REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O USO DOS EXPERIMENTOS MENTAIS COMO POSSÍVEL METODOLOGIA DE ENSINO DA MATEMÁTICA: UM OLHAR EPISTEMOLÓGICO

The Use Of Thought Experiment As A Possible Methodology For Teaching Mathematics: An Epistemological Vision

Willian José da **CRUZ**
Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil
Williancruz990@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7509-1021

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Este artigo faz parte dos resultados da pesquisa teórica *Semiótica e os Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem em Matemática*. O objetivo deste texto é apresentar as características dos Experimentos Mentais, no intuito de externá-los como uma possível metodologia para o ensino de Matemática. Para alcançarmos tal objetivo, empreendemos um caminho metodológico que buscou analisar livros textos, artigos e outras fontes, as quais nos permitiram interpretar os aspectos epistemológicos do conhecimento matemático e sua ressonância no ensino. Essas interpretações nos conduziram ao entendimento de quão é importante a aplicação dos Experimentos Mentais no desenvolvimento de uma dada atividade ou prova matemática, no processo de ensino e de aprendizagem desta ciência. Experimentos Mentais são formas que o sujeito tem de colocar seus próprios pensamentos, ancorados a um contexto bem definido, por meio de uma representação, como objeto de consideração numa dada prova e/ou atividade matemática.

Palavras-chave: Epistemologia, Cognição, Educação Matemática

ABSTRACT

This article is part of the results of the theoretical research *Semiotics and the Thought Experiments in teaching and learning in mathematics*. The objective of this text is to present the characteristics of the Thought Experiments, in order to externalize them as a possible methodology for the teaching of Mathematics. In order to achieve this objective, we have undertaken a methodological path that has sought to analyze textbooks, articles and other sources, which have allowed us to interpret the epistemological aspects of mathematical knowledge and its resonance in teaching. These interpretations led us to understand how important it is to apply thought experiments in the development of a given activity or mathematical proof in the process of teaching and learning this science. Thought Experiments are ways in which the subject has to place his own thoughts, anchored to a well-defined context, through a representation, as the object of consideration in a given mathematical proof and/or activity.

Keywords: Epistemology, Cognition, Math Education

1 INTRODUÇÃO

A epistemologia é a chave para o estudo do conhecimento, em especial do conhecimento matemático. Esta ciência tem o papel de escrever, em termos filosóficos, a relação entre o sujeito epistêmico, isto é, o sujeito social que compartilha e debate hipóteses e o objeto. Por meio da afirmação axiomática *você não resolve nenhum problema da filosofia da Matemática, se não estiver admitindo um ponto de vista genético* é que enredamos este artigo. Alguns afirmam que podemos definir coisas, no entanto, uma definição é apenas a substituição de uma realidade por uma descrição.

Kant eliminou a metafísica de seus estudos e assumiu a epistemologia. A própria revolução copernicana deu ênfase ao sujeito na busca de sua objetividade. A objetividade de Kant está baseada no conhecimento do sujeito e na relação com a realidade, isto é, o conhecimento é determinado pelas atividades das pessoas.

Com esta visão epistemológica para o ensino e a aprendizagem em Matemática, este texto, como parte dos resultados da pesquisa teórica *Semiótica e os Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem em Matemática*[1], tem como objetivo apresentar as características dos Experimentos Mentais, no intuito de externá-los como uma possível metodologia para o ensino de Matemática.

Para tal empreendimento, desenvolvemos um caminho metodológico que buscou analisar livros textos, artigos e outras fontes, as quais nos permitiram interpretar os aspectos epistemológicos do conhecimento matemático e sua ressonância no ensino. Essas interpretações nos conduziram ao entendimento de quão é importante a aplicação dos Experimentos Mentais no desenvolvimento de uma dada atividade ou prova matemática, no processo de ensino e de aprendizagem desta ciência.

A nossa compreensão sobre o que poderia vir a ser uma metodologia de ensino, se ancora em Manfredi a qual afirma que

> O conceito de metodologia do ensino, tal como qualquer outro conhecimento, é fruto do contexto e do momento histórico em que é produzido. Sendo assim, talvez não exista apenas um conceito geral, universalmente válido e ahistórico de metodologia, mas sim vários, que têm por referência as diferentes concepções e práticas educativas que historicamente lhes deram suporte (1993, p.1).

Assumimos a concepção histórico-dialética da educação, com um olhar para epistemologia, em que “o próprio conceito de metodologia e/ou didática é histórico-social,

[1] Esta pesquisa está cadastrada na Pró-reitoria de Pós-graduação e Pesquisa da UFJF.

portanto, tem tudo a ver com o momento e contextos históricos dos quais é produto, bem como dos projetos, concepções e ideologias que lhe deram origem” (Manfredi, 1993, p. 4). Manfredi afirma que a dimensão epistemológica,

> nos remete a reflexões para definir diretrizes relativas: a como se produz o conhecimento, numa perspectiva dialética; à lógica inerente a esse processo; a quem produz esse conhecimento; às diferenças entre o chamado saber popular e o saber sistematizado; ao tipo de relações existentes entre as diferentes formas de conhecimento; à importância e o sentido da teoria, numa perspectiva de uma educação crítica e consciente; ao que significa dizer que o processo de produção de conhecimento possui um aporte individual e sócio cultural; o que todas estas questões têm a ver com o problema da escolha e organização dos conteúdos a serem trabalhados durante o processo de ensino-aprendizagem (1993, p. 5).

D’Ambrosio escreve que “o valor da teoria se revela no momento em que ela é transformada em prática (1986, p. 43). Esta discussão surge do fato de que há pouco aproveitamento dos reais benefícios que podem resultar de teorias que trazem um novo olhar para o que se ensina. As teorias se justificam na ação que ela desempenha no dia a dia da sala de aula. É no contexto da ação que entendemos que os Experimentos Mentais poderiam se configurar como uma possível metodologia de ensino contribuindo para entender que a Matemática é uma disciplina dinâmica e viva.

2 A EPISTEMOLOGIA EM KANT: A NECESSIDADE INCONDICIONADA DE JUÍZOS

Kant (B1)[2] afirma que todo conhecimento inicia-se com a experiência, mas ao mesmo tempo, ele afirma que existem conhecimentos que surgem independentes da experiência, isto é, eles não precisam ser efetivados na prática para se ter certeza de seus efeitos.

Kant disserta que:

> [...] poderia bem acontecer que mesmo o nosso conhecimento por experiência fosse um composto daquilo que recebemos por impressões e daquilo que a nossa própria faculdade de conhecimento (apenas movida por impressões sensíveis) produz por si mesma; uma soma que não podemos diferenciar daquela matéria básica enquanto um longo exercício não nos tenha tornados atentos a isso e aptos a efetuar tal distinção (Kant, B1).

[2] As citações das obras de Kant correspondem à forma recomendada pela Akademie-Ausgabe e adotada pela Sociedade Kant Brasileira. A base das citações neste texto é a obra “*Crítica da razão pura de 2013”,* traduzida por Fernando Costa Mattos.

Mas se existem conhecimentos independentes da experiência e a despeito de todas as impressões dos sentidos, “tais conhecimentos denominados a *priori* se diferenciam dos empíricos que tem fonte a *posteriori*, i. e. na experiência” (Kant, B2). Entende-se, portanto, que conhecimento a *priori* é aquele que se dá independente de qualquer experiência, se opondo ao conhecimento a *posteriori* que só são possíveis por meio da experiência.

Nos conhecimentos a *priori*, destacam-se aqueles denominados *puros*, por não existir nada de empírico neles. Kant nos oferece um exemplo para explicar esta classe de conhecimentos a *priori*, afirmando que “a proposição “toda mudança tem uma causa”, por exemplo, é uma proposição a *priori*, mas não é pura, porque a “mudança” é um conceito que só pode ser derivado da experiência” (Kant, B3).

“A Matemática e a Física são dois conhecimentos teóricos da razão que devem determinar seus objetos a *priori*” (Kant, BX), sendo que a Matemática apresenta esses objetos de forma inteiramente pura, enquanto a física de modo parcialmente puro. Kant escreve que:

> A Matemática entrou no caminho seguro da ciência já nos tempos mais antigos que a história da razão humana alcança, junto ao admirável povo grego. Mas não deve pensar que para ela foi tão fácil encontrar essa estrada real, ou antes pavimentá-la por si mesma, como foi para lógica, em que a razão só tem que lidar consigo mesma; acredito antes que ela permaneceu por muito tempo (sobretudo ainda entre os egípcios) num tatear às cegas, sendo tal transformação atribuível a uma revolução em que a feliz inspiração de um único homem, a partir de uma tentativa, gerou condições tais que o trajeto a ser seguido não seria mais errado, e o caminho seguro de uma ciência teria adentrado e estabelecido, de maneira infinita, para todos os tempos. No entanto, a lenda que nos foi transmitida por *Diógenes Laércio*, apontando o suposto descobridor dos menores elementos das demonstrações geométricas que, segundo o juízo comum, não necessitam de prova alguma, evidencia que a lembrança dessa modificação ocasionada pelo primeiro sinal de descoberta do novo caminho, deve ter parecido aos matemáticos da mais extrema importância e, assim, ter-se tornado inesquecível. Ao primeiro que demonstrou o triângulo isósceles (quer se chamasse Tales ou o que fosse) ocorreu uma luz; pois ele descobriu que não tinha de investigar aquilo que via numa figura, nem tampouco o conceito da mesma, para como que aprender assim as suas propriedades, mas sim produzi-las (por construção) a partir daquilo que ele mesmo, segundo conceitos, pensava e apresentava a *priori* na figura; e descobriu também que, para saber algo a *priori* com segurança, não deveria acrescentar nada à coisa a não ser aquilo que se seguisse necessariamente ao que ele próprio havia posto nessa coisa, em conformidade com seu conceito (Kant, BXI, BXII).

A filosofia Kantiana nos trouxe a ideia de juízos. Esses juízos podem ser conceituados como dizer algo de algo (Cruz, 2018). São proposições que relacionam sujeito e predicado. Para Kant, a ciência físico-matemática compõe-se de juízos (Cruz, 2018).

Kant classifica que essas proposições (ou juízos) se dão de dois modos: ou "o conceito de predicado está implicitamente contido no conceito de sujeito, ou o conceito de predicado está totalmente fora do conceito de sujeito, embora em ligação com ele" (Cruz, 2018, p.179). No primeiro caso, denominado de juízo analítico, há uma relação de identidade entre sujeito e predicado e no segundo, denominado de juízo sintético, não existe tal relação.

Os juízos analíticos são considerados juízos de explicação, já que não acrescentam nada ao conceito do sujeito, por meio do predicado. Kant exemplifica esses tipos de juízos com a afirmação "todos os corpos são extensos" (B11), classificando-a como juízo analítico, pois não precisa sair do conceito que liga a palavra corpo para verificar a conexão com a extensão (Kant, B11), isto é, a extensão é inerente ao corpo.

Os juízos sintéticos, por sua vez, são juízos de ampliação, pois "acrescentam um predicado ao conceito de sujeito" (Kant, B11), ou seja, a afirmação "todos os corpos são pesados" é um juízo sintético, pois o predicado é totalmente diverso do pensamento de corpo em geral, isto é, o predicado fornece um acréscimo ao conceito de corpo, o qualificando como pesado.

Kant (B16) afirma que os juízos matemáticos são todos sintéticos e a priori, os princípios da geometria são sintéticos, por exemplo, a proposição que diz que "a linha reta é a mais curta entre dois pontos é uma proposição sintética, pois o conceito de reta não contém nada relativo à quantidade, mas apenas uma qualidade" (Kant, B16) as proposições aritméticas são sintéticas, nas concepções deste autor.

Mas qual a importância de saber se um juízo é analítico ou sintético para estudar Matemática ou Educação Matemática? Uma resposta bem curta a esta questão seria: Alguém consegue ensinar Matemática sem saber o que é matemática? Alguém consegue ensinar geometria analítica, por exemplo, sem saber explicar a diferença entre a abordagem por axiomas e a abordagem por coordenadas? Mas precisamos refletir sobre outros aspectos.

3 AQUILES E A TARTARUGA: O PROBLEMA DE PLATÃO

A filosofia platônica acredita que a Matemática reflete a natureza interior do universo em termos de absolutas e imutáveis verdades. Podemos refletir sobre o *Mundo* que é, e tem sido, violento, confuso e em permanente mudança. Em contraste, nós *humanos* procuramos por clarividência, estabilidade, orientação e identidade de nós mesmos, isto é, procuramos autorreconhecimento.

Segundo Cassirer (1994), o conhecimento de si mesmo é a mais alta indagação filosófica reconhecida. Esse autor afirma que em todos os conflitos entre as distintas escolas filosóficas, esse objetivo permaneceu invariável. O autorreconhecimento é o primeiro requisito da auto-realização e, isto, pode nos permitir romper as cadeias que nos ligam ao mundo exterior para desfrutarmos de uma verdadeira liberdade.

O platonismo foi a primeira reação a essas situações contrastantes entre o mundo e o sujeito humano. Esta corrente filosófica ensina que a Diversidade, o Movimento e a Mudança não são reais, são somente aparências. O paradoxo de Zenão sobre a corrida entre Aquiles e a Tartaruga mostra bem essa visão.

O paradoxo de Zenão tem fontes indiretas e seus objetivos foram expostos no diálogo *Parmênides*, escrito por Platão. A filosofia de *Parmênides* concebia o mundo como imutável. Esta filosofia considerava que “não há movimento, não há mudança, não há nascimento nem morte, não há espaço nem tempo” (Roque, 2012. p.132). Os eleatas, por sua vez, caracterizavam o espaço como indivisível, defendendo também a permanência do ser no tempo, indicando a ausência de mudança. “Um dos procedimentos mais importantes da Matemática atual que pode ter herdado dos eleatas é a demonstração indireta, ou o raciocínio por absurdo” (Roque, 2012. p.132).

Platão teria disseminado um tipo de procedimento, influenciado por pensadores eleatas, na busca de um fundamento sólido para Matemática, sobre as bases da demonstração. Roque (2012) explana que encontrou alguns escritos, os quais mostram que os pitagóricos foram opositores ferrenhos de *Parmênides* e, por isso, Zenão de Eléia, um dos admiradores de *Parmênides*, teria enunciado seus paradoxos, no intuito de ridicularizar a doutrina pitagórica.

Tal tese é contestada por alguns historiadores, no entanto, os pitagóricos concebiam a noção de número como um ponto, ou seja, uma unidade indivisível, mas com espessura, isto é, número no sentido concreto (Roque, 2012). As coisas do mundo seriam constituídas, portanto, como pluralidade. Ademais, as séries numéricas para os pitagóricos apresentavam justamente a mudança, o que fornece um caráter generativo para a Matemática pitagórica, isto é, por meio de um número obtém-se outro e outro e assim sucessivamente. Na concepção pitagórica, o espaço era considerado um composto de pontos e o tempo formado por instantes, admitindo-se dividi-los infinitamente com a propriedade de continuidade.

Zenão queria mostrar, com seus paradoxos, que é um absurdo considerar que as coisas são infinitamente divisíveis e compostas por infinitos indivisíveis. “Os paradoxos dizem respeito à impossibilidade do movimento, no caso de admitirmos quaisquer dessas hipóteses” (Roque, 2012, p. 134).

Roque (2012) escreve que os paradoxos de Zenão, dentre eles a corrida de Aquiles e a Tartaruga, mostram os impasses que a subdivisão infinita do espaço pode chegar. Esses paradoxos, relacionados ao movimento, de acordo com a forma apresentada por Aristóteles, têm o objetivo de refutar esta possibilidade de subdivisão. O curioso é que nenhum argumento matemático foi utilizado nesta contestação. A discussão que chamava a atenção dos antigos nesses paradoxos, segundo Roque (2012), é que um movimento não possa passar por uma infinidade de etapas infinitas em um tempo finito.

Vamos analisar o paradoxo da corrida de Aquiles e a Tartaruga, fazendo algumas adaptações. Suponhamos que Aquiles e uma tartaruga vão realizar o percurso que vai do ponto A ao ponto B, indicados na Figura 1. A tartaruga parte do ponto A e caminha na direção do ponto B e, quando ela passa pelo ponto P_1, que representa a metade do caminho de A até B, Aquiles parte em direção a esse ponto. Quando Aquiles chega ao ponto P_1, a tartaruga já terá se deslocado para o ponto P_2, que fica na metade do caminho entre P_1 e B. Quando Aquiles chega ao ponto P_2, a tartaruga já terá se deslocado para o ponto P_3, que fica na metade do caminho entre P_2 e B e assim sucessivamente. Logo, se o espaço for infinitamente divisível, o percurso realizado pela tartaruga pode ser infinitamente dividido e desta forma, se Aquiles realizar o mesmo percurso, nunca alcançará a tartaruga.

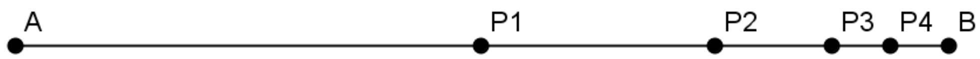


Figura 1: Aquiles e a Tartaruga

Fonte: Roque (2012, p.134)

O problema proposto por Zenão que gerou este paradoxo, segundo Roque (2012), mostra a dificuldade de se somar uma infinidade de quantidades cada vez menores e de se conceber que essa soma possa ser uma grandeza finita. Tal dificuldade se apresenta na Matemática atual, no estudo de séries e um exemplo que ilustra este fato é mostrar que $0,\overline{9}$ é igual a 1.

Assim o problema de Platão, colocado em termos semióticos, consiste na inevitável diferença entre signo e objeto, entre conhecimento e o objeto conhecido, entre a forma e o significado, ou entre as ideias e as suas sombras no sensível mundo de todo dia, um mundo que pode somente se aproximar imperfeitamente de uma realidade imutável e suprema.

Portanto, mente e mundo estão conectados pelo sistema de atividades, isto significa que as palavras ou signos de um lado e objetos e metas de outro, não são tão distintos e separados como poderíamos supor.

Os matemáticos, sendo em sua maioria platonistas imutáveis, têm acreditado, como consequência, numa *a-modalidade*[3] do conhecimento matemático e sempre têm considerado a investidura simbólica das verdades matemáticas e as formas de sua representação como uma mera externalidade.

Mas não é verdade que mesmo na Matemática, o conhecimento tenha mudado ao longo do tempo? Como qualquer representação é apenas uma perspectiva particular ou um certo ponto de vista de alguma coisa e, portanto, é relativo, essas ideias ou formas, isto é, os objetos do verdadeiro conhecimento devem ser apreendidos diretamente. Conhecer significa apreender intuitivamente a essência ou ideia de alguma coisa e intuí-la como uma forma, assim como se percebe nos juízos sintéticos de Kant.

Um bom exemplo é fornecido pela disputa sobre a natureza da álgebra geométrica grega entre Unguru e matemáticos como B. Van der Waerden e H. Freudenthal, entre outros.

4 ÁLGEBRA GEOMÉTRICA OU GEOMETRIA ALGÉBRICA?

[3] Este termo significa que esta forma de entender a Matemática, não diferencia as referências que podem ser produzidas de um predicado ao sujeito da proposição. Um exemplo, seria considerar a Matemática como um campo de calculações apenas. “A modalidade é a expressão dos modos do ser, ao contrário dos momentos do ser e das formas ou maneiras do ser. Os modos são a possibilidade, a realidade e a necessidade. Os momentos, a existência e a essência; as maneiras ou formas, a realidade e a idealidade” (Mora,1978, p. 189).

“No final do século XIX, matemáticos como B.Van der Waerden postularam que as proposições do livro II dos elementos de Euclides seriam, na verdade propriedades algébricas enunciadas sobre roupagem geométrica” (Roque, 2012, p.185), denominando esses livros como álgebra geométrica. A base desses pesquisadores matemáticos se assentava na hipótese de que as proposições do livro II eram formulações geométricas de regras algébricas com a intenção de resolver equações do segundo grau. Waerden chega a dizer que “esse livro seria o começo de um livro-texto de álgebra” (Roque, 2012, p.185).

A proposição II-4 ilustra bem este fato.

> Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos seguintes. Fique, pois, cortada a linha reta AB, ao acaso, no C; digo que o quadrado sobre a AB é igual aos quadrados sobre AC, CB e também duas vezes o retângulo contido pelas AC, CB. (Euclides, 2009, p.137).

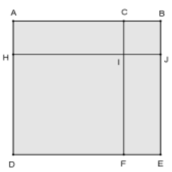


Figura 2: Proposição II-4

Fonte: Euclides (2009, p.137)

Na Figura 2, identificamos que o quadrado sobre AB é ABED, o quadrado sobre AC é DFIH e o quadrado sobre CB é CBJI. Os retângulos sobre AC e CB são respectivamente ACIH e FEJI. Numa tradução para versão geométrica da igualdade, consideramos que AC mede a, CB mede b, logo teremos: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Será esta a motivação de Euclides?

“Em 1975, o romeno Sabetai Unguru escreveu um artigo atacando os defensores da tese álgebra geométrica” (Roque, 2012, p. 186). Ele ressaltava que não devemos ler os textos gregos com a mente voltada para Matemática moderna, pois isto incorria no erro de esquecer que as proposições de Euclides, por exemplo, tinham pressupostos próprios.

Unguru (2004) afirma que os textos antigos gregos, são compostos de palavras e diagramas com sentido bem definido. Já nos textos matemáticos modernos existem também palavras, diagramas e símbolos, sendo que palavras e diagramas são de necessidades mínimas e dispensáveis, deixando o texto em sua nudez simbólica.

Unguru afirma que:

> Não há símbolos verdadeiros em um texto matemático grego. O que parecem símbolos para os olhos modernos destreinados são na verdade, nomes próprios para identificar objetos matemáticos. Eles não são símbolos e não podem ser manipulados, como símbolos algébricos (2004, p.72 – tradução nossa).

A partir deste fato, “instaurou-se uma querela acirrada em torno da álgebra geométrica e da natureza matemática euclidiana” (Roque, 2012, p.187). Matemáticos como André Weil e Hans Freudenthal se uniram contra Unguru, marginalizando sua obra.

Mas esta discussão teve consequências importantes do ponto de vista metodológico, conscientizando, não imediatamente, os historiadores matemáticos para não conveniência de traduzir textos gregos em linguagem algébrica. Unguru é considerado na atualidade como um dos pioneiros nas transformações que passaram a historiografia da Matemática.

A coisa é simplesmente esta: a mudança dos meios de representações muda a natureza dos objetos da Matemática, ou não? Os símbolos são meras roupas sobre um corpo imutável de conhecimento ou são pensamentos e conhecimentos seguros, determinados pelos signos e pelos significados da representação? Uma resposta possível a todos esses questionamentos é favorecida pela semiótica, a qual acredita que o símbolo seja um arbitrariamente elegível instrumento do sujeito humano, mais do que como sendo co-determinado pelo seu objeto.

5 TODO PENSAMENTO É FEITO POR SINAIS

Locke, dissertando sobre a linguagem escreve?

> O homem é equipado para formar sons articulados. Deus, tendo designado o homem como criatura sociável, não o fez apenas com inclinação e necessidade para estabelecer camaradagem com os de sua própria espécie, mas o forneceu também com a linguagem, que passou a ser o instrumento mais notável e laço comum da sociedade (Locke, 1999, p. 143).

Se acreditarmos, como Locke, que a linguagem é o grande instrumento e o laço comum da sociedade devemos também o seguir na visão de que os signos são essencialmente determinados pelos sujeitos humanos que os empregam, para representar as ideias que ele tem em mente.

> Conexão constante entre o nome e a essência nominal. Entre a essência nominal e o nome há uma conexão tão estreita que o nome de qualquer classe de coisas não pode ser atribuído a qualquer ser particular, a não ser o que tem sua essência, por meio da qual ela corresponde a esta idéia abstrata a respeito da qual este nome é o signo. [...] Os nomes das idéias simples, modos e substâncias: cada um deles tem algo peculiar. Embora todas as palavras, como tenho mostrado, nada signifiquem imediatamente exceto as idéias na mente de quem fala, não obstante, com base numa investigação mais cuidadosa, descobriremos que os nomes das idéias simples, modos mistos (dentro das quais eu compreendo também relações) e substâncias naturais têm, cada um deles, algo peculiar e diferente do outro. (Locke, 1999, p. 157, 161).

Da perspectiva da interação dos indivíduos com o mundo objetivo, os signos são essencialmente determinados pelos seus objetos, como a fumaça, que indica a presença de fogo, ou a pegada na praia, que informou Robinson Crusoé da presença de outro ser humano na sua solitária ilha.

> Um dia, passeando pela praia, longe de casa, descobri na areia, muito bem impresso, o rasto dum pé humano. Estaquei, aterrorizado, como se estivesse diante dum horrendo fantasma. Suando frio, a olhar em todas as direções, atentamente a escutar os ruídos todos da ilha, com muita cautela subi uma pequena elevação, para ver se conseguia descobrir alguma coisa. Nunca, como naquele dia terror algum me assaltou mais vivamente. Com o coração pulsando com violência, estive por longo tempo a vistoriar os meus domínios, tudo em vão. Desci e busquei a praia, a tudo examinando, mas nada pude descobrir. Não sabia o que pensar. Teria imaginado coisas? (Defoe, 2000, p. 42,43).

Assim, para um grupo, o símbolo convencional ou a palavra é um signo paradigmático, enquanto para o outro é um índice. A Matemática não pode ser feita sem signos indexais, como Kant foi enfático ao apontar em sua *Crítica da Razão Pura.*

> O conhecimento filosófico é o conhecimento da razão por conceitos, e o conhecimento matemático por construção de conceitos. Construir um conceito, porém, significa expor a intuição a *priori* a ele correspondente. Para a construção de um conceito, portanto, é exigida uma intuição não empírica, e esta, por conseguinte, é, enquanto intuição, um objeto singular, mas nem por isso tem de exprimir na representação como construção de um conceito (de uma representação universal), validade universal para todas as intuições possíveis que caibam sob o mesmo conceito (Kant, B742).

Kant exemplifica que para construir um triângulo, por exemplo, expõe a representação do objeto correspondente a este conceito por meio de mera imaginação na intuição pura. A figura desenhada serve para exprimir o conceito a despeito da universalidade dele. Kant conclui que:

> Nessa intuição empírica só se tem em vista a ação de construção do conceito, em que muitas determinações, como a extensão, os lados e os ângulos, são irrelevantes e, portanto, faz-se abstrações dessas diferenças que não modificam o conceito de triângulo. O conhecimento filosófico, portanto, considera o particular no universal, e o matemático, o universal no particular, ou mesmo no singular, mas igualmente a *priori* e por meio da razão (Kant, B742).

Como o conhecimento matemático considera o geral no particular, isto quer dizer que para ter acesso a qualquer objeto matemático, só é possível por meio de uma representação deste objeto. Portanto, parece plausível que a Matemática seja fundamentalmente uma atividade semiótica essencial, que muda a todo o momento.

Nós, humanos, não podemos discutir a realidade como tal, mas toda nossa atividade mental é sobre alguma representação dela e todo nosso pensamento ocorre em símbolos. Ernst Cassirer (1994) em seu livro *Ensaio sobre o homem* considera que o homem é essencialmente um ser simbólico e atribui esta ideia à filosofia de Kant.

> Em sua *Crítica do Juízo*, Kant levanta a questão de saber se é possível descobrir um critério geral com o qual possamos descrever a estrutura fundamental do intelecto humano e distinguir essa estrutura de todos os demais modos possíveis de conhecer. Após uma análise penetrante ele é levado à conclusão de que tal critério deve ser procurado no caráter do conhecimento humano, que é tal que o entendimento está sujeito à necessidade de se fazer uma distinção nítida entre a realidade e a possibilidade das coisas.... Não podemos pensar sem imagens, e não podemos intuir sem conceitos. 'Conceitos sem intuição são vazios; intuições sem conceitos são cegas' (Kant, *Crítica da Razão Pura*, B 75). O conhecimento humano é por sua própria natureza um conhecimento simbólico. É este traço que caracteriza tanto a sua força como as suas limitações. E, para o pensamento simbólico, é indispensável fazer uma distinção clara entre real e possível, entre coisas reais e ideais. Um símbolo não tem existência real como parte de um mundo físico; tem um "sentido". No pensamento primitivo ainda é muito difícil diferenciar entre as duas esferas de ser e sentido. As duas são constantemente confundidas: um símbolo é visto como se fosse dotado de poderes mágicos ou físicos. Com o avanço do progresso da cultura humana, porém, a diferença entre as coisas e os símbolos é sentida com mais clareza, o que significa que a distinção entre realidade e possibilidade também fica cada vez mais pronunciada (Cassirer, 1994, p. 95, 96, 97).

Como consequência, Kant teve dificuldades em distinguir proposições analíticas de proposições sintéticas. Sua visão da distinção analítica-sintética é expressa na sua invalidação da ontológica prova da existência de Deus e representa seu próprio passo copernicano como ficou expresso acima.

O interesse essencial de Kant foi primeiro de tudo tornar claro que somente conhecimento de um modo subjetivo pode ser chamado de conhecimento verdadeiro. Segundamente, ele enfatizou que não há um caminho direto da linguagem para a realidade objetiva.

O racionalismo clássico repousa na ideia de Deus, providenciando os significados de uma preestabelecida harmonia entre o conhecimento discursivo e o mundo objetivo. O idealismo platônico podia então ser combinado com a ideia de que o conhecimento é diretamente determinado pelo domínio dos seus objetos. A prova da existência de Deus garante a fundamentação leibniziana da verdade de um modo como a postura cartesiana *cogito ergo sum*, a verdade final que constitui os fundamentos da estrutura inteira da racionalidade cartesiana. Correspondentemente à ruptura que aconteceu na herança da idade clássica, aconteceu também uma ruptura nos fundamentos da Matemática moderna e nas ciências com a invalidação das provas da existência de Deus, pois era Deus que garantia uma estrita correspondência entre pensamento claro e distinto de um lado e a realidade externa do outro.

Kant afirmava que a proposição *Deus existe* não pode ser analítica, como Leibniz acreditava, porque:

> *ser* não é evidentemente um predicado real, i.e., um conceito de algo que pudesse ser acrescentado ao conceito de alguma coisa. Ele é apenas a posição de uma coisa ou de certas determinações em si mesmas. No uso lógico, é simplesmente a cópula de um juízo (Kant, B 626).

Portanto a proposição *Deus existe* não é um conhecimento verdadeiro. Kant percebeu "que nenhuma descrição geral da existência é possível, o que é talvez a mais valiosa proposição que a crítica contém.", afirma Peirce (CP, 1958, 1.35 - tradução nossa).

A intenção de Kant ao introduzir a distinção de juízos analíticos e sintéticos foi dizer que nunca poderemos ganhar conhecimento por meio de argumentações analíticas de conceitos e que, portanto, mesmo um conhecimento *a priori*, como a Matemática, deve ser baseada na intuição e é nesta seara, que os Experimentos Mentais ganham importância para o ensino desta ciência.

A consciência subjetiva só descobre *a posteriori* aquilo que foi construído pelo próprio sujeito. É, portanto, importante observar a reflexividade do conhecimento matemático quando se considera a Matemática como um processo evolucionário. A Matemática é sempre ao mesmo tempo matemática e *metamatemática*, ou o discurso no discurso.

6 O USO DOS EXPERIMENTOS MENTAIS COMO POSSÍVEL METODOLOGIA DE ENSINO DA MATEMÁTICA

Há no processo de desenvolvimento da Matemática, em especial no que tange o ensino desta ciência, um tipo de experimento que denominamos Experimentos Mentais. Esses experimentos “tentam resgatar as experimentações, analogias e o uso de metáforas na aprendizagem em Matemática, colocando o sujeito como agente produtor de seu próprio conhecimento, exaltando a criatividade” (Cruz, 2020, p. 132.).

Cruz (2018) conceitua Experimentos Mentais, na perspectiva da Educação Matemática, como formas que o sujeito utiliza para colocar seus próprios pensamentos, no desenvolvimento de um determinado conceito, como objeto de consideração em uma dada atividade e/ou prova matemática, por meio de representações e ancorados a um sistema de representação coerente, isto é, a um contexto bem definido. Esses experimentos exercem, no campo da Educação Matemática, dois papéis fundamentais, a destacar: 1- mostrar a coerência do próprio conceito; 2 - Identificar a possibilidade de aplicação desse conceito. Esses papéis não são dados de forma hierárquica, mas são identificados no processo de aplicação de tais experimentos.

Só é possível a aplicação dos Experimentos Mentais na Matemática que se ensina, se acreditarmos que a Matemática é uma atividade semiótica, ou seja, uma atividade de construção de diagramas, experimentação sobre esses diagramas e verificação dos resultados. Esses são os passos para o raciocínio diagramático na perspectiva de Peirce (Hoffmann, 2006).

Peirce escreve que:

> Diagrama é um representâmen que é predominantemente um ícone de relações e é ajudado a ser assim por convenções. Índices são também mais ou menos usados. Isto deve ser realizado sobre um sistema perfeitamente consistente de representações fundada sobre uma ideia simples e facilmente inteligível (CP, 1958, 4. 418).

Hoffmann (2006) afirma que a definição dada por Peirce que um diagrama é um representâmen, sendo predominantemente um ícone de relações, tem que ser considerada em um sistema de representação que seja perfeitamente coerente e consistente, isto é, em um contexto que seja bem estruturado.

Cruz escreve:

> Esse sistema de representação é caracterizado por um conjunto de convenções, cuja intenção é representar proposições e relações lógicas entre essas proposições, e indicar um conjunto de regras para a transformação de gráficos. Não há dúvida de que é preciso um sistema perfeitamente consistente de

> representação para mostrar implicações lógicas, e o mesmo é verdade para sistemas de representações em Matemática (2019, p. 19).

Há dois elementos que são comuns a todos os sistemas de representação e isto vai além de consistência, como afirma Hoffmann (2006). Por um lado, esses sistemas são essenciais para a construção de uma representação particular e por outro esses sistemas desempenham um papel normativo. Precisamos, por exemplo, de um sistema axiomático para construir uma prova matemática. A lógica e a Matemática verificam a validade de uma inferência, ou uma prova, por meio de regras e convenções determinadas e definidas por um sistema de representação (Cruz, 2019).

Os Experimentos Mentais são desenvolvidos, seguindo algumas características que são essenciais para o processo e que os qualificam como uma possível metodologia para o ensino de Matemática. Essas características são nomeadas como forma, estrutura, compreensão, dependência, revelação e comparação (Cruz, 2013).

Forma, neste contexto, tem o significado de atividades supostas, isto é, os Experimentos Mentais são baseados em um sistema de atividades supostas. Isto significa que as atividades partem de certas conjecturas e hipóteses desenvolvidas em uma representação particular do objeto geral. Ademais, "todo acesso cognitivo à realidade é relativo e mediado por signos" (Otte, 2001, p.2), isto quer dizer que este acesso não é direto e absoluto. No entanto, os signos dependem dos objetos que eles representam para poderem vir à realidade e funcionarem como signos.

Otte disserta que

> os signos têm significados e referem-se a objetos. Significados e objetos de signos podem ser eles próprios signos. O significado último ou fundamento básico de um signo não pode ser um signo em si; deve ser da natureza de uma intuição ou de um evento singular (Otte, 2001, p. 2).

Este sistema de atividades supostas nos permite considerar que o mundo, em especial o mundo matemático, consiste em dois tipos de entidades, a saber: signos e objetos. Os signos têm significado e os objetos têm existência real pura.

> Os existentes podem reagir com outros existentes, mas eles não significam nada. Os significados, ao contrário, são possíveis, ou seja, sua objetividade está no futuro. O significado de uma lei natural ou de um conceito matemático, por exemplo, deve ser visto nas suas potenciais aplicações futuras (Otte, 2001, p.3).

Como buscamos generalidade no processo de experimentação mental, *Forma* é essencial neste desenvolvimento e isto nos direciona para epistemologia da Matemática sob o ponto de vista semiótico. Esta epistemologia trata da relação entre signos e objetos.

Otte esclarece que

> Como todos os fenômenos gerais são entidades fundamentalmente semióticas, enquanto os fenômenos singulares não são intrinsecamente signos, poderíamos também dizer que a epistemologia se preocupa com a relação entre o singular e o geral. Desse modo, a generalização aparece como um problema fundamental da epistemologia e da educação (2001, p.4).

Cognição é a relação entre uma experiência individual, particular e um conceito ou uma regra. Implica em relacionar um particular a um geral. É isto que significa generalizar, entender um aspecto geral em um particular e é exatamente desta forma que desenvolvemos qualquer prova matemática que tenha esta característica.

Estrutura implica em dizer que os Experimentos Mentais não têm uma estrutura rígida. Muitas coisas são implicitamente assumidas. Há neste contexto a aplicação de uma síntese abdutiva. Síntese abdutiva é a introdução de uma ideia nova não contida nos dados do problema, da atividade ou da prova, permitindo dá as conexões que esses mesmos dados não teriam fornecido.

A síntese abdutiva dá ênfase ao que a mente é obrigada a fazer no interesse da inteligibilidade, ou seja, daquilo que possa ser compreendido não pelos sentimentos ou representações e nem por força transcendental da necessidade, mas no interesse pela explicação dos fatos.

Peirce conceitua que:

> Abdução é um argumento que apresenta fatos em suas premissas que apresentam uma similaridade com o fato enunciado na conclusão, mas que poderiam perfeitamente ser verdadeiro sem que esta última também o fosse, mais ainda se ser reconhecida; de tal forma que não somos levados a afirmar positivamente a conclusão, mas apenas inclinados a admiti-la como representando um fato do qual os fatos da premissa constituem um ícone (Peirce, 2010, p.30).

Uma síntese abdutiva é originária pelo fato de ser o único argumento que começa uma ideia nova, por meio da adoção de uma hipótese que por vezes Peirce chamou de hipótese explanatória. “A abdução simplesmente sugere que alguma coisa pode ser” (Peirce, 2010, p.220).

Compreensão dá ênfase de que nos Experimentos Mentais há uma combinação de experiências e conhecimentos que devem seguir uma lógica de considerações heurísticas com deduções lógicas e cálculos formais quando necessários. É o processo dedutivo no desenvolvimento da experimentação mental.

A dedução é um tipo de argumento que representa os fatos nas premissas, de tal forma que “se vamos representá-los num diagrama, somos compelidos a representar o fato declarado na conclusão” (Peirce, 2010, p.30). Isto quer dizer que o reconhecimento da conclusão está ancorado nos enunciados das premissas que funcionam como índices para o fato declarado na conclusão.

Em outras palavras,

> dedução é o modo de raciocínio que examina o estado de coisas colocadas nas premissas, que elabora um diagrama desse estado de coisas, que percebe nas partes desse diagrama, relações não explicitamente mencionadas, que se assegura, através de elaborações mentais sobre o diagrama, de que essas relações sempre subsistiram, ou pelo menos subsistiram num certo número de casos, e que conclui pela necessária, ou provável, verdade dessas relações (Peirce, 2010, p.5).

Dependência indica que o processo de experimentação mental está dependendo de conhecimentos e argumento aceitos pela comunidade, mesmo não sendo argumentos estritamente lógicos. Este processo nos possibilita compreender que “aprender novas coisas, sem novos dados, surge do fato de que o importante são as aplicações dos conceitos ou dos objetos e não apenas as relações dos conceitos entre si, ou seja, não é apenas a coerência da teoria” (Cruz, 2018, p.74).

Kuhn (2011) esclarece que os Experimentos Mentais são baseados em dados familiares, no intuito de auxiliar os cientistas a chegarem a leis e teorias diferentes daquelas que sustentavam anteriormente. Esse mesmo autor disserta:

> Todo experimento mental bem-sucedido inclui em seu esboço alguma informação prévia sobre o mundo, essa informação não está em questão no experimento. Reciprocamente, se estivéssemos com um experimento mental real, os dados empíricos sobre os quais ele se baseia seriam bem conhecidos e amplamente aceitos antes de o próprio experimento ser ao menos concebido. Como então, baseado exclusivamente em dados familiares, um experimento mental é capaz de conduzir a novos conhecimentos ou compreensão da natureza? (Kuhn, 2011, p. 258).

Os Experimentos Mentais devem basear-se em informações já disponíveis, permitindo ao experimentador ou cientista “utilizar como parte integrante de seu conhecimento aquilo que seu próprio conhecimento lhe tornara inacessível” (Kuhn, 2011, p. 281). É nesse sentido que tal conhecimento leva a uma nova compreensão da natureza dos objetos matemáticos ou a um novo conhecimento.

Revelação mostra que os Experimentos Mentais revelam contradições no sistema de nosso conhecimento. Muitas vezes, porém, novas leis são descobertas desta maneira. Se existem apenas duas possibilidades e uma delas é falsa, a outra deve ser verdadeira. É claro, a nova teoria também é apenas uma teoria e não a verdade absoluta.

Os Experimentos Mentais têm a capacidade de revelar um desajuste no aparato conceitual tradicional, permitindo ao experimentador ou ao cientista utilizar seus conhecimentos da mesma forma que utilizava antes, por outro lado, esses experimentos mostram contradições e/ou confusões lógicas no desenvolvimento da dada atividade, provas e/ou problema apresentado.

"A Matemática é uma atividade e não há nenhuma atividade sem contexto objetivo" (Otte, 2003, p. 30). Por ser uma atividade objetiva, a Matemática depende de pensamento intuitivo, pois é uma atividade sobre objetos e não um mero cálculo. O próprio Kant afirmou que "não podemos contemplar uma reta sem desenhá-la no pensamento" (B154).

"As verdades Matemáticas são estabelecidas por meio de provas. Mas as provas matemáticas são, de acordo com a tradição de Kant, tipos de Experimentos Mentais" (Otte, 2003, p. 29). O obstáculo principal que bloqueia a interpretação de argumentos matemáticos como Experimentos Mentais é descrito por Ian Muller como se tais argumentos não pudessem ser provas conclusivas. Esse mesmo autor continua afirmando que:

> Em particular, pode-se perguntar como a consideração de um único objeto pode estabelecer uma afirmação geral sobre todos os objetos de um determinado tipo. Parte da dificuldade se deve, eu acho, ao fracasso em distinguir duas maneiras de interpretar declarações gerais como "Todos os triângulos isósceles têm ângulos da base iguais". Sob uma interpretação, o estado mental refere-se a (falar sobre, pressupõe) uma totalidade definida, isto é, a classe de todos os triângulos isósceles e diz algo sobre cada um deles. Sob a outra interpretação, tal totalidade definida é pressuposta e a frase tem um caráter muito mais condicional "Se um triângulo é isósceles, seus dois ângulos da base são iguais". Uma pessoa que interpreta uma generalização na segunda maneira pode sustentar que a frase "a classe de todos os triângulos isósceles" não tem sentido porque o número de triângulos isósceles é absolutamente indeterminado (Mueller, 1969, p. 299, 300 – tradução nossa).

De acordo com esta forma de pensar, não podemos argumentar que há uma existência absoluta que possa envolver "nem a caracterização relacional dos objetos matemáticos e nem as provas matemáticas. A Matemática opera apenas com existência relativa" (Otte, 2003, p. 29).

"A Matemática não tem significados definitivos, nem no sentindo da estrutura intrateórica, nem com respeito à objetividade intuitiva. Símbolos e significados são processos" (Otte, 2012, p. 24).

Comparação neste processo é para afirmar que é possível comparar o conhecimento com outras possibilidades de solução em uma dada atividade, prova e/ou problema. Nós muitas vezes ganhamos novos conhecimentos quando algo que já foi dito uma vez é dito mais de uma vez de um modo novo.

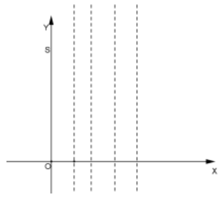
Para uma melhor compreensão dessas características, listamos no Quadro 1, de forma a dar explicações de como percebê-las numa dada prova e exemplificamos com o Experimento Mental sobre o Teorema da equação de segmentos que representa uma reta no sistema de eixos. Entendemos que outras interpretações cabem ao mesmo problema.

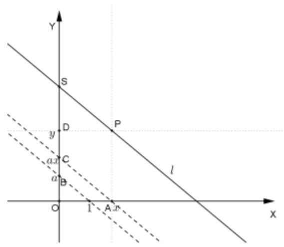
Teorema (Hilbert, 2003): As coordenadas x, y dos pontos que estão sobre uma reta qualquer, verificam sempre uma equação de segmentos da forma:

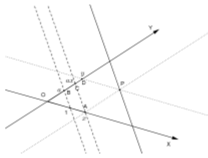
$$ax \ + by + c = 0;$$

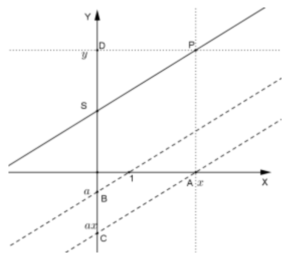
nesta equação ficam os segmentos a, b necessariamente a esquerda das coordenadas x, y; os segmentos a, b nunca são ambos nulos e c é um segmento qualquer.

Quadro 1: Demonstração do Teorema

Características dos Experimentos Mentais	**Demonstração**
Forma Conjecturas e hipóteses desenvolvidas em uma representação particular do objeto geral	Qualquer reta paralela ao eixo Y ou o próprio eixo, independentemente da escolha do ponto P, é representada pela forma $$\mathrm{x} = \bar{\mathrm{c}}.$$ 
Estrutura Muitas coisas são implicitamente assumidas	Note que para $\bar{c}$ vai existir um segmento c tal que: $$\bar{\mathrm{c}} + \mathrm{c} = 0;$$ isto é: $$x + c = 0$$ Esta equação é da forma desejada.

Compreensão Há uma combinação de experiências e conhecimentos que devem seguir uma lógica de considerações heurísticas com deduções lógicas e cálculos formais quando necessários.	Considere agora uma reta l que corta o eixo Y no ponto S. Conduzindo por um ponto P qualquer desta uma reta paralela ao eixo Y, encontramos no eixo X o ponto A, tal que $OA = x$ é o segmento que representa a abscissa de P. Do mesmo modo, conduzindo por P uma paralela ao eixo X encontramos no eixo Y o ponto D, em que $OD = y$ é o segmento que representa a ordenada de P. 
Dependência Depende de conhecimentos e argumento aceitos pela comunidade, mesmo não sendo argumentos estritamente lógicos.	Construa uma paralela a l passando por 1 (segmento unitário em X), encontrando em Y o ponto B, tal que $OB = a$ (a é um segmento que depende exclusivamente de l, independente da escolha de P). A paralela conduzida por A a 1, intersecta o eixo Y no ponto C tal que $OC = ax$ (pela definição de multiplicação de segmentos).] Note que OC somado com OD é igual a OS (um segmento determinado unicamente pela posição l, isto é: $$OC + OD = OS;$$ portanto, $$\mathrm{ax} + \mathrm{y} = \bar{\mathrm{c}}$$ Como $\bar{c} + c = 0$, podemos escrever que: $$\mathrm{ax} + \mathrm{y} + \mathrm{c} = 0$$ A equação encontrada é da forma desejada.
	Os eixos coordenados não precisam ser necessariamente

Revelação Revelam contradições no sistema de nosso conhecimento. Muitas vezes, porém, novas leis são descobertas desta maneira.	perpendiculares. 
Comparação É possível comparar o conhecimento com outras possibilidades de solução em uma dada atividade, prova e/ou problema.	*Reciprocamente: cada equação de segmentos dessa espécie representa uma reta na geometria plana tomada como base.* Demonstrando a validade da segunda afirmação, vamos considerar a equação seguinte $$a'x + b'y + c' = 0.$$ Sabendo que a' e b' não são simultaneamente nulos, podemos então multiplicar a esquerda da equação pelo segmento a (utilizando as regras de multiplicação de segmentos) determinado pela equação $aa' = 1$, com $b' = 0$, chegaremos à equação $$x + ac' = 0,$$ que é do tipo desejado. De outra forma, podemos multiplicar a esquerda da equação pelo segmento b determinado pela equação $bb' = 1$, com $b \neq 0$. Logo encontraremos a equação $$ba'x + y + bc' = 0,$$ que é do tipo desejado. Da mesma forma podemos mostrar a validade do teorema para reta na posição indicada na figura seguinte (a demonstração fica por conta do leitor).

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

As características dos Experimentos Mentais evidenciam o raciocínio diagramático. Construir diagramas na Matemática, nos permite ganhar intuições das coisas, que de outra forma não seria possível. “Diagramas, portanto, são especialmente úteis para Matemática e a Epistemologia, principalmente quando a continuidade está envolvida, porque esse processo de raciocínio abdutivo pode ser estudado com mais facilidade” (Cruz, 2018, p.160).

7 CONCLUSÃO

Os Experimentos Mentais nos ajudam a entender o desenvolvimento de provas ou atividades em Matemática, por meio de dados já conhecidos. Mas se os Experimentos Mentais não fornecem novos dados, como podem fornecer informações novas? A resposta reside no fato de que ele nos possibilita termos algumas ações, por isto são importantes para aprender Matemática e é por isto que apresentamos como uma possível metodologia de ensino desta ciência. Este é o aspecto da complementaridade entre intensão e extensão, entre sentido e referência, entre objeto e signo, colocando em evidência a relação entre o contexto da descoberta ou Matemática como atividade semiótica (construção) e o contexto de justificação.

Não existe um conceito completo das coisas, são apenas possibilidades, representações, ideias, intuições. Leibniz disse que cada coisa tem o seu conceito completo. Mas se fosse possível criar um conceito completo da realidade, o resto seria fácil. Descartes por exemplo, acreditava na realidade das intuições. Kant, por sua vez, acreditava que a existência não é somente conceito e isto fê-lo emancipar-se do leibnizianismo e, ao mesmo tempo, voltar-se contra o sensacionalismo. Foi o que permitiu-lhe ver que nenhuma descrição geral da existência seria possível.

A abordagem construtiva da Matemática nos traz a perspectiva da teoria da atividade e da complementaridade. Otte *et al.* (2015) escreve que o objeto da atividade é o seu motivo. Os termos atividade e motivo estão necessariamente ligados. Os principais componentes para as distintas atividades humanas são condicionados pelas ações que elas realizam sobre os objetos considerados.

Ação é um processo orientado por um objetivo consciente, isto quer dizer que os termos meta e ação têm que andar juntos, assim como os conceitos de atividade e motivação, intensão e extensão, sentido e referência. Kant, por exemplo, apresenta duas perspectivas ambíguas em sua concepção sobre Matemática, mas de certa forma complementares. Por um lado, ele descreve que o método da Matemática fornece a introspecção (observação e descrição do conteúdo da própria mente) no caráter de provas matemáticas como conexões do tipo *se então*. Por exemplo, garantida a validade do postulado das paralelas, então podemos enunciar: se uma reta paralela ao lado oposto de um triângulo existe, então a soma dos ângulos internos desse triângulo é 180°. Isto é exatamente o que o diagrama da Figura 3 mostra.

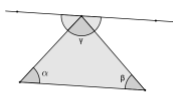


Figura 3: Ângulos Internos de um triângulo
Fonte: Próprio autor (2021).

Por outro lado, Kant pensa que a Matemática trata de objetos derivados de acordo com as regras pelas quais eles têm de ser construídos. Se olharmos para a Geometria, por exemplo, vamos perceber que o significado dos conceitos de triângulo ou reta no geral é apenas levado em consideração quando há a possibilidade de construí-los.

É o processo abdutivo que dispara a construção das possibilidades. Abdução não é simplesmente uma coisa psicológica como criatividade. Abdução implica generalização. Generalização implica introdução de objetos ideais novos e exige uma teoria de experimentação e de análise e por isto de Experimentos Mentais.

REFERÊNCIAS

Cassirer, E. (1994). *Ensaio Sobre o Homem. Uma Introdução a uma Filosofia da Cultura Humana.* Ed: Martins Fontes, São Paulo.

Cruz, W. J. (2013). *Uma analogia entre experimentos mentais e provas matemáticas formais.* Montevideo Uruguay: VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática (CIBEM).

Cruz, W. J. (2018). *Experimentos Mentais na Educação Matemática: uma analogia com provas matemática formais.* Curitiba: Editora Aprris.

Cruz, W. J. (2019). *O raciocínio diagramático e os experimentos mentais numa perspectiva semiótica*. Brasília: Educação Matemática em Revista, v. 24, n. 62, p. 6-28.

Cruz, W. J. (2020). *Matemática é criação ou descoberta? A importância dos Experimentos Mentais*. Union: Revista Iberoamericana de Educação Matemática.

D’Ambrosio, U. (1986). *Da realidade à ação: reflexões sobre educação matemática.* Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas.

Defoe. D. (2000). *Robinson Crusoé*. Brasil: Editora Virtual Books Online M&M Editores Ltda.

Euclides. (2009). *Os Elementos*. Tradução: BICUDO, I. Rio Claro: UNESP.

Hilbert, D. (2003). *Fundamentos da Geometria*. Trad: OLIVEIRA, A. J. Franco. Lisboa: Gradiva.

Hoffmann, H. G. M. (2006). *Seeing problems, seeing solutions. Abduction and diagrammatic reasoning in a theory of scientific discovery.* Georgia Institute of Technology : School of Public Policy.

Kant, I. (2013). *Crítica da razão pura*. Tradução e notas de Fernando Costa Mattos, 3 ed. Petrópolis, RJ: Editora Vozes.

Kuhn, T. S. (2011). *A tensão essencial*. São Paulo: Editora UNESP, 257 – 282 pp.

Lucke, J. (1999). *Ensaio a cerca do Entendimento Humano*. São Paulo: Editora Nova Cultural LTDA.

Manfredi, S. M. (1993). *Metodologia de Ensino-diferentes concepções (versão preliminar).* Campinas: F.E./UNICAMP.

Mora, J. F. (1978). *dicionário de filosofia*. Traduzido do espanhol por Antônio José Massano e Manuel Palmeirim. Lisboa: Dom Quixote.

Mueller, I. (1969). *Euclid's Elements and the Axiomatic Method*. Brit. F. Phil. Sci. 20 (1969), Printed in Great Britain, 289-309 pp.

Otte, M. F. (2001). *Mathematical Epistemology from a Peircean Semiotic Point of View.* Paper presented at PME in Utrecht.

Otte, M. F. (2003). *Análise de prova e o desenvolvimento do pensamento geométrico. São* Paulo: Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, n.1, pp. 13 – 55.

Otte, M. F. (2012). *A realidade das Idéias: Uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática*. Cuiabá: EDUFMT.

Otte, M. F., Mendonça, T. M., Gonzaga, L., & de Barros, L. (2015). *Generalizing is necessary or even unavoidable.* PNA, 9(3), 143-164.

Peirce, C. S. (1958). CP = *Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Volumes I-VI, ed. by Charles Hartshorne and Paul Weiß,* Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1931-1935, Volumes VII-VIII, ed. by Arthur W. Burks, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1958 (quoted by no. of volume and paragraph). NEM = New Elements of Mathematics. Harvard U.P.

Peirce, C. S. (CP). (2010). *Semiótica*. Trad. Jose Teixeira Coelho Neto. 4ª ed. São Paulo: Perspectiva.

Roque, T. (2012). *História da Matemática: Uma visão crítica desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar.

Unguru, S. (2004). *Words, Diagrams, and Symbols: Greek and Modern Mathematics or "On the need to rewrite the history of Greek Mathematics".* In: Classical Mathematics and Its Transformation. Annapolis: St. John's College, Annapolis.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
O uso dos experimentos mentais como possível metodologia de ensino da matemática: um olhar epistemológico

Willian José da Cruz
Doutor em Educação Matemática
Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Matemática, Juiz de Fora, Minas Gerais - Brasil
Williancruz990@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7509-1021

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Petrus Zaka, 125 apt. 202. Juiz de Fora – MG - Brasil

AGRADECIMENTOS
Agradeço a Deus pela paciência e consciência na hora da escrita deste texto. Agradeço minha família pela paciência e aos meus orientandos pelo estudo e ajuda na compreensão da temática apresentada.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: W. J. Cruz
Coleta de dados: W. J. Cruz
Análise de dados: W. J. Cruz
Discussão dos resultados: W. J. Cruz
Revisão e aprovação: W. J. Cruz

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não há conflitos de interesses.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 24-01-2021 – Aprovado em: 26-05-2021