Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TRANSIÇÃO PARA O ENSINO SUPERIOR: UM ESTUDO DE CASO SOBRE AS CONTRIBUIÇÕES DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Transition To Higher Education: A Case Study On The Contributions Of Semiotic Representations

Vânia Bolzan **DENARDI**
Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil
vania_denardi@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0100-4559

Eleni **BISOGNIN**
Universidade Franciscana, Santa Maria, Brasil.
eleini@ufn.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-3266-6336

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Este estudo objetivou investigar as contribuições das representações semióticas para a compreensão de conceitos matemáticos necessários para a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I. Participaram da pesquisa 16 alunos ingressantes em um Curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do Rio Grande do Sul. A pesquisa de abordagem qualitativa, do tipo estudo de caso, teve a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e de ensino. Os aportes teóricos ancoram-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Em um estudo preliminar, foi aplicada uma avaliação diagnóstica, cujo resultado evidenciou lacunas, oriundas da Educação Básica. Após as análises preliminares, foi elaborada e aplicada uma sequência didática, cujas atividades abordam conteúdos básicos de matemática. A análise dos dados foi realizada com base na tripla análise sugerida por Raymond Duval e na comparação com a análise *à priori.* Mediante a análise realizada pode-se inferir que as representações semióticas mobilizadas durante a resolução das atividades, contribuíram para: um maior domínio no estabelecimento de relações entre as representações algébrica e gráfica de funções, uma melhor desenvoltura na leitura e interpretação de gráficos, avanços em relação à fatoração e simplificação de expressões, avanços na resolução de inequações, a compreensão do conceito de domínio e das implicações desse, no gráfico da função, bem como a compreensão do conceito de função e da noção intuitiva de limite.

Palavras-chave: Transição para o Ensino Superior, Cálculo Diferencial e Integral, Registros de Representação Semiótica, Engenharia Didática

ABSTRACT

This study aimed at investigating the contributions of semiotic representations to the understanding of mathematical concepts necessary for the learning of Differential and Integral Calculus I. Sixteen students enrolled in a Mathematics Course at a public university in Rio Grande do Sul participated in the research. The qualitative approach research, of case study, used the Didactic Engineering as research and teaching methodology. The theoretical contributions are anchored in the Registers of Semiotic Representation Theory. In a preliminary study, a diagnostic evaluation was applied, the result of which showed gaps, originating from Basic Education. After the preliminary analyses, a didactic sequence was elaborated and applied, and the activities address basic math contents.the data analysis was based on the triple analysis suggested by Raymond Duval, and the comparison with the a priori analysis. through the analysis, it can be inferred that the semiotic representations mobilized during the resolution of the activities have contributed to: a greater domain in the establishment of relations between the algebraic and graphical representations of functions, a better resourcefulness in the reading and interpretation of graphs, advances in the factoring and simplification of expressions, advances in the resolution of inequalities, the understanding of the concept of domain and its implications in the graph of function, as well as the understanding of the concept of function and the intuitive notion of limit.

Keywords: Transition for Higher Education, Differential and Integral Calculus. Records of Semiotic Representation, Didactic Engineering

1 INTRODUÇÃO

A Educação Matemática é:

> [...] uma grande área de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e a aprendizagem da matemática nos diversos níveis da escolaridade, quer sejam em sua dimensão teórica ou prática (Pais, 2005, p. 10).

Dentre suas temáticas de investigação, Nasser, Sousa e Torraca (2012) destacam que a dificuldade dos alunos, que chegam ao Ensino Superior, com a matemática dos ensinos fundamental e médio é uma das preocupações e, consequentemente, alvo constante de estudos pela comunidade de pesquisadores da área.

Os problemas de formação básica, dos estudantes que ingressam em cursos de graduação das áreas de ciências exatas, naturais e engenharias, são apontados como uma das principais causas do alto índice de fracasso na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI-I). No Brasil, esse alto índice tem sido responsável pela oferta de um número crescente de turmas de CDI-I por semestre, pelos atrasos na conclusão dos cursos e pela expressiva evasão encontrada em cursos superiores da área de Ciências Exatas (Cury, 2009).

No que se refere às dificuldades em matemática básica de alunos que ingressam em cursos de formação inicial de professores de Matemática, “considera-se que, se essas dificuldades não forem discutidas nos cursos de Licenciatura, serão levadas adiante, para a própria sala de aula do futuro professor, trazendo como consequência um ensino frágil [...]” (Cury, 2013, p. 1). Dessa forma, acredita-se que estes alunos necessitam de uma atenção especial no período de transição da Educação Básica para o Ensino Superior, uma vez que todo professor de Matemática deve ter um conhecimento aprofundado da matemática básica e de seus métodos de construção do conhecimento.

Nas reflexões acerca de como se dá a aquisição do conhecimento matemático, bem como das maneiras de ensinar, no sentido de encontrar alternativas concretas para o ensino de Matemática é possível contar com os estudos de Raymond Duval (2009, 2011, 2013). O referido pesquisador busca descrever os processos cognitivos do aprendiz em situações do cotidiano escolar, o que permite alinhar suas teorias no âmbito da Psicologia Cognitiva.

Colombo, Flores e Moretti (2008) declaram que as primeiras publicações, no Brasil, que utilizaram a noção dos registros de representação semiótica de Duval na aprendizagem em Matemática, datam da segunda metade da década de 90. Desde então, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) tem auxiliado na organização de situações de aprendizagem e na aquisição de conhecimentos matemáticos.

Contudo, Ferreira, Santos e Curi (2013) relatam a carência de trabalhos que utilizam a TRRS, na perspectiva da formação de professores. As pesquisadoras enfatizam que "não bastam pesquisas que apontem metodologias eficazes para a sala de aula, se pouco estudo se tem em relação a elas na formação de professores de Matemática" (p. 11).

Diante do contexto exposto, este artigo tem como proposta apresentar os resultados de uma tese de doutorado. O estudo partiu da seguinte problemática: "Quais as contribuições das representações semióticas para a compreensão de conceitos matemáticos necessários para a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática?

Com o objetivo geral de investigar contribuições das representações semióticas para a compreensão de conceitos matemáticos necessários para a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I, foi desenvolvido um estudo de abordagem qualitativa, do tipo estudo de caso, que teve a Engenharia Didática como metodologia e, como método de verificação dos resultados, a tripla análise sugerida por Duval (2011).

Neste trabalho, serão apresentados os resultados de um dos quatro blocos de atividades, o qual o teve a interpretação de gráficos, a fatoração de expressões algébricas e a resolução de inequações, como principais objetivos. Inicialmente, descrevem-se a TRRS e a Engenharia Didática. Após, apresentam-se o contexto da pesquisa, o encaminhamento metodológico, as atividades propostas, a análise dos resultados e as considerações finais.

2 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Desenvolvida pelo professor, filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, a TRRS, nas últimas décadas, tem sido bastante difundida no Brasil e muito tem contribuído para pesquisas no âmbito da Educação Matemática. A partir de uma abordagem cognitiva, o teórico buscou entender o funcionamento cognitivo do sujeito, destacando atividades essenciais para a aprendizagem matemática. Nesse contexto, ele atribui papel de destaque às representações semióticas.

Por representações semióticas entende-se as produções constituídas pelo emprego de signos, utilizadas para expressar, objetivar e tratar as representações mentais – o conjunto de concepções de um indivíduo acerca de um objeto ou situação. Para Duval (2011, p.23), as representações semióticas "[...] estão no lugar dos objetos ou os evocam quando esses não são imediatamente acessíveis". Na Matemática, elas são fundamentais devido ao caráter abstrato dos objetos, que só são acessíveis por meio de suas diferentes representações. Contudo, nesta área de conhecimento, as representações semióticas não estão apenas relacionadas com a função de comunicar ou evocar algo, mas aparecem atreladas ao próprio desenvolvimento da atividade matemática.

De acordo com Duval (2009), a origem das dificuldades no ensino e na aprendizagem de Matemática decorre da dependência e diversidade das representações semióticas. Ele acrescenta, ainda, que para os conceitos serem efetivamente apreendidos, faz-se necessário que o sujeito desenvolva não somente a capacidade de representar ideias e conceitos em linguagem simbólica, mas, principalmente, sua capacidade de mobilizar simultaneamente ao menos dois registros de representação semiótica, coordenando-os de forma natural.

O termo registro foi escolhido pelo pesquisador para designar os sistemas semióticos específicos da Matemática, quais sejam: a língua natural, os sistemas de escrita (numérica e algébrica), os gráficos cartesianos e as figuras geométricas. Para um "registro" são primordiais as funções de objetivação e tratamento, além da comunicação.

A função de comunicação, necessária a qualquer sistema semiótico de representação, permite que o sujeito exteriorize sua representação mental, deixando claro ao interlocutor a sua percepção conceitual acerca de um determinado objeto. Sem a utilização de uma representação para comunicar qualquer troca de conhecimentos seria inviável.

A função de objetivação, entendimento para si, diz respeito à possibilidade de um sujeito utilizar as representações para tornar claro para si próprio o conceito com o qual ele está lidando. É como se ele estivesse se conscientizando de algo de que ainda não tinha consciência. Já, a função de tratamento consiste nas transformações que o sujeito pode efetuar no interior de um mesmo registro.

Na visão de Duval (2013), os diferentes registros semióticos permitem uma diversificação de representações de um mesmo objeto, aumentando as capacidades cognitivas dos sujeitos e, portanto, suas representações mentais. Dado que, do ponto de vista cognitivo, nenhuma representação é completa em relação ao objeto que representa, ou seja, cada representação revela um determinado conceito, uma determinada propriedade, enfim, uma característica diferente. Além do mais, a mobilização e coordenação de vários registros de representações tornam-se importantes para que os objetos matemáticos não venham a ser confundidos com suas representações e para que possam ser reconhecidos em cada uma delas.

Nessa perspectiva, o autor destaca que para compreender como ocorre a aquisição conceitual por meio da mobilização e coordenação dos registros de representação, é necessário entender duas atividades cognitivas próprias da atividade matemática: o tratamento e a conversão.

O tratamento, como já destacado, é a transformação de uma representação semiótica em outra, dentro do mesmo tipo de registro. Desse modo, os tratamentos não estão relacionados ao conteúdo do objeto e sim à forma.

A conversão é o outro tipo de transformação inerente aos registros de representação semiótica. Todavia, ela é uma transformação externa e ocorre entre registros diferentes. Conservando o objeto matemático, muda-se a forma de sua representação, uma vez que se abandona o registro de representação inicial e passa-se a utilizar um outro tipo de registro. Por exemplo, quando se lê uma situação-problema que está expressa em língua natural e a transforma em uma expressão numérica para resolvê-la, diz-se que uma conversão foi realizada. Para Duval (2013, p. 18), "[...] do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que [...] aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão".

Percebe-se, assim, que para que uma aprendizagem matemática aconteça há a necessidade de o professor criar possibilidades e propor atividades que possibilitem a coordenação entre os registros, haja vista que a diversidade de registros por si só não leva efetivamente à aprendizagem matemática. Para que essa ocorra, é preciso que o sujeito saiba mobilizar, de forma espontânea, diversos registros de representação de um mesmo objeto. Para tanto, é necessário que o professor tenha clareza do objeto matemático em estudo, para que assim escolha os registros de representação adequados, bem como o momento certo de explorar atividades cognitivas de conversão e/ou tratamento.

Sendo assim, o ensino de Matemática pautado nas ideias defendidas por Duval parece contribuir para uma efetiva aprendizagem do aluno, no sentido de possibilitar a ele a utilização de diferentes formas que um conceito pode ser representado e, consequentemente, aprendido.

3 ENGENHARIA DIDÁTICA

O termo Engenharia Didática (ED), oriundo da Didática da Matemática Francesa, é empregado em pesquisas na área da Educação Matemática desde a década de 1980. De acordo com o Artigue (1996), a ED tem dupla função, na qual ela é compreendida tanto como uma metodologia de pesquisa qualitativa, quanto como uma produção de estratégias e abordagens para o ensino.

Como metodologia de pesquisa, caracteriza-se pela aplicação de uma sequência de aulas planejadas com a finalidade de obter informações que permitam interpretar processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, elucidando o fato investigado. Outra característica da ED é a de ser um modelo de experimentação no ambiente escolar, com a particularidade de situar-se no registro de estudo de caso, cuja validação é essencialmente interna, baseada na confrontação entre a análise *a priori* e *a posteriori*.

A implementação dessa metodologia atravessa um processo constituído por quatro fases: (1) análises prévias, (2) concepção e análise *a priori,* (3) experimentação e (4) análise *a posteriori* e validação.

A primeira fase, análises prévias, tem embasamento no quadro teórico, didático e nos conhecimentos já adquiridos sobre o assunto em questão. Compreende a análise dos aspectos epistemológicos do conteúdo a ser ensinado, do ensino usual e seus efeitos, das concepções dos alunos, de suas dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução. É nela que o pesquisador identifica as variáveis de comando que serão explicitadas e manipuladas na fase posterior.

Na segunda fase, concepção e análise *a priori* da sequência didática, o professor, orientado pelas análises prévias, busca organizar sua ação sobre um certo número de variáveis de comando, consideradas por ele como pertinentes ao problema em estudo.

Após a concepção, realiza-se a análise *a priori* de cada atividade; na qual constroem-se as hipóteses e faz-se uma previsão do comportamento dos sujeitos frente a elas. Na sequência, é realizada a experimentação, que consiste em aplicar as atividades construídas, corrigindo-as se necessário, o que implica em um retorno à análise *a priori,* em um processo de complementação. Nessa fase, os alunos colocam em prática seus conhecimentos a fim de resolver o que foi solicitado, e, com isso, adquirir novos conhecimentos. O professor, por sua vez, assume o papel de mediador, criando condições para que o aluno desempenhe o papel principal na construção de seus conhecimentos.

A última fase, consiste em realizar a análise *a posteriori*, juntamente com a validação e/ou refutação das hipóteses elaboradas na segunda fase da metodologia. Tal fase caracteriza-se pelo tratamento dos dados coletados e sua confrontação com a análise *a priori*, o que permite analisar os principais resultados em relação à questão de pesquisa e retomar o problema, com uma síntese das conclusões.

4 CONTEXTO DA PESQUISA E ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Os dados aqui apresentados são parte de uma pesquisa de doutorado, que foi desenvolvida pela primeira autora, da qual participaram 16 alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do Rio Grande do Sul. O estudo de abordagem qualitativa, de natureza exploratória, do tipo estudo de caso, teve a ED como metodologia de pesquisa e de ensino. As quatro fases dessa metodologia se fizeram presentes no desenrolar da pesquisa.

A análise prévia foi realizada a partir da análise de documentos, em que foram considerados: documentos oficiais que tratam das diretrizes curriculares nacionais para os Cursos de Matemática, com o objetivo de compreender os princípios e fundamentos a serem observados na organização curricular dos cursos de Licenciatura em Matemática;

ementas de disciplinas de “Pré-Cálculo” e livros didáticos, a fim de selecionar os conteúdos a serem abordados na sequência didática.

Para completar a primeira fase da ED, foi aplicada uma avaliação diagnóstica, com o intuito de identificar os conhecimentos matemáticos prévios e/ou dificuldades dos participantes da pesquisa. Questões sobre equações, inequações e funções foram contempladas nessa avaliação.

A análise prévia possibilitou a escolha das variáveis de comando que fundamentaram a elaboração da sequência didática. Dentre elas, cita-se: a falta de conhecimento dos alunos em relação às operações algébricas, fatoração de expressões e produtos notáveis; a inabilidade na resolução de inequações; a incompreensão do conceito de função; o não reconhecimento da importância dos sistemas semióticos no processo de aprendizagem e as dificuldades na conversão entre os registros em língua natural, algébrico e gráfico.

Após determinação dessas variáveis, partiu-se para a concepção da sequência didática. Nesta etapa, teve-se a preocupação de diversificar o máximo possível os registros de representação semiótica com o intuito de favorecer a produção de tratamentos e conversões de que trata a TRRS. A sequência foi composta por 20 atividades que abordam conceitos básicos de matemática, necessários para a aprendizagem do CDI-I. Essas foram organizadas em quatro blocos, cada um com objetivos específicos, a saber: construir o conceito de função; explorar as funções afins e quadráticas; trabalhar com as funções polinomiais e racionais; e examinar as funções exponenciais e logarítmicas. A análise *a priori* foi realizada nesta etapa.

A experimentação ocorreu ao longo do segundo semestre de 2017. As atividades foram desenvolvidas em duplas ou trios, no período regular de aula da disciplina de Matemática Elementar. Foram nove encontros organizados com a previsão de momentos de socialização dos resultados e formalização dos conteúdos tratados. Os grupos foram designados por G1, G2, ..., G6. Todos os alunos aceitaram participar da investigação e, para tanto, assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido. A pesquisa foi submetida ao Comitê de Ética e Pesquisa, obtendo aprovação[1].

A análise *a posteriori* baseou-se nas produções dos grupos e nos registros do diário de campo. Tal ação foi realizada com base no método sugerido por Duval (2011), o qual estabelece uma tripla análise das produções dos alunos:

[1] Parecer consubstanciado nº 1.952.634.

a) Uma **análise matemática**, em termos da validade do encaminhamento e do sucesso;
b) Uma **análise da compreensão**, ou seja, da aquisição pelos alunos em termos de autonomia e progressão;
c) Uma **análise das razões**, seja de sucesso ou aquisição, seja de fracassos ou bloqueios, isto é, os fatores que foram ou não considerados na sequência didática.

Dessa forma, as produções dos alunos foram analisadas não apenas em função dos conhecimentos que eles deviam mobilizar para resolver a atividade, mas também, em função dos registros que a resolução sugeria mobilizar de forma coordenada. Para isso, foi necessário decompor a resolução das atividades em conversões e em tratamentos, segundo os registros mobilizados.

Assim, na análise matemática foram observados os tratamentos utilizados na resolução, a fim de identificar se a atividade foi resolvida corretamente ou não e quais os fatores que contribuíram para isso. Na análise da compreensão, observou-se a mobilização de registros, pois, de acordo com Duval (2011), o processo cognitivo realizado para compreender a matemática mobiliza pelo menos dois registros de representação.

Na análise das razões, procurou-se as razões dos fatores como: sucesso, fracassos, aquisição, bloqueios, que foram ou não considerados na resolução das atividades. Para isso, analisou-se as resoluções e as tentativas de resoluções, as construções no software GeoGebra, as anotações do diário de campo, bem como a natureza dos registros mobilizados durante a resolução.

Esta tripla análise apresenta duas vantagens metodológicas:

> Ela permite analisar com precisão não apenas tudo o que um aluno faz, diz ou tenta, mas igualmente tudo o que ele não faz, ou o que ele não observa mesmo no que ele faz. Ela permite, em seguida, comparar as produções de um mesmo aluno em problemas que mobilizam conhecimentos matemáticos muito diferentes (Duval, 2011, p. 149).

A análise *a posteriori* da sequência didática foi desenvolvida com base neste método. Além disso, foi estabelecida sua comparação com a análise *a priori;* de modo a validar/ refutar as hipóteses, nela levantadas. Tal metodologia de análise possibilitou identificar contribuições das representações semióticas para a compreensão de conceitos matemáticos necessários para a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I.

5 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta seção, ilustra-se a sequência didática, por meio de quatro atividades desenvolvidas no terceiro bloco, o qual teve a interpretação de gráficos, a fatoração de expressões algébricas e a resolução de inequações, como principais objetivos. Seu desenvolvimento se deu em dois encontros. No final de cada um deles ocorreu um momento de socialização, onde os resultados foram postos em discussão.

A seguir, apresentam-se as atividades seguidas de suas análises *a priori* e *a posteriori*. Na análise *a priori,* exibem-se os objetivos da atividade, as expectativas quanto ao comportamento dos alunos frente a ela, bem como possíveis dificuldades e facilidades na compreensão dos conceitos visados. A análise *a posteriori,* que foi realizada com base na tripla análise sugerida por Duval (2011), foi descrita estabelecendo-se sua comparação com a análise *a priori*. No Quadro 1 estão apresentadas as atividades.

Quadro 1: Apresentação das Atividades.

Atividade 1

Considere o seguinte problema: uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço retangular de papelão com dimensões $12\,cm$ por $20\,cm$. Para isso, deve-se cortar quadrados de lados x de cada canto e depois dobrar para cima os lados.

a) Encontre a expressão que relaciona o volume V da caixa com a medida de x.
b) Qual é o domínio da função V? Para quais valores de x o volume é zero?
c) Como devemos cortar os quadrados para que o volume da caixa seja o maior possível?

Atividade 2

Abra o arquivo "atividade2.ggb[2]" do GeoGebra, e observe o gráfico que representa a resposta do crescimento de uma planta (em cm) à adição de uma quantidade de fertilizante (g/ha).

a) Quais são as variáveis relacionadas no gráfico? Qual é a variável dependente e a independente?
b) Indique o valor de $h(0)$ e $h(20)$ e explique o significado desses valores.
c) Qual é o domínio da função? Qual o seu significado no contexto da atividade?
d) Qual é a imagem da função? Qual o seu significado no contexto da atividade?
e) O que acontecerá com a planta se colocamos uma quantidade muito grande de fertilizante?
f) Habilite a "Janela de Álgebra" e verifique qual expressão algébrica representa a função. Utilize essa expressão para justificar a resposta dada ao item anterior.
g) Como você explicaria a presença da reta pontilhada na representação do GeoGebra? Você sabe que denominação ela recebe?

Atividade 3

a) Construa**,** no GeoGebra, o gráfico da função $g(x) = \frac{1}{x-2} - 1$.
b) No gráfico de g, existe algum ponto cuja ordenada é igual a 1? Em caso afirmativo, localize este ponto.
c) Localize, no gráfico de g, os pontos cuja ordenada é maior do que 1. Descreva estes pontos algebricamente.
d) Localize, sobre o eixo horizontal, as abscissas dos pontos que fazem parte da resposta do item (c). Descreva algebricamente estes valores.
e) Resolva a inequação $g(x) > 1$. Existe alguma relação entre a solução dessa inequação e a resposta dada no item (d)? Explique.
f) Localize, no gráfico de g, os pontos cuja ordenada é menor do que -1. Descreva estes pontos algebricamente.
g) Localize, sobre o eixo horizontal, as abscissas dos pontos que fazem parte da resposta do item (f).

[2] Disponível em: https://www.geogebra.org/upload/5c77faf3b273d

Descreva algebricamente estes valores.

h) Resolva a inequação $g(x) < -1$. Existe alguma relação entre a solução dessa inequação e a resposta dada no item (g)? Explique.

i) Resolva a inequação $\frac{1}{x-2} - 1 \leq 3$.

Atividade 4

Considere a função $f(x) = \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-5x+6}$.

a) Qual é o domínio dessa função? Justifique sua resposta.

b) Represente graficamente a função f.

c) Resolva algebricamente a inequação $\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-5x+6} \leq -2$.

Fonte: Elaborado pelo autor

5.1 Análise *a priori* das atividades

As atividades 1 e 2 reforçam conceitos referentes a funções como: domínio, imagem, variável dependente e independente e o próprio conceito de função, abordados nos blocos anteriores. A atividade 1 explora, ainda, os pontos extremos de uma função polinomial de terceiro grau e pretende chamar a atenção para a equivalência das expressões $(12-2x)(20-2x)x$ e $4x^3 - 64x^2 + 240x$, visto que na avaliação diagnóstica os alunos demonstraram dificuldades em relação à fatoração algébrica. Seu registro de partida é a língua natural e seu processo de resolução envolve, além desse, a mobilização dos registros algébrico e gráfico, sendo esse último, o registro no qual o aluno poderá identificar mais facilmente as coordenadas do ponto de máximo, ou seja, o registro que tem o menor custo cognitivo para o aluno, já que ele não conhece as técnicas do Cálculo Diferencial. Acredita-se que, após a resolução e discussão dos blocos anteriores, os alunos irão conseguir responder o que se pede sem grandes dificuldades.

Na atividade 2, além dos conceitos já citados, é abordada a noção de assíntota horizontal, que é um objeto matemático de extrema importância no estudo de limites. Sua resolução exige a leitura e interpretação do registro gráfico e requer, em boa parte, o uso da língua natural. Desta forma, visa-se ampliar a capacidade dos alunos de interpretação e comunicação. Nesta atividade, é possível que surjam dificuldades para explicar a presença da assíntota horizontal, pois esse conceito raramente é enfocado no Ensino Médio.

A atividade 3 visa a interpretação de gráficos e a resolução de inequações com uma incógnita. Nela, explora-se, além da resolução algébrica, a resolução gráfica de inequações, a qual requer: o reconhecimento das funções envolvidas, o traçado dos gráficos dessas funções, a localização dos pontos do gráfico que vão gerar as soluções da inequação e a projeção desses pontos no eixo horizontal. Do ponto de vista cognitivo, é preciso realizar conversões entre os registros algébrico e gráfico, seguidas de tratamentos. A intenção é chamar a atenção do aluno para a equivalência dos dois tipos de resolução.

No item (b), solicita-se a localização, sobre o gráfico de g, do(s) ponto(s) cuja ordenada é 1. Para isso, o aluno deve deslizar o olhar no sentido horizontal na altura 1 para chegar ao ponto desejado do gráfico. Tal ponto favorecerá a resolução do item (c), no qual é solicitada a localização dos pontos com ordenada maior do que 1. Na descrição algébrica destes pontos, item (d), espera-se que os alunos escrevam algo do tipo (x, y) tal que $2 < x < 2{,}5$ e $y > 1$.

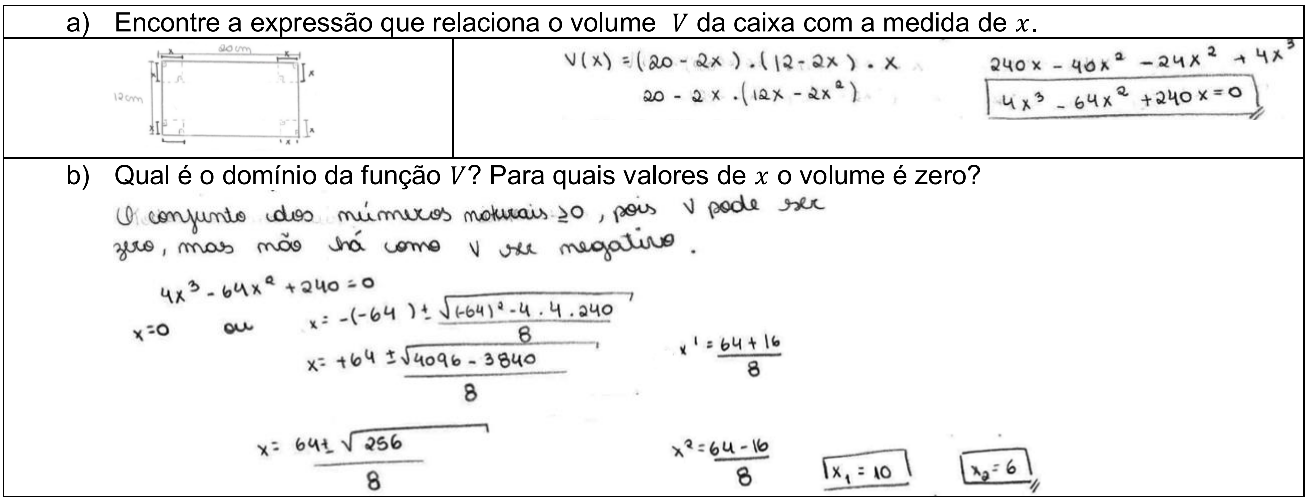
Nos itens (f), (g) e (h), a discussão gira em torno dos pontos que têm ordenada menor ou igual que -1. Aqui, a diferença é que não existe nenhum ponto com essa ordenada. Com isso, deseja-se que o aluno identifique a unidade básica gráfica (assíntota vertical) e que possa interpretar e responder de forma correta esses itens. O último item, requer a solução de uma inequação. Neste momento, é esperado que o aluno apresente as resoluções gráfica e algébrica, com o propósito de comparar os resultados e, em caso de divergência entre eles, corrigir erros cometidos.

A atividade 4 visa a fatoração algébrica e a resolução de inequações. Elas se fazem necessárias, uma vez que investigações realizadas com calouros de CDI, das quais citam-se Cury (2009, 2013), mostram que a maior parte dos erros, na resolução de questões de Cálculo, é decorrente de problemas com simplificação de expressões algébricas, fatoração, produtos notáveis e resolução de equações e inequações.

Sendo assim, decidiu-se apresentar, na atividade 4, a função $f(x) = \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-5x+6}$. O aluno, num primeiro momento, deverá informar que seu o domínio é $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 2 \text{ e } x \neq 3\}$. Em seguida, deverá representá-la graficamente, utilizando o *software* GeoGebra. Analisando o gráfico, ele poderá inferir, de forma incorreta, que o domínio da função é $\mathbb{R}-\{3\}$. Do mesmo modo, poderá responder que $]-\infty, -3] \cup [2,3[$ representa a solução de $\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-5x+6} \leq -2$. Com isso, pretende-se chamar a atenção a respeito dos obstáculos que surgem no uso de recursos computacionais. Acredita-se que os alunos poderão ter dificuldades na resolução da inequação do item (c).

5.2 Análise *a posteriori* das atividades

Ao contrário do que se esperava, na análise das produções relativas à atividade 1, identificou-se alguns equívocos e/ou incompreensões, conforme mostra o protocolo do grupo G2 (Figura 1).


a) Encontre a expressão que relaciona o volume V da caixa com a medida de x.

20 cm
12cm
x

$V(x) = (20-2x).(12-2x).x$

$20 - 2x.(12x - 2x^2)$

$240x - 40x^2 - 24x^2 + 4x^3$

$\boxed{4x^3 - 64x^2 + 240x = 0}$

b) Qual é o domínio da função V? Para quais valores de x o volume é zero?

O conjunto dos números naturais ≥0, pois V pode ser zero, mas não há como V ser negativo.

$4x^3 - 64x^2 + 240 = 0$

$x = 0$ ou $x = \frac{-(-64) \pm \sqrt{(-64)^2 - 4.4.240}}{8}$

$x = \frac{+64 \pm \sqrt{4096 - 3840}}{8}$

$x = \frac{64 \pm \sqrt{256}}{8}$

$x' = \frac{64+16}{8}$

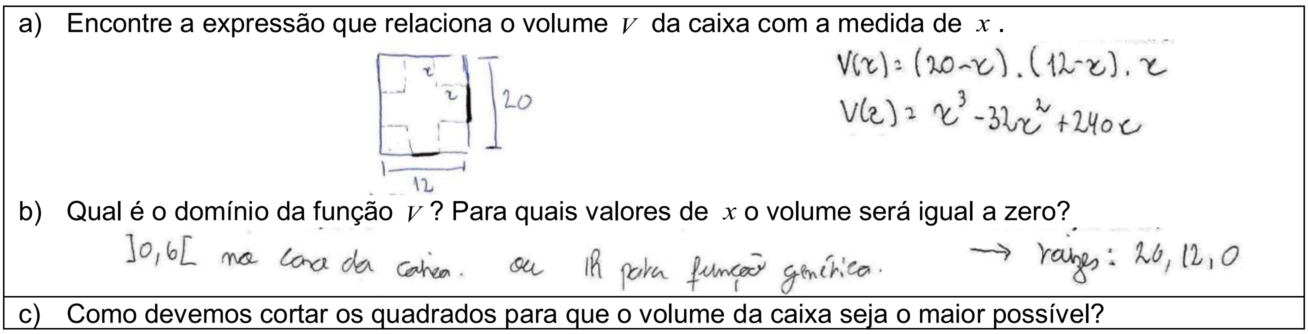
$x'' = \frac{64-16}{8}$

$\boxed{x_1 = 10}$ $\boxed{x_2 = 6}$

Figura 1: Resoluções referentes à atividade 1 apresentadas por G2.
Fonte: Dados da pesquisa.

Pela Figura 1, percebe-se que G2 realiza, de forma correta, as conversões entre os registros em língua natural, figural e algébrico, bem como os tratamentos algébricos necessários para encontrar a expressão que representa o volume da caixa, mas comete alguns lapsos, tais como: igualar a expressão a zero, trocar o domínio pela imagem e o conjunto dos números reais pelos naturais.

O grupo G6, por sua vez, não teve êxito ao determinar a lei de formação da função volume, como é possível observar na Figura 2.


a) Encontre a expressão que relaciona o volume V da caixa com a medida de x .

x
x
20
12

$V(x) = (20-x).(12-x).x$

$V(x) = x^3 - 32x^2 + 240x$

b) Qual é o domínio da função V ? Para quais valores de x o volume será igual a zero?

]0,6[na cara da caixa. ou IR para função genérica. → raízes: 20, 12, 0

c) Como devemos cortar os quadrados para que o volume da caixa seja o maior possível?

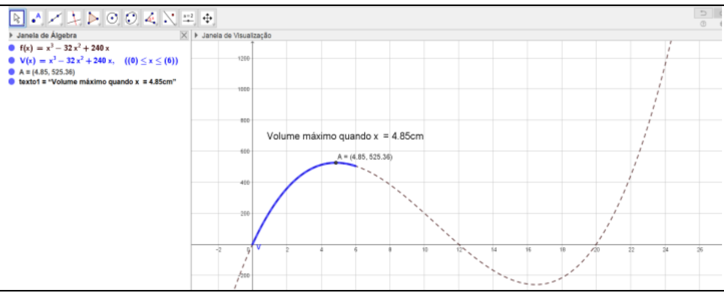


Figura 2: Resoluções referentes à atividade 1 apresentadas por G6.
Fonte: Dados da pesquisa.

Nota-se, pela Figura 2, que no item (a) G6 cometeu um equívoco na conversão do registro figural para o algébrico. Contudo, apesar do registro gráfico não representar o volume da caixa, em razão dos desacertos cometidos, o grupo demonstra a compreensão do significado de domínio de uma função, uma vez que identifica este objeto no contexto da situação proposta, e representa-o corretamente nos registros simbólico e gráfico. Os demais grupos, resolveram a atividade 1, de forma satisfatória.

Quanto à atividade 2, como previsto na análise *a priori,* os alunos, de um modo geral, não tiveram dificuldades para identificar o domínio, a variável dependente e a independente, bem como para explicar o significado dessas variáveis no contexto do problema, ou seja, demonstraram facilidade no tratamento gráfico. Contudo, o grupo G3 não percebeu de imediato qual era a imagem da função. Tal grupo, num primeiro momento, considerou a imagem como sendo "*todos os reais não negativos",* erro que foi corrigido após a resolução do item (e).

Cabe destacar que o registro gráfico é o que possui o menor custo cognitivo na resolução da atividade 2, uma vez que facilita o entendimento de como ocorre o crescimento da planta, em resposta à adição de fertilizante; o que seria mais difícil com a utilização do registro algébrico. Tal fato corrobora a afirmação de Duval (2009) quando destaca que a diversidade de registros de representação oferece a possibilidade de "escolher" o registro com o qual os tratamentos serão efetuados com maior facilidade, ou seja, com o menor custo cognitivo.

No item (f), após verificar que $h(x) = \frac{20x}{x+5}$ é a expressão que representa a altura da planta, os grupos, de modo geral, atribuíram para x valores representados por potências de 10, tratamento algébrico, com os quais mostraram que quando x assume um valor muito grande, a altura da planta se aproxima de $20\ cm$, confirmando a informação exibida pelo registro gráfico. Por fim, no item (g), apesar de não informar que a "reta pontilhada" representa uma assíntota horizontal da função, todos os grupos fizeram uma interpretação positiva para a noção intuitiva de limite de uma função. Como exemplo, transcreve-se a resposta do grupo G5, *“A reta pontilhada mostra que existe um limite para a altura da planta, pois por mais que se aumente a quantidade de fertilizante, a planta não atingirá 20 cm de altura”.*

Na atividade 3, os alunos, de modo geral, demonstraram facilidade em realizar os tratamentos gráficos necessários para localizar os pontos desejados e responder o que havia sido solicitado. Na Figura 3, é mostrada a construção realizada por G3, que exibe a solução dos itens (b), (c) e (d):

b) No gráfico de g, existe algum ponto cuja ordenada é igual a 1? Em caso afirmativo, localize este ponto.
c) Localize, no gráfico de g, os pontos cuja ordenada é maior do que 1. Descreva estes pontos algebricamente.
d) Localize, sobre o eixo horizontal, as abscissas dos pontos que fazem parte da resposta do item (c). Descreva algebricamente estes valores.

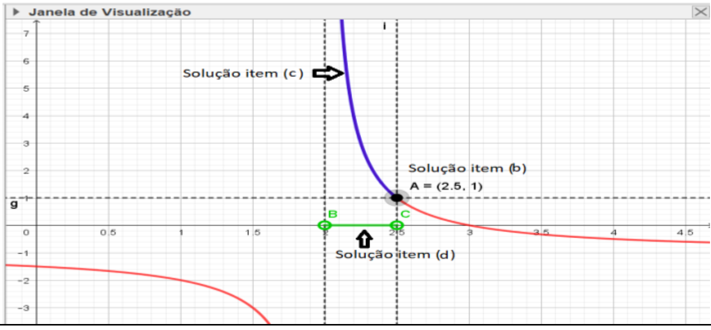


Figura 3: Tela referente à atividade 3, contendo a construção de G3.
Fonte: Dados da pesquisa.

Pela Figura 3, é possível perceber que os alunos reconheceram as unidades de sentido do registro em língua natural (abscissa, ordenada, eixo horizontal ...) no registro gráfico e localizaram as variáveis visuais pertinentes ao gráfico (retas horizontais, verticais e pontos de interseção) que dão condições de resolver, graficamente, as inequações propostas. Contudo, eles alunos demonstraram dificuldades na resolução algébrica. O item (i) foi o que causou maiores dificuldades. Somente os grupos G4 e G5 conseguiram resolvê-lo, de imediato. Na Figura 4, apresenta-se a resolução de G5.

i) Resolva a inequação $\frac{1}{x-2} - 1 \leq 3$.

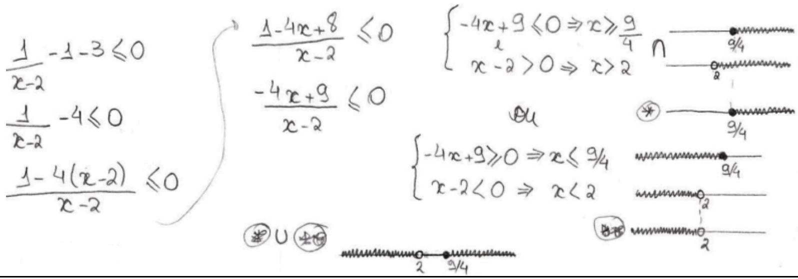


Figura 4: Resolução do item (i) da atividade 3, apresentada por G5.
Fonte: Dados da pesquisa.

Quatro grupos apresentaram dificuldades na resolução do item (e) e três na resolução do item (h). Na Figura 5 são exibidas as resoluções dos itens (d) e (e), apresentadas por G3.

d) Localize, sobre o eixo horizontal, as abscissas dos pontos que fazem parte da resposta do item (d). Descreva algebricamente estes valores.

[2,5 , 2[

e) Resolva a inequação $g(x) > 1$. Existe alguma relação entre a solução dessa inequação e a resposta dada no item (d)? Explique.

$\frac{1}{x-2} \cdot 1 > 1$

$\frac{1}{x-2} > 2$

$1 > 2x - 4$

$5 > 2x$

$\boxed{x > 2{,}5}$

É onde inicia o domínio de x para pontos que tem ordenada maior do que 1.

Figura 5: Resoluções dos itens (d) e (e) da atividade 3, apresentadas por G3.
Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo G3 representou de forma satisfatória, no registro gráfico, o intervalo nos quais estão localizadas as abscissas dos pontos cuja ordenada é maior do que 1, como é possível verificar na Figura 3; porém, cometeu um equívoco ao representá-lo algebricamente, conversão do registro gráfico para o algébrico, como observa-se na Figura 5. Tal equívoco, ao que parece, levou o grupo a acreditar que a resolução algébrica da inequação $g(x) > 1$ estava correta, uma vez que, durante a experimentação, os alunos afirmaram que a resposta da resolução algébrica tinha coincidido com a *"resposta do gráfico".*

Por outro lado, vários alunos manifestaram preocupação com a não equivalência das respostas obtidas pelas resoluções gráfica e algébrica das inequações. No entanto, na análise dos protocolos percebeu-se que G3 e G6 não conseguiram identificar o erro que causou a tal divergência.

O grupo G6 cometeu o mesmo erro na resolução das três inequações, qual seja a "multiplicação em cruz". Contudo, durante a aplicação, os participantes deste grupo afirmaram, sem hesitar, que as resoluções estavam incorretas. Quando questionados a respeito de tal afirmação, eles apontaram para a tela do computador mostrando as soluções gráficas e alegando que não sabiam o que haviam feito de errado, na resolução algébrica. Os grupos G1 e G2, ao resolverem o item (e), cometeram o mesmo equívoco que G6, mas, ao contrário desse, conseguiram corrigi-lo.

Ainda em relação à atividade 3, destaca-se que apenas dois grupos resolveram de imediato o item (i). Dois equívocos foram cometidos na resolução desse item: o uso incorreto da técnica da "multiplicação em cruz" e a multiplicação de uma inequação por -1 sem alterar o sinal da desigualdade, encontradas nos protocolos dos grupos G1 e G2. Contudo, ao resolverem graficamente a inequação, os dois grupos perceberam o erro cometido, corrigindo-o, naquele momento.

Após a aplicação da atividade 3, ocorreu um momento de socialização. Na ocasião, foram discutidos os princípios aditivo e multiplicativo das desigualdades, na tentativa de esclarecer as dúvidas que surgiram na resolução das inequações. Além disso, foram exploradas a ideia intuitiva de limite e as noções de assíntota vertical e horizontal. As discussões proporcionadas pelas três atividades despertaram o interesse da maior parte dos alunos e, assim, foram bastante produtivas.

Na atividade 4, os alunos facilmente encontraram o domínio da função f. As primeiras discussões giraram em torno da representação gráfica fornecida pelo GeoGebra. Os alunos buscavam compreender por que não havia "um furo" na curva que representa tal função, já que $x = 2$ não pertence ao domínio da função. Neste momento, foi sugerido que eles traçassem, na mesma tela, a reta $x = 2$ e que usassem a ferramenta "Interseção de Dois Objetos", do GeoGebra, a fim de identificar o ponto de interseção entre a reta e a curva que representa a função. A informação obtida, por meio do *software*, foi que tal ponto é indefinido. Com isso, os alunos perceberam que a ausência do "furo" ocorreu devido a limitações do recurso computacional.

Num segundo momento, os alunos manifestaram dificuldades na resolução da inequação $\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-5x+6} \leq -2$, como havia sido previsto. Embora tivessem resolvido graficamente tal inequação, nenhum grupo conseguiu, de imediato, realizar os tratamentos algébricos, necessários para resolvê-la. Convém destacar que, com exceção de G3, os grupos não tiveram dificuldades para encontrar a inequação equivalente $\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^2-5x+6} \leq 0$, o que já indica certo avanço; porém, não conseguiram resolver essa última, pois não enxergaram uma forma que permitisse fatorar a expressão do numerador.

Passados alguns minutos, percebeu-se que G5 havia representado graficamente a função polinomial $y = x^3 - x^2 - 8x + 12$, encontrando, assim, as raízes da equação. Conhecidas tais raízes, por tentativa e erro, os alunos descobriram a forma fatorada da expressão. Cabe destacar que a utilização do GeoGebra foi fundamental para que eles pudessem perceber a equivalência entre $x^3 - x^2 - 8x + 12$ e $(x-2)^2(x+3)$ o que, por sua vez, possibilitou a resolução algébrica da inequação. O grupo G5 foi o único que concluiu a resolução do item (c).

Decorrido o tempo concedido para a realização da atividade 4, ela foi posta em discussão no grande grupo. Na ocasião, os alunos solicitaram a explicação do item (c). O grupo G5 se prontificou para explicar como havia resolvido. Para isso, seus participantes exibiram a construção realizada no GeoGebra. Através da exploração visual, proporcionada pelo registro gráfico, mostraram a equivalência das expressões $x^3 - x^2 - 8x + 12$ e $(x-2)^2(x+3)$ e, em seguida, apresentaram a resolução da inequação proposta.

A partir desta exposição, foi conduzida a discussão de como fatorar um polinômio de grau maior ou igual a três, sem o auxílio do registro gráfico. Um aluno afirmou que era preciso utilizar Briot Ruffini, mas que não lembrava do método. Naquela ocasião, tal método foi exposto e, aproveitando a construção exibida por G5, tratou-se das raízes de multiplicidade par e ímpar, do Teorema do Valor Intermediário e da divisão de polinômios.

Para finalizar as análises das atividades, apresenta-se a seguir uma síntese da tripla realizada.

- Com relação à **Análise Matemática:** nas atividades do bloco 3, foram encontrados alguns itens em branco, bem como algumas respostas incorretas; contudo, em menor número, se comparadas com os blocos anteriores. Para respondê-las, diversas vezes, os alunos precisaram ler e interpretar gráficos, o que foi realizado sem grandes dificuldades. Por outro lado, os tratamentos algébricos, solicitados na resolução de inequações, geraram alguns desconfortos e muitas discussões; já que, por vezes, apresentaram soluções distintas daquelas obtidas por meio da resolução gráfica.
- Com relação à **Análise da Compreensão:** os processos de resolução das atividades mobilizaram os registros algébrico (RAl), gráfico (RGr), figural (RFg), numérico (RNm) e língua natural (RLN). Ocorreram as conversões RLN$\rightarrow$RFg, RFg$\rightarrow$RAl, RGr$\rightarrow$ RLN, RAl$\rightarrow$RNm, RGr$\leftrightarrow$RLNe RAl$\leftrightarrow$RGr; sendo as últimas realizadas com o auxílio do *software GeoGebra*. A forma espontânea, como foram efetuadas boa parte delas, indicou avanços no que se refere à leitura e à interpretação dos gráficos, à compreensão do significado de domínio e na percepção das implicações desse, no gráfico da função. Em relação à fatoração de expressões algébricas e à resolução de inequações, foram percebidos avanços, mas também alguns bloqueios.
- Com relação à **Análise da Razão:** os avanços observados no bloco 3 foram atribuídos à "escolha" do registro com menor custo cognitivo para o aluno, ao uso do *software GeoGebra* e à realização e socialização das atividades dos blocos anteriores. Não se

pode deixar de citar que os avanços foram favorecidos pelo enfrentamento das tarefas e pelo diálogo com os colegas e com a professora. Em contrapartida, a internalização, por boa parte dos alunos, de algumas "regras" em relação à Álgebra, como "multiplicar em cruz" foi a principal causadora dos insucessos observados.

Concluída a análise das atividades, na seguinte seção, finaliza-se este artigo apresentando algumas considerações que se entende como pertinentes a partir do estudo realizado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa abordou a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. A motivação para sua realização foi a importância de minimizar algumas lacunas de formação básica dos referidos alunos, a fim de possibilitar a aprendizagem dos conceitos do CDI-I, bem como prepará-los para a futura atuação docente.

O estudo consistiu em investigar as contribuições das representações semióticas para a compreensão de conceitos matemáticos necessários para a aprendizagem do CDI-I. Com vistas a atingir tal objetivo, a ED foi adotada. A última etapa desta metodologia, validação, será descrita a seguir apresentando os principais resultados encontrados.

Com a análise das atividades propostas, foi possível constatar que, de modo geral, os alunos demonstraram: a compreensão do conceito de função e uma melhor desenvoltura na leitura e interpretação de gráficos; uma melhor compreensão do conceito de domínio e das implicações desse, no gráfico da função; uma maior habilidade em operar com o registro em língua natural e em aplicá-lo na resolução das atividades; alguns avanços em relação aos produtos notáveis, à fatoração, à simplificação de expressões algébricas e aos princípios das desigualdades; e o entendimento da noção intuitiva de limite.

Diante dessas constatações, assegura-se que os alunos, em boa parte, apresentaram evoluções significativas. Conclui-se, então, que esta Engenharia Didática, minimizou dificuldades oriundas da Educação Básica, de alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática. Assim, considerando que os processos de ensino e de aprendizagem do CDI-I apoiam-se em conteúdos matemáticos tratados na Educação Básica, acredita-se que a questão que norteou esta pesquisa – Quais as contribuições das representações semióticas para a compreensão de conceitos matemáticos necessários para a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I por alunos de um curso de licenciatura em Matemática? – foi respondida.

Por fim, espera-se que este estudo possa contribuir para uma reflexão sobre a teoria adotada, uma vez que as pesquisas analisadas revelam uma carência de trabalhos que utilizam os registros de representação semiótica, na perspectiva da formação de professores.

REFERÊNCIAS

Artigue, M. (1995). Ingeniéria didática**.** In M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gomez. (Eds.), *Ingeniéria didatica en Educacion Matemática.* (pp. 33-61). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.

Colombo, J. A. A., Flores, C. R. & Moretti, M. T. (2008). Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. *Zetetiké*, *v. 16* (29), 41-72.

Cury, H. N. (2009). Pesquisas em análises de erros no ensino superior: retrospectiva e resultados. In M. C. R. Frota & L. Nasser. (Eds.), *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Recife: SBEM.

Cury, H. N. (2013, julho). Análise de erros: uma possibilidade de trabalho em cursos de formação inicial de professores. In *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas.* (pp. 1-15). Curitiba, PR. Recuperado de http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/75_27_ID.pdf

Duval, R**.** (2009). *Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.* Trad. Levy, L. F. & Silveira, M. R. A. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Duval, R**.** (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas.* São Paulo: PROEM.

DUVAL, R**.** (2013). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In S. D. A. Machado. *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica* (pp. 11-33). Campinas: Papirus.

Ferreira, R. A., Santos, C. A. B. & Curi, E. (2013). Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os Registros de Representação Semiótica. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*. Recuperado de *https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2235*

Nasser, L., Sousa, G. A. & Torraca, M. A. (2012, outubro). Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo? In Anais do V SIPEM

Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. (pp. 1-18). Petrópolis, RJ. Recuperado de http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/files/v_sipem/PDFs/GT04/CC185950067

Pais, L. C. (2005). *Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Transição para o ensino superior: um estudo de caso sobre as contribuições das representações semióticas

Vânia Bolzan Denardi
Doutora em Ensino de Ciências e Matemática
Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Matemática, Santa Maria, Brasil
vania_denardi@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0100-4559

Eleni Bisognin
Doutora em Matemática
Universidade Franciscana, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria, Brasil.
eleini@ufn.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-3266-6336

Endereço de correspondência do principal autor
Avenida Pascoal Gomes Librelotto, 132. CEP 97065-290, Santa Maria, RS, Brasil.

AGRADECIMENTOS
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: V. B. Denardi, E. Bisognin
Coleta de dados: V. B. Denardi
Análise de dados: V. B. Denardi
Discussão dos resultados: V. B. Denardi
Revisão e aprovação: E. Bisognin

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
A pesquisa foi submetida ao Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) e obteve aprovação, segundo parecer consubstanciado nº 1.952.634.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 05-01-2021 – Aprovado em: 26-05-2021