas habilidades estão caracterizadas por representação, construção de significados, estabelecimento de relações e resolução de problemas, o que pressupõe que estes alunos desenvolveram o Pensamento Algébrico, mesmo não em sua completude.

## 5 CONSIDERAÇÕES CONCLUSIVAS

Nesta pesquisa procuramos responder à pergunta: Qual é o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos alunos da 8ª classe, durante a resolução de Situações-problema relativas a Equações do 1º grau? Com este intuito, propusemos aos participantes da pesquisa responder um questionário constituído por quatro (4) questões do tipo Situação-problema.

Os dados obtidos revelaram que 85,3% dos alunos ostentam o Nível 1 que está relacionado ao Pensamento Algébrico Incipiente (primário). Quanto ao Nível 2, 14,7% dos alunos mostraram estar nele representado, ou seja, possuem um Pensamento Algébrico Intermediário. Este cenário demonstra que os alunos se encontram em um processo de desenvolvimento do Pensamento Algébrico, pois, trata-se de um nível transitório, do Pensamento Aritmético (operações aritméticas simples) para o pensamento algébrico (operações algébricas).

Importa salientar que as habilidades dos alunos, em função do seu nível de instrução, estão muito distantes dos objetivos traçados no Plano Curricular na disciplina de Matemática, 8ª Classe do Sistema Moçambicano de ensino, em particular, no estudo de Equações do 1º grau. Apesar de os alunos enfrentarem dificuldades durante a resolução dos problemas, constatamos que eles mobilizaram, de forma autônoma, diferentes estratégias para a resolução das situações-problema.

De igual modo, verificamos que os alunos não conseguem traduzir problemas expressos em linguagem corrente para linguagem simbólica e como consequência não atribuem se quer um significado aos objetos algébricos. Cenário este nos chamou a atenção e ao qual nos dedicaremos em pesquisa futura.

## REFERÊNCIAS

- Almeida, J. R. (2016). *Níveis de desenvolvimento algébrico: Um modelo para os problemas de partilha de quantidade*. (Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife.
- Barbeiro, E. C. C. (2012). *A aprendizagem das Equações do 1º grau a uma incógnita: Uma análise dos erros e das dificuldades de alunos do 7º ano de escolaridade*. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e Secundário). Universidade de Lisboa. Lisboa.
- Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70.
- Beicher, E. Luís. (2009). *Características do Pensamento Algébrico de estudantes do 1º ano do Ensino Médio*. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Luterana do Brasil. Canoas.
- Bonadiman, A. (2007). *Álgebra no Ensino Fundamental: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas*. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.
- Canavarro, A. P. (2007). *O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos*. *Quadrante*, v. XVI (2), 81-119.
- Gamas, S, C. (2013). *Diofanto de Alexandria e os primórdios da Álgebra*. Coimbra: Editora IIIUC – Imprensa da Universidade de Coimbra.
- Gerhardt, T. E., & Silveira, D. T. (2009). *Métodos de Pesquisa*. Porto Alegre: Editora da UFRGS.
- Groenwald, C. L. O., & Beicher, E. L. (2010a). Características do pensamento algébrico de estudantes do Ensino Médio com Equações do 1º grau. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 12 (1), 81-94.
- Groenwald, C. L. O., & Beicher, E. L. (2010b). Características do pensamento algébrico de estudantes do Ensino Médio com Equações do 1º grau. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 12 (2), 242-270.
- Instituto Nacional de Desenvolvimento da Educação (INDE). (2010). *Matemática, Programa da 8ª Classe*. Maputo: DINAME.

- Pagliarini, T. R. (2007). *Situação-problema: representações de acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da UFSM*. (Dissertação de Mestrado em Educação). Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria.
- Pimenta, C. M. Santos. (2016). *A Construção do conhecimento no desenvolvimento do Pensamento Algébrico*. (Tese de Doutorado em Didática da Matemática). Universidade da Beira Interior. Covilhao.
- Ponte, J. P.; Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Ministério de Educação. Disponível em <https://www.researchgate.net/publication/267842645>.
- Possamai, J. P., & Baier, T. (2013). *Primeiros passos na álgebra: conceitos elementares e atividades pedagógicas*. *Revista Dynamis*, v. 19 (2), 72-86.
- Santos, L. Goncalves dos. (2007). *Introdução do Pensamento Algébrico: um olhar sobre professores e Livros Didáticos de Matemática*. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática).
- Silva, A. Zulmira da. (2012). *Pensamento Algébrico e equações no Ensino Fundamental: uma contribuição para o caderno do professor de Matemática do oitavo ano*. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.
- Soares, R. Mendes. (2018). *Pensamento Algébrico: quais elementos são identificados por professores de Matemática em actividades com este foco?* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). São Paulo.
- Souza, M., & Silva, D. (2016). *Pensamento algébrico: um olhar para as publicações do Encontro Nacional de Educação Matemática*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo.
- Spinillo, A. G.; Lautert, S. L.; Borba, R. E. S. R.; Santos, E. M., & Silva, J. F. G. (2017). *Formulação de problemas matemáticos de estrutura multiplicativa por professores do Ensino Fundamental*. *Bolema*, v. 31 (59), 928-946.
- Vieira, A. R. L.; Rios, P. P. S., & Vasconcelos, C. A. (2020). *A linguagem simbólica e a resolução de problemas matemáticos no 8º ano do Ensino Fundamental*. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 22 (1), 43-67.

## NOTAS

### TÍTULO DA OBRA

Pensamento algébrico na aprendizagem de equações do 1º grau

Constantino Hilário

Licenciado

[julinho hilario04@gmail.com](mailto:julinho hilario04@gmail.com)

 <http://orcid.org/0000-0003-4960-3518>

**Elias Manensa Sabe**

Licenciado

Universidade Rovuma – Extensão de Cabo Delgado, Montepuez, MTZ, Moçambique

[sabehelio@gmail.com](mailto:sabehelio@gmail.com) <http://orcid.org/0000-0003-2649-0135>**Idio Vilar Albano**

Licenciado

IPR-EFPEA, Zambezia, Milange, MLG, Moçambique

[idio.vilar.albano@gmail.com](mailto:idio.vilar.albano@gmail.com) <https://orcid.org/0000-0002-9866-474X>**Marinez Meneghello Passos**

Doutora

Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Brasil

[marinezpassos@uel.br](mailto:marinezpassos@uel.br) <http://orcid.org/0000-0001-8856-5521>**Endereço de correspondência do principal autor**

Q 1 U/ C NAMPACO, Muhala, Cidade de Nampula, Namutequeliua, NPL, Moçambique.

**AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus pela vida divina.

**CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA****Concepção e elaboração do manuscrito:** C. HILÁRIO, E. M. SABE.**Coleta de dados:** C. HILÁRIO, E. M. SABE.**Análise de dados:** C. HILÁRIO, E. M. SABE, I.V. ALBANO, M. M. PASSOS.**Discussão dos resultados:** C. HILÁRIO, E. M. SABE, I.V. ALBANO, M. M. PASSOS.**Revisão e aprovação:** C. HILÁRIO, E. M. SABE, I.V. ALBANO, M. M. PASSOS.**CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA**

O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

**FINANCIAMENTO**

Não se aplica.

**CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM**

Não se aplica.

**APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA**

Não se aplica.

**CONFLITO DE INTERESSES**

Não se aplica.

**LICENÇA DE USO** – uso exclusivo da revista

Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution](#) (CC BY) 4.0 International. Esta licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

**PUBLISHER** – uso exclusivo da revista

Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

**EDITOR** – uso exclusivo da revista

Mérciles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

**HISTÓRICO** – uso exclusivo da revista

Recebido em: 15-09-2020 – Aprovado em: 18-02-2021