Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

# O ENSINO DE PROBABILIDADE VIA ATIVIDADES COM O "JOGO DO MÁXIMO"[1]

## Probability Teaching via Activities with the "Jogo do Máximo"

**Emanuel Mendonça VIANA**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Caucaia, Brasil
emanuel.mendonca@ifce.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-5147-4316

**Jamilastreia Alves da SILVA**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Caucaia, Brasil
jamilastreia.silva@ifce.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-0583-0727

**Ana Carla Pimentel PAIVA**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, Brasil
carlapimentel00@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5801-9562

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

## RESUMO

O conteúdo Probabilidade dispõe de grande importância para a tomada de decisões em nossa sociedade, pois trata da área da Matemática que estuda as chances de um determinado evento acontecer. O ensino desse assunto nas escolas apresenta-se como um conteúdo a ser trabalhado desde as séries iniciais do ensino fundamental até o ensino médio, sempre aprofundando as noções matemáticas envolvidas a cada etapa de formação do estudante. À vista disto, neste artigo descrevemos, de modo particular, uma pesquisa qualitativa de caráter exploratório e descritivo acerca do ensino de Probabilidade, que teve o intuito de depreender os obstáculos relativos à compreensão desse conteúdo matemático. Desse modo, apresentamos uma breve discussão acerca de pesquisas que retratam o seu ensino e desenvolvemos uma proposta de aprendizagem por meio de uma exploração adequada de um jogo virtual intitulado "Jogo do Máximo". Além disso, indicamos e estruturamos situações-problema que oportunizam um melhor entendimento do conteúdo e auxiliam os alunos a desvincular esse assunto a apenas uma natureza mecânica algorítmica.

**Palavras-chave:** Ensino, Probabilidade, Jogo do Máximo.

## ABSTRACT

The Probability content is of great importance for decision making in our society, as it deals with the area of Mathematics that studies the chances of a certain event to happen. The teaching of this subject in schools presents itself as a content to be worked on from the initial grades of elementary school to high school, always deepening the mathematical notions involved in each stage of student formation. In view of this, in this article we describe, in a particular way, a qualitative research of an exploratory and descriptive character about the teaching of Probability, which aimed to understand the obstacles related to the understanding of this mathematical content. In this way, we present a brief discussion about research that portrays his teaching, and we developed a learning proposal through an appropriate exploration of a virtual game entitled "Jogo do Máximo". In addition, we indicate and structure problem situations that provide a better understanding of the content and help students to disconnect this subject to just an algorithmic mechanical nature.

**Keywords:** Teaching, Probability, Maximum Game.

---

[1] Errata: entre 2021 e 2024 o artigo circulou apenas com os dois primeiros autores. A partir de 2025 passou a constar no artigo também a terceira autora.

# 1 INTRODUÇÃO

Este estudo foi elaborado no contexto de uma pesquisa de especialização acerca do ensino de Matemática, de modo mais específico, o ensino em relação ao conteúdo de Probabilidade, por meio do desenvolvimento de atividades que possibilitem uma melhor compreensão do assunto, o que configurou um desafio muito interessante, visto que o recurso encontrado para auxiliar a compreensão desse conteúdo aliava as novas tecnologias à Matemática.

O ensino desse conteúdo matemático encontra-se inserido nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino (PCNs), que estabelecem que a principal finalidade para seu estudo assunto é a compreensão de que “grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos” (Brasil, 1998, p. 56), estabelecendo assim que o docente deve abordar as noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente e pode explorar o assunto na escola por meio de “situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos” (Brasil, 1998, p. 56). Isto é, a transmissão de saberes desse conteúdo matemático pelo docente ao discente auxilia este a entender as chances de ocorrência de determinado experimento ou fenômeno aleatório. Além disso, a importância do estudo do conhecimento probabilístico também ocorre devido à necessidade desse conhecimento nos mais diversos ramos da atividade humana, como Economia, na Política, na Medicina, entre outros.

No entanto, apesar desse conteúdo dispor de grande importância e constituir-se o fundamento matemático que garante a validade dos procedimentos da inferência estatística, muitos alunos consideram o seu ensino decorativo, enfadonho e tedioso devido à sua abordagem em sala de aula reduzir-se à resolução mecânica de exercícios. Em consonância, Lopes (2008) salienta que o ensino desse conteúdo matemático se organiza de modo a contrapor a vivência e exploração de experimentos:

> [...] opõe-se à exploração de situações que envolvam aproximação, aleatoriedade e estimação, as quais podem limitar a visão matemática que o aluno poderá desenvolver, dificultando suas possibilidades de estabelecimento de estratégias para a resolução de problemas diversificados que lhe surgirão ao longo de sua vida (Lopes, 2008, p.63).

Assim, em virtude do atual quadro de ensino de probabilidade e a fim de desenvolver uma proposta para o ensinamento desse conteúdo que não se limite ao emprego de fórmulas e reproduções, neste artigo concebemos situações-problema de modo a despertar o interesse por parte do aluno. Para tanto, utilizamos um jogo virtual que estimula a aprendizagem desse conteúdo, de forma atrativa dinâmica e contextualizada.

O jogo virtual escolhido para a atividade intitula-se por "Jogo do Máximo" e está contido em um repositório[2] contendo mais de 300 recursos educacionais de Matemática para o Ensino Médio desenvolvido pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Esse recurso educacional aborda o conteúdo Probabilidade, inicialmente por meio de uma abordagem frequentista e depois através do cálculo, consistindo em um jogo no qual os participantes apostam na maior face obtida no lançamento de dois dados comuns.

Assim, ao final deste artigo, espera-se que a proposta de ensino desenvolvida no campo epistêmico-matemático Probabilidade auxilie no entendimento desse conteúdo e estimule um maior interesse por parte dos alunos, como também assista professores que buscam novos mecanismos para lecionar tal assunto.

## 2 ENFOQUE HISTÓRICO ACERCA DO ENSINO DE PROBABILIDADE

A Teoria das Probabilidades é o ramo da matemática que cria, desenvolve e, em geral, pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. O modelo matemático utilizado para estudar um fenômeno aleatório particular varia em sua complexidade matemática, dependendo do fenômeno estudado, porém todos os modelos têm ingredientes básicos comuns.

A gênese das primeiras manifestações dos conceitos probabilísticos se deu através dos jogos de dados, mais precisamente o Tali (jogo do osso), que era praticado por astrólogos, sendo este o ancestral do dado moderno (Hacking, 1999).

Em obras do período medieval, encontramos referências aos jogos de dados que envolvem o lançamento de dois dados, sendo uma destas a Divina Comédia, de Dante Alighieri (1265 - 1321), que tece um breve comentário no sexto canto do Purgatório. Contudo, apesar de os jogos fazerem parte do desenvolvimento da humanidade, uma abordagem matemática da aleatoriedade teve início efetivamente há aproximadamente cinco séculos (Hacking, 1999).

Conforme Viali (2008), o desenvolvimento das teorias da probabilidade e os

[2] Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/search:jogo+do+Maximo.

avanços dos cálculos probabilísticos devem ser atribuídos a vários estudiosos, sendo seus precursores os matemáticos italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia, do século XVI, que delimitaram os primórdios das considerações matemáticas acerca dos jogos e das apostas. Posteriormente, com estudos aprofundados a partir da teoria criada por tais matemáticos, outros estudiosos contribuíram para a sintetização de ferramentas utilizadas cotidianamente, tais como: Blaise Pascal (1623 - 1662), Pierre de Fermat (1601 - 1655), Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) e Lenis Poisson (1781 - 1840).

A primeira definição formal de probabilidade foi concebida por Jerônimo Cardano (1501 - 1576), em sua obra Liber de Ludo Aleae, definindo o conceito matemático como quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis (Viali, 2008). A fim de que possamos compreender melhor essa definição, explanamos acerca dos conceitos matemáticos envolvidos.

## 2.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA ACERCA DO ENSINO DE PROBABILIDADE

Inicialmente, estabelecemos que um experimento é determinístico quando repetido em condições semelhantes e conduz a resultados essencialmente idênticos. Além disso, experimentos que repetidos sob as mesmas condições produzem resultados geralmente diferentes serão ditos experimentos aleatórios, ou seja, tais experimentos produzem resultados que não podem ser previstos (Morgado, 1991).

Salienta-se também que a falta de previsibilidade não impede de descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer, e as variações dos resultados se devem a uma multiplicidade de causas que não podemos controlar, as quais denotaremos por acaso (Hazzan, 2004).

Do mesmo modo, definiremos que o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é dito espaço amostral e será indicado por $\Omega$ (Morgado, 1991). Por exemplo, ao jogarmos uma moeda e observarmos a face de cima, teremos o seguinte espaço amostral:

$\Omega = \{K, C\}$, em que K representa cara e C, coroa.

Em outra situação, em que lançamos duas moedas e observarmos o número de caras obtidas, o espaço amostral consiste em:

$$\Omega = \{(K,K), (K,C), (C,K), (C,C)\}$$

Diremos ainda que o espaço amostral Ω é finito se a cardinalidade (quantidade de elementos) de tal conjunto é igual a um número natural não nulo, isto é, $\#\Omega = n \in \mathbb{N}^*$. Neste texto, restringiremos aos experimentos aleatórios cujos espaços amostrais são finitos.

Considerando um experimento aleatório cujo espaço amostral é Ω, os seus elementos são ditos eventos elementares e os subconjuntos deles serão ditos eventos. Em geral, indicaremos um evento por letras maiúsculas latinas A, B, C, ..., Z. Ademais, um evento A ocorre quando, ao realizar o experimento, o resultado obtido for pertencente a A (Morgado, 1991).

Isso quer dizer que se lançarmos um dado e observarmos o número da face de cima, dispomos do seguinte espaço amostral Ω= {1,2,3,4,5,6} e podemos observar os seguintes eventos:

A: ocorrência de número par. A = {2,4,6}

B: ocorrência de número ímpar. B = {1,3,5}

C: ocorrência de número menor que 3. C = {1,2}

D: ocorrência de número menor que 7. D = {1,2,3,4,5,6} = Ω

E: ocorrência de número maior ou igual a 7. E = ∅

De posse de conhecimentos prévios da teoria de conjuntos, ainda podemos combinar eventos para estabelecermos novos eventos. Doravante, sejam A e B dois eventos de um experimento. Assim, $A \cup B$ é o evento que ocorrerá quando A ou B (ou ambos) ocorrerem. Da mesma forma, $A \cap B$ é o evento que ocorrerá quando A e B ocorrem simultaneamente. Caso tenhamos uma sequência de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, então

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

será também um evento que ocorrerá quando ao menos um dos eventos $A_i$ ocorrer. Analogamente,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

trata-se do evento que ocorrerá quando todos os eventos ocorrem simultaneamente. Por fim, $A^c$ é o evento que ocorrerá quando A não ocorrer, e tal evento é dito evento complementar de A.

Retomando a definição de probabilidade, que se referia aos elementos de um evento como os casos favoráveis e os elementos do espaço amostral eram ditos casos possíveis, definimos assim a probabilidade como o seguinte quociente:

$$probabilidade = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}.$$

Notemos que a discussão feita até agora está baseada no fato de os eventos elementares serem igualmente prováveis, isto é, o espaço amostral é equiprovável. Em geral, são as características do experimento aleatório que nos levam a supor uma distribuição equiprovável.

Dessa forma, supondo que os experimentos aleatórios tenham as características apresentadas acima, de acordo com Morgado (1991), definimos a probabilidade do evento A ocorrer no espaço amostral Ω por:

$$P(A) = \frac{\#\, A}{\#\, \Omega}.$$

Desse modo, como consequências imediatas dessa definição, temos que para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$; e que $P(\Omega) = 1$; do mesmo modo que $P(\emptyset) = 0$. Ademais, se tivermos dois eventos A e B disjuntos, então P(A∪B) = P(A)+P(B).

Após essa reduzida fundamentação matemática do conceito de Probabilidade, abordaremos, na próxima seção, alguns entraves relacionados ao ensino desse conteúdo e alguns potenciais acerca do emprego de jogos como estratégia de ensino.

## 3 O ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE COM JOGOS

O caminho metodológico desta pesquisa ocorreu por meio de uma pesquisa qualitativa de caráter exploratório e descritivo, na perspectiva de Gil (1999), que tem como finalidade principal desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores.

Ainda conforme Gil (1999) esse tipo de pesquisa apresenta menor rigidez no planejamento, pois dispõe da finalidade de proporcionar uma visão geral acerca de determinado fenômeno que se pretende investigar.

O ensino de Matemática encontra-se desenvolvido, na concepção de muitos alunos, como o ensino de conteúdos ininteligível. Conforme Soares (2020, p.11), tal fenômeno ocorre devido ao ensino de matemática, que “se dá, por vezes embasado na transmissão de regras e fórmulas nem sempre compreensíveis no processo de aprendizagem”. Desse modo, cabe ao professor criar mecanismos que auxiliem os alunos a desenvolverem

> [...] habilidades e competências que lhes permitam não só o discernimento entre um modelo e outro, mas também na melhor maneira de aplicá-los, para que com esses modelos possam realizar inferências, argumentar e apresentar raciocínios e técnicas para a solução de problemas pertinentes a tais situações do seu dia a dia (Soares, 2020, p. 11).

Em relação ao ensino do conteúdo matemático Probabilidade, apesar de sua grande relevância em diversas áreas do conhecimento, trata-se de um assunto pouco explorado em sala de aula, devido às “dificuldades dos alunos quanto à sua compreensão e a falta de apoio didático estimulador e envolvente sobre o tema” (Silva, 2013, p. 15).

Considerando-se o atual quadro de ensino acerca do conteúdo Probabilidade, em que o assunto é transmitido de modo mecânico e sem significado, devemos optar pela aplicação de uma metodologia que facilite a compreensão dos conteúdos dessa área.

Nessa perspectiva de uma abordagem diferente da tradicional de ensino, diversos autores dissertam acerca da utilização de jogos como metodologia de aprendizagem. O jogo no ensino de matemática se traduz como “uma metodologia lúdica capaz de facilitar o entendimento do aluno em diversos conceitos da matemática, isso porque é uma atividade prática, onde o aluno é livre para traçar estratégias e experimentar sem nenhuma punição essas estratégias” (Moreira, 2016, p. 3).

Isto é, diferentemente da abordagem tradicional, o aluno encontra-se inserido ativamente no processo de entendimento do conteúdo, dado que durante o jogo ele pode desenvolver um raciocínio, testá-lo e refazê-lo para se chegar a um objetivo.

Conforme os estudos de Neres e Correa (2018, p.376) a resolução de problemas probabilísticos, envolvendo jogos lotéricos, “revela-se uma ferramenta epistemológica importante para a construção do saber além de possibilitar o desenvolvimento cognitivo”.

Além disso, no ensino de matemática com a utilização de jogos, o professor deixa de cumprir apenas a função de explanador de conceitos e passa a exercer a função de incentivador de seus alunos pela busca do conhecimento.

Os autores Santos e Dos Santos (2016, p. 3) dissertam acerca da importância dessa mudança na postura do professor propiciada por meio do emprego dos jogos, afirmando que a “mudança de postura do professor quando ensina a matemática, ele passa a buscar novas metodologias para o ensino, em função das dificuldades apresentadas por alguns alunos em relação aos conteúdos da disciplina”.

Contudo, para que ocorra uma correta assimilação de conceitos, deve haver um planejamento prévio por parte do professor, definindo os objetivos a serem alcançados. Gandro (2000) reforça que para a inserção de um jogo no contexto de ensino-aprendizagem de um determinado conteúdo é necessária uma análise do jogo proposto, observando se este representa um desafio ao aluno, ou seja, se o jogo dispõe da capacidade de gerar nele conflitos cognitivos, despertando-o para a ação, para o envolvimento com a atividade e motivando-o a aprender o conteúdo.

Com o propósito de compreendermos as preocupações ao utilizarmos jogos no ensino de matemática, exibiremos na figura 1 as vantagens e desvantagens elencadas por Gandro (2000) acerca dessa metodologia.

| VANTAGENS | DESVANTAGENS |
|---|---|
| - **fixação de conceitos** já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno;<br>- **introdução e desenvolvimento de conceitos** de difícil compreensão;<br>- desenvolvimento de **estratégias de resolução de problemas** (desafio dos jogos);<br>- aprender a **tomar decisões** e saber **avaliá-las**;<br>- **significação** para conceitos aparentemente incompreensíveis;<br>- propicia o relacionamento das diferentes disciplinas (**interdisciplinaridade**);<br>- o jogo requer a **participação ativa do aluno** na **construção** do seu próprio **conhecimento**;<br>- o jogo favorece a **socialização** entre os alunos e a conscientização do **trabalho em equipe**;<br>- a utilização dos jogos é um fator de **motivação** para os alunos;<br>- dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da **criatividade**, de **senso crítico**, da **participação**, da **competição** "sadia", da **observação**, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do **prazer em aprender**;<br>- as atividades com jogos podem ser utilizadas para reforçar ou recuperar habilidades de que os alunos necessitem. Útil no trabalho com alunos de diferentes níveis;<br>- as atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar alguns erros de aprendizagem, as atitudes e as dificuldades dos alunos. | - quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um **caráter puramente aleatório**, tornando-se um**"apêndice" em sala de aula**. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, **sem saber porque jogam**;<br>- o **tempo gasto** com as atividades de jogo em sala de aula **é maior** e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo;<br>- as **falsas concepções** de que se devem **ensinar todos os conceitos através de jogos**.Então as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o aluno;<br>- a **perda da "ludicidade" do jogo** pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo;<br>- a **coerção do professor**, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, **destruindo a voluntariedade** pertencente à natureza do jogo;<br>- a dificuldade de acesso e disponibilidade de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente. |

**Figura 1:** Potencialidades e obstáculos ao empregar jogos no ensino-aprendizagem de um conteúdo
Fonte: Gandro (2000, p. 35)

Desse modo, considerando-se os aspectos necessários para o desenvolvimento da proposta de intervenção em relação ao conteúdo Probabilidade, optamos pela utilização do Jogo do Máximo como uma forma de estimular a partição e a elaboração de estratégias entre os alunos, simultaneamente ao uso dos conhecimentos matemáticos.

A predileção por esse jogo se deu devido ao fato de suas regras serem simples e por ele permitir explorar conceitos básicos de probabilidade e estatística de maneira bastante natural e acessível. Na figura 2 apresentamos o modelo ilustrativo do jogo proposto e suas respectivas regras.


**Figura 2:** Tela inicial do Jogo do Máximo
Fonte: https://m3.ime.unicamp.br/media/software/1237/index.html

As regras do Jogo do Máximo são:

1. Jogam duas pessoas, ou seja, é necessário dividir a turma em duplas.
2. Escolhe-se a pessoa da dupla que iniciará o jogo, jogando os dados para que a disputa aconteça.
3. A primeira pessoa lança dois dados de uma só vez. Se o valor máximo que aparecer em qualquer um dos dois dados estiver entre 1 e 4, ela vence. No entanto, se o maior valor a aparecer nos dados for 5 ou 6, então é seu adversário, o segundo jogador, quem vence.

Além disso, salienta-se que o software "Explorando o Jogo do Máximo" é composto por duas atividades, ambas fundamentais para a desenvolvimento do conteúdo, e um Desafio, com uma proposta mais aberta e difícil. Essas atividades do software dispõem de algumas questões que devem ser respondidas pelos alunos em seus cadernos. Destaca-se que essas questões também podem ser empregadas em um instante após a utilização do software para o fechamento das discussões propostas na seção que descreve a nossa proposta de intervenção. Na figura 3, apresentamos a tela do software Jogo do Máximo, com as opções das atividades e do Desafio.

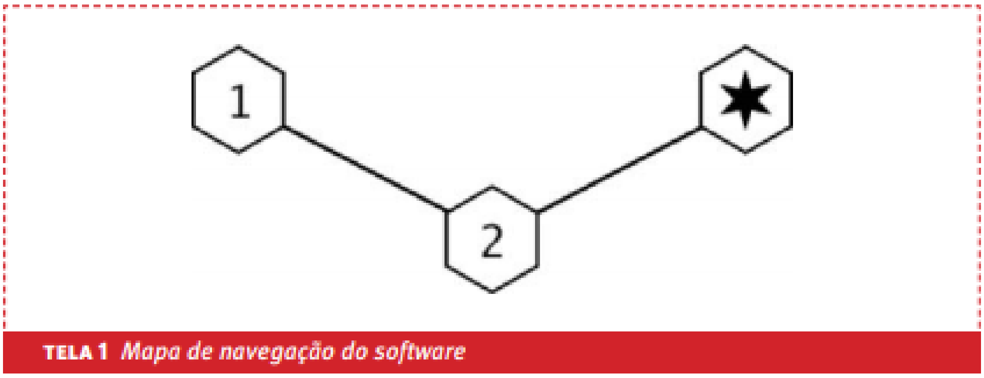


**Figura 3:** Tela de navegação do Jogo do Máximo
Fonte: Guia do Professor - software Jogo do Máximo - https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1237

Na próxima seção, detalhamos as atividades a serem executadas pelo docente durante essa proposta de ensino e os possíveis insights sobre os pensamentos do estudante. Por fim, reforçamos a predileção em relação ao ensino do nosso conteúdo epistêmico-matemático por meio de jogos com base nos estudos de Ribeiro (2010), Campos (2010), Soukef (2014), que apontam que o emprego de jogos no ensino de Probabilidade auxilia o entendimento dos alunos em relação à natureza probabilística dos jogos de azar, desenvolvendo uma atitude mais crítica com relação às suas reais chances de vencer em jogos ao mesmo tempo em que compreendem o cálculo de probabilidade e os conceitos de evento e espaço amostral.

# 4 UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO DO ENSINO DE PROBABILIDADE VIA “JOGO DO MÁXIMO”

Nesta seção, apresentamos uma proposta de intervenção de ensino estruturada por meio de uma sequência de situações-problema envolvendo os conceitos de probabilidade via Jogo do Máximo. Estabelecemos que uma situação-problema envolve “a escolha de questões abertas ou fechadas numa situação matematizada ou menos matematizada, vinculada a um campo de problemas colocados em um ou vários domínios do saber” (Almouloud, 2007, p. 174).

Além disso, para a elaboração e estruturação destas situações-problema considerou-se que as situações deveriam dispor do campo conceitual em que se deseja efetivamente explorar, de modo que os conhecimentos antigos não sejam suficientes para a resolução completa do problema e, por fim, que o problema apresentado deve envolver vários domínios do conhecimento (Almouloud, 2007).

Devemos salientar que para a aplicação de tal sequência de situações-problemas faz-se necessária uma pequena fundamentação teórica acerca do conteúdo de Probabilidade. Sugerimos ainda que o docente apresente a gênese do conteúdo matemático e suas aplicações no cotidiano com o intuito de despertar o interesse dos alunos pelo tema a ser estudado.

As situações-problema desenvolvidas deverão ser ministradas em quatro encontros e serão distribuídas em 3 etapas, que são exatamente as 2 atividades do software e o Desafio.

**Quadro 1:** Fases do Jogo do Máximo

| | |
|---|---|
| **Primeira Fase: Conhecendo o Jogo do Máximo** | Os alunos deverão jogar com o intuito de entender o funcionamento do jogo e suas regras para que seja possível realizar uma investigação inicial do jogo a partir da análise de um grande número de simulações a serem realizadas em dois encontros. |
| **Segunda Fase: Desmistificando o Jogo do Máximo** | Essa etapa dispõe da duração de um encontro. Nesse período, os alunos devem inferir, por meio da análise dos dados obtidos na primeira etapa, o motivo pelo qual o segundo jogador, embora tenha apenas duas faces a seu favor, vence o jogo mais frequentemente que o primeiro jogador. |
| **Terceira Fase: Desafio** | Essa etapa dispõe da duração de apenas um encontro. Nesse período, os alunos devem manipular as probabilidades de ocorrência dos números por meio da atribuição de pesos. |

Fonte: Elaborado pelos Autores

Doravante, descreveremos as situações-problema a serem ministradas pelos docentes em cada etapa da nossa proposta de intervenção.

### Primeira Fase - Conhecendo o Jogo do Máximo

O jogo do Máximo dispõe de um simulador, conforme apresentado na figura 4, que permite realizar jogadas como se fossem dados reais. Os números obtidos nas simulações serão registrados na forma de tabelas e de gráficos, situados ao lado do simulador.

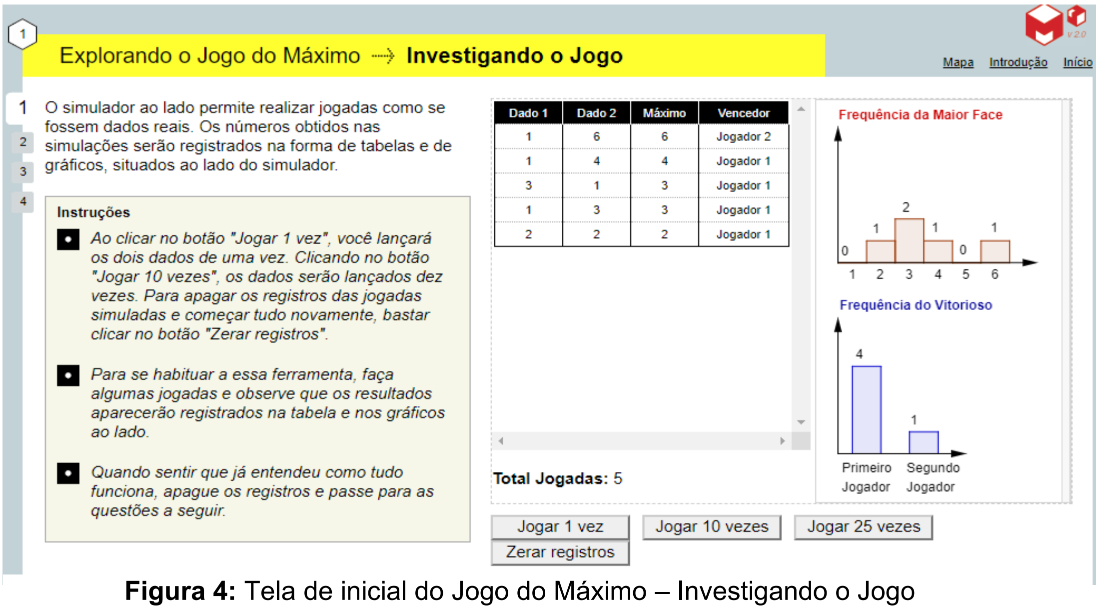


**Figura 4:** Tela de inicial do Jogo do Máximo – Investigando o Jogo
Fonte: https://m3.ime.unicamp.br/media/software/1237/atividade1_parte1.html

Na primeira etapa, o aluno deverá realizar simulações de jogadas "lançando" virtualmente dois dados. Os resultados serão representados pelo software em uma tabela que registra separadamente cada uma das jogadas, um gráfico de frequências para a maior face obtida (gráfico vermelho) e outro para o jogador vencedor (gráfico azul), como mostrado na Figura 5.

A situação-problema (1): Consiste em os alunos analisarem os dados obtidos para discorrer acerca do espaço amostral do jogo e esclarecerem os questionamentos propostos, que serão apresentados na figura 5.

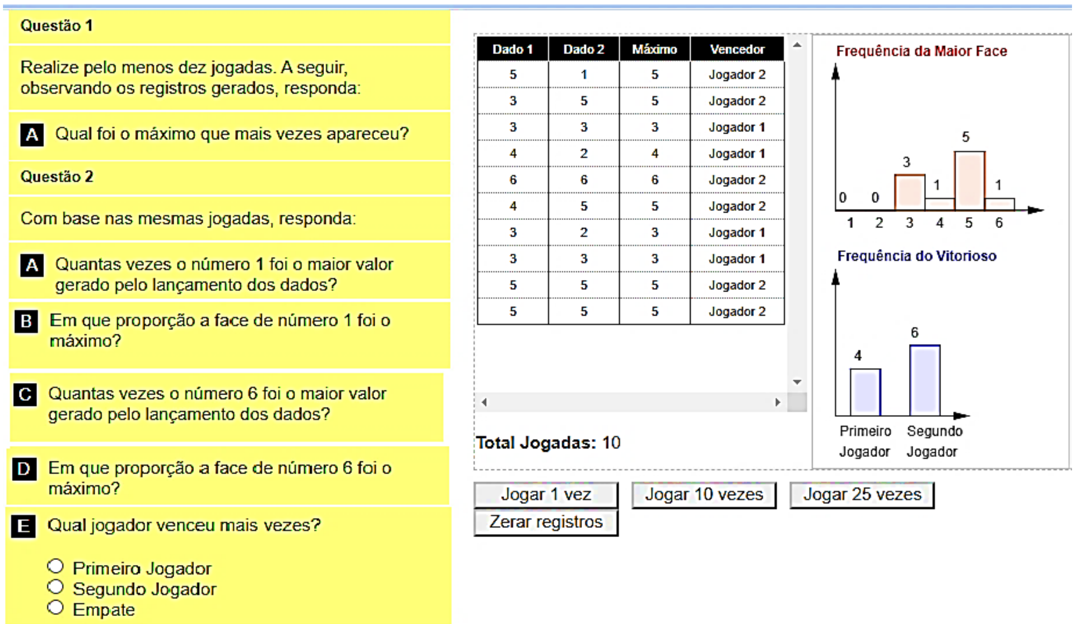


**Figura 5:** Situação-problema (1): Esclarecimentos dos questionamentos do jogo
Fonte: https://m3.ime.unicamp.br/media/software/1237/atividade1_parte1.html

Por meio dessa situação-problema (1), objetivamos que o aluno investigue o comportamento aleatório de um jogo simples com dados, compreenda as funções de variáveis aleatórias e, por fim, através da leitura dos gráficos, compreenda os gráficos de frequências.

De modo mais sucinto, os alunos devem inferir ao analisar o jogo que a face 1 será o valor máximo somente no caso em que for obtido (1,1), ou seja, face 1 nos dois dados. A face 2 será o valor máximo se for obtido um dos resultados (1,2), (2,1), (2,2). Ou seja, a face 2 tem 3 vezes mais chance que a face 1 de ser o valor máximo. A face 6 será o valor máximo se for observado qualquer resultado com uma das faces igual a 6, {(1,6), (2,6), ..., (6,6), (6,1), ..., (6,5)}, isto é, dispomos de 11 combinações possíveis nas quais 6 é o valor máximo. Desse modo, a face 6 tem 11 vezes mais chance que a face 1 e quase 4 vezes mais chance que a face 2 de ser o valor máximo, o que nos leva a concluir que valores maiores têm mais chance de serem o valor máximo no lançamento dos dois dados.

A situação-problema (2): consiste em o docente estabelecer questões mais matematizadas e concretas acerca do conteúdo de Probabilidade, solicitando a resolução dos seguintes questionamentos:

1. Qual a probabilidade de o primeiro jogador vencer o Jogo do Máximo?
2. Qual a probabilidade de o segundo jogador vencer?
3. Quais as chances de o primeiro jogador lançar os dois dados e em um dos deles aparecer o número 3?
4. Quais as chances de algum jogador lançar os dados e nos dois aparecer o número 5?
5. Quais as chances de o segundo jogador lançar os dados e nos dois aparecer o mesmo número? Por exemplo, conforme apresentado na figura 6, a face virada para cima do primeiro dado corresponde ao número 4 e a face virada para cima do segundo também corresponde ao número 4.

**Figura 6:** Ilustração da situação de lançamento do segundo jogador, em que os dois dados dispõem do número 4
Fonte: Elaborado pelo autor

Por meio dessa situação-problema (2), objetivamos o emprego dos conceitos basilares de Matemática e a análise dos lançamentos se a face dos dados continua sendo equiprovável, ou seja, continua com a mesma probabilidade de ocorrência.

**Segunda Fase - Desmistificando o Jogo do Máximo**

Nesta etapa, a interface do simulador é diferente da apresentada anteriormente, permitindo que o jogador registre na tabela a maior face obtida no lançamento de dois dados. Além disso, nesta etapa, todos os alunos já deverão estar convencidos de que o jogo favorece o segundo jogador. É possível que, para algum aluno, mesmo depois de muitas jogadas, o primeiro jogador tenha ganhado mais vezes. Se isso ocorrer, pode ser interessante propor à turma que confronte seus resultados com os de alguns colegas.

A situação-problema (1) consiste em: baseado nas instruções do jogo, os alunos preencherem toda a tabela, conforme explanado na Figura 7, com o intuito de compreender o motivo pelo qual o segundo jogador vence o jogo mais frequentemente que o primeiro. Se os alunos quiserem, podem preencher as células diretamente, utilizando os dados obtidos nos 10 lançamentos realizados na primeira etapa sem precisarem realizar as jogadas.

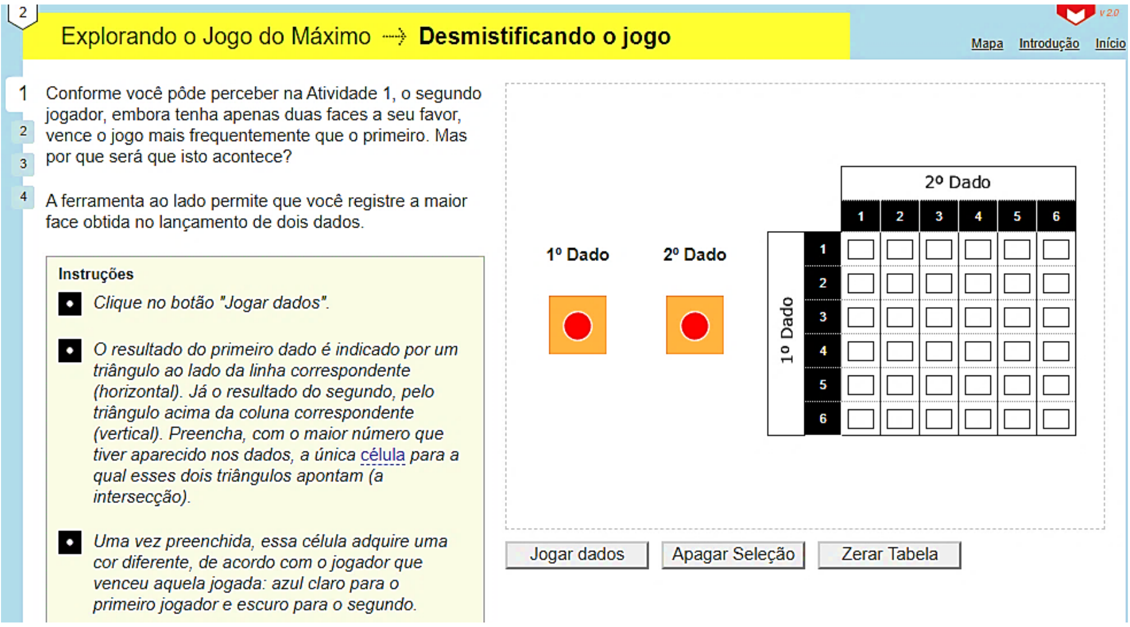


**Figura 7:** Tela Inicial do Jogo do Máximo – Desmistificando o Jogo
Fonte: https://m3.ime.unicamp.br/media/software/1237/atividade2_parte1.html

Por meio da situação-problema (1), o aluno é conduzido ao cálculo da probabilidade de vitória para cada um dos jogadores no Jogo do Máximo. Os 36 possíveis resultados do lançamento de dois dados e o espaço amostral podem ser representados em uma tabela 2x2, na qual cada linha indica o resultado do primeiro dado e cada coluna, o resultado do segundo.

Em cada casa da tabela, o aluno deve preencher qual é o valor máximo observado. Por exemplo, se em um lançamento for obtido o resultado (4,5), então o aluno deve preencher o valor 5 (máximo entre 4 e 5) na casa correspondente à linha 4 e à coluna 5.

Depois de completada a tabela com o valor máximo de todos os resultados possíveis, o aluno deve identificar quais são os resultados favoráveis ao primeiro jogador e quais os favoráveis ao segundo. No software, isso será indicado pela cor de fundo de cada célula que for preenchida corretamente pelo aluno.

Os resultados favoráveis ao primeiro jogador são todos aqueles com máximo até 4, ou seja, todos os compreendidos entre as linhas de 1 a 4 e as colunas de 1 a 4. Portanto, há 16 (4 x 4) combinações possíveis favoráveis ao primeiro jogador. Os resultados favoráveis ao segundo jogador são todos os restantes, ou seja, 20 (36-16) combinações favoráveis.

De posse desses dados, percebemos que a probabilidade de ocorrência é a mesma para cada par possível: 1/36. Portanto, a probabilidade de que o primeiro jogador ganhe o jogo é de 1/36 =0,444... ou aproximadamente 44,44 % e a probabilidade de que o segundo jogador ganhe o jogo é o complementar 1 - 0,444... = 0,5556 ou 55,56%, o que determina que o Jogo do Máximo favorece o segundo jogador.

**Terceira Fase – Desafio**

Conforme observado nos exercícios da segunda etapa, o Jogo do Máximo beneficia o jogador que tem as faces 5 e 6 a seu favor. De qualquer modo, é importante ter em mente que, em todas as simulações realizadas até agora, considerava-se que as faces dos dados eram equiprováveis, ou seja, que tinham a mesma probabilidade de ocorrência.

Situação-problema (1): Análise da probabilidade dos dados se as suas faces tivessem probabilidades diferentes de aparecer, conforme exibido na figura 8. Quais deveriam ser as duas faces do segundo jogador para que o jogo fosse justo?

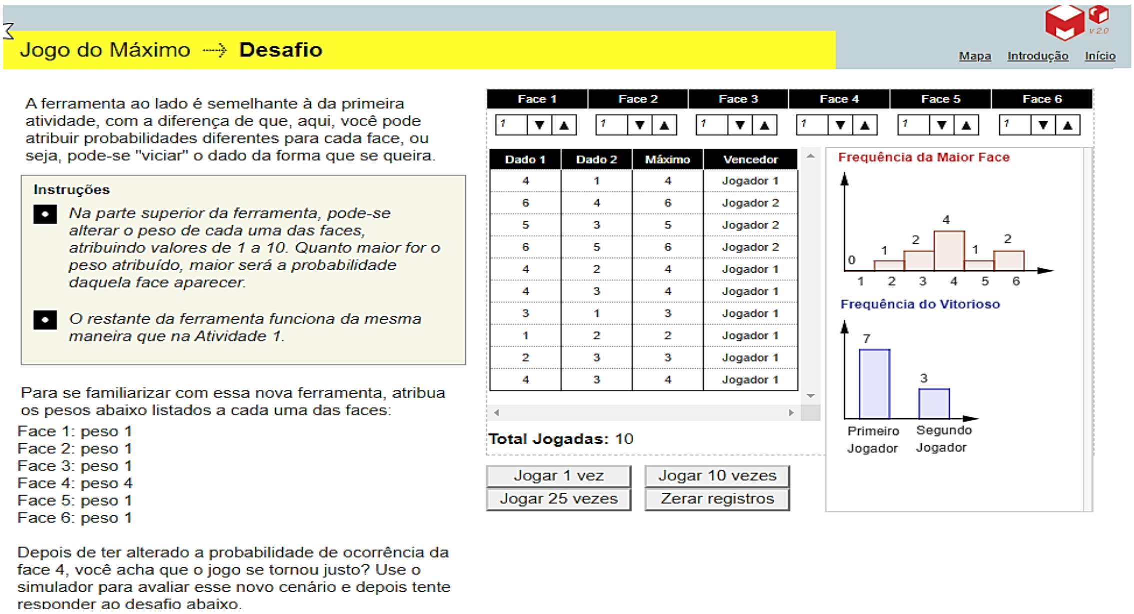


**Figura 8:** Tela Inicial do Jogo do Máximo – Desafio
Fonte: https://m3.ime.unicamp.br/media/software/1237/desafio1.html

A situação proposta no desafio envolve a possibilidade de viciar os dados utilizados no Jogo, atribuindo pesos para cada uma das faces. Trata-se de uma pergunta complexa e que admite múltiplas respostas. A proposta é que os alunos testem as suas escolhas e depois procurem justificar as probabilidades de cada jogador vencer.

Os pesos representam um dado que tem apenas as faces 1 e 6, em que a face 1 tem probabilidade 5/7 e a face 6, 2/7 de ser observada em um lançamento (você pode imaginar um dado com 7 faces, das quais duas têm valor 6 e cinco têm valor 1). Ou seja, a face 1 aparece na proporção de 5 para 2 em relação à face 6.

Neste caso, a probabilidade de obter maior face igual a 1 nos dois lançamentos é igual à probabilidade de obter face 1 nos dois dados: 5/7 x 5/7 =0,5102 ou 51,02%. E a probabilidade de obter face 6 como máximo é o complementar, portanto, aproximadamente igual a 48,98%. Com essa configuração para os pesos, o jogo aproxima-se de um jogo honesto. Além disso, esta não é a única solução, porém representa bem as possíveis respostas que poderão ser encontradas pelos alunos.

Para que o desafio não se transforme em um jogo de tentativa e erro, peça aos alunos que justifiquem os pesos que atribuíram às faces, de maneira similar aos cálculos que apresentamos na situação-problema anterior.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo apresentou uma proposta de intervenção por meio do desenvolvimento de atividades de ensino referentes aos conceitos iniciais do conteúdo matemático Probabilidade na perspectiva do ensino de matemática por meio da inserção de jogos.

Assim, a pesquisa iniciou-se a partir de uma investigação em relação à gênese epistemológica do nosso objeto matemático, Probabilidade, e as formas de tornar o ensino e aprendizagem desse conteúdo mais atrativa. Durante nossa perquirição nos deparamos com estudos de diversos pesquisadores como Neres e Correa (2018) e Santos e Dos Santos (2016) que defendem o ensino de probabilidade por meio da utilização de jogos e elencam as potencialidades que essas ferramentas podem propiciar aos alunos.

Assim ao longo de seu desenvolvimento dessa pesquisa, dissertamos acerca das vantagens e desvantagens de aplicar jogos em sala de aula, discriminando os possíveis obstáculos que possam surgir e interferir no desenvolvimento da aula. Desta maneira, o professor que pretenda fazer uso desse projeto de intervenção em sala de aula deve realizar um planejamento prévio para contornar os obstáculos que possam vir interferir em seu desenvolvimento.

Após a inquirição acerca deste recurso, optamos pela utilização do “Jogo do Máximo” de modo a facilitar a compreensão do aluno em relação ao conteúdo Probabilidade. Assim, a proposta de ensino desenvolvida emprega o jogo com o intuito de elucidar os conceitos iniciais de Probabilidade de modo a utilizarmos esses conceitos do nosso campo epistêmico para esclarecermos o funcionamento do jogo e as vantagens acerca do segundo jogador.

De modo mais sucinto, a inserção do jogo se divide em 3 etapas. Na primeira, explora-se a compreensão dos gráficos utilizados, o que permite a verificação, por meio do docente, se todos os alunos compreenderam as informações transmitidas por cada um dos gráficos e como é possível obter o gráfico azul a partir do vermelho, conforme apresentado na Figura 8.

Na segunda etapa, são discutidos os resultados obtidos por cada aluno, o que proporciona a comparação do resultado individual do aluno com as respostas obtidas pela classe toda, nas quais devem aparecer mais vitórias do segundo jogador. Com a exploração desse fato, esclarece-se que um resultado mais provável que outro não ocorre necessariamente mais vezes quando observamos um caso particular.

Por fim, por meio da terceira etapa, o desafio, podemos realizar o fechamento da proposta de intervenção que permite ao professor verificar se o aluno compreendeu o significado da tabela de resultados preenchida ao longo das situações-problema.

Desta forma, espera-se que esse estudo oportunize aos docentes o conhecimento da prática de ensino de matemática por meio de jogos, de maneira que os leve a refletir e a participar ativamente do processo de construção do conhecimento matemático. A pesquisa não dispõe de resultados acerca da aplicação das atividades desenvolvidas, assim, deixa-se em aberto para pesquisas futuras a aplicação de tais atividades no âmbito escolar.

Portanto, ao final dessa pesquisa, almeja-se que este trabalho contribua para que haja o desenvolvimento de outras propostas de intervenção no ensino de conceitos matemáticos com a inserção de jogos.

## REFERÊNCIAS


Almould, A. S. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. (1998) *Parâmetros curriculares nacionais: matemática.* Brasília: Ministério do Meio Ambiente; Secretaria de Educação Fundamental.

Campos, S. G. V. B, & Novais, E. S. (2010, julho) Jogos e brincadeiras para ensinar e aprender probabilidade e estatística nas séries iniciais do ensino fundamental. In *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática - Educação Matemática, Cultura e Diversidade* (pp.1-9). Salvador, BA. Recuperado de https://www.matematicando.net.br/wp-content/uploads/2017/07/JOGOS-E-BRINCADEIRAS-PARA-ENSINAR-E-APRENDER-PROBABILIDADE-E-ESTATÍSTICA-NAS-SÉRIES-INICIAIS-DO-ENSINO-FUNDAMENTAL.pdf

Gil, A. C. (1999). *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. 5ª ed. São Paulo: Atlas.

Grando, R. C. (2000). *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. (Tese de Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Hacking, I. (1999). *The emergence of probability*. Cambridge U. Press, London.

Hazzan, S. (2004). *Fundamentos de Matemática Elementar* – vol. 5. São Paulo: Editora Atual.

Lopes, C. E. (2008). O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cad. CEDES*, Campinas, v. 28, n. 74, 57-73, Apr. 2008. Recuperado de http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-32622008000100005&lng=en&nrm=iso

Moreira, M. F. et al. (2016, julho) Metodologias com o uso de jogos e suas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. In *Anais eletrônicos do XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM - Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades* (pp 1-12 ). São Paulo, SP. Recuperado de http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7873_3940_ID.pdf

Morgado, A. C. de O. (1991) et al. *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

NERES, Raimundo Luna; CORREA, Venâncio Barros. Resolução de Problemas, segundo Pólya, para o ensino de probabilidade usando jogos de loteria Problem solving, According to Pólya, for the Probability Teaching, using lottery games. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 20, n. 2, 2018.

Ribeiro, C. E., & Goulart, A. (2013, julho) O ensino de probabilidade por meio de jogos na Educação de Jovens e Adultos. In *Anais do X Encontro Nacional De Educação Matemática* (pp. 1-15). Curitiba, PR. Recuperado de http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/298_733_ID.pdf

SANTOS, Tawana Telles Batista; DOS SANTOS, Lilian Gleisia Alves. Jogos no ensino de probabilidade e análise combinatória: relato de uma proposta metodológica no ensino médio. *Encontro Nacional de Educação Matemática*, *X*, 2016.

Soares, J. D. (2020) *Probabilidade: uma proposta didática para se trabalhar no ensino médio* (Dissertação de Mestrado em Matemática). Universidade Federal de Lavras. Lavras, MG.

Silva, F. M. N. (2013). *Jogos no processo de ensino-aprendizagem em probabilidade* (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, SP.

Soukeff, F. E. B. (2014). *Jogo Mega-Duque: uma proposta para o ensino de probabilidade* (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. São Paulo, SP.

Viali, L. (2008). Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. *Revista Brasileira de História da Matemática*. Recuperado de https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/177/163

## NOTAS

**TÍTULO DA OBRA**
O ensino de probabilidade via atividades com o "Jogo do Máximo".

**Emanuel Mendonça Viana**
Doutor em Matemática
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Departamento de Ensino, Caucaia, Brasil
emanuel.mendonca@ifce.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-5147-4136

**Jamilastreia Alves da Silva**
Mestre em Educação
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Departamento de Ensino, Caucaia, Brasil
jamilastreia.silva@ifce.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-0583-0727

**Ana Carla Pimentel Paiva**
Doutoranda em Ensino de Ciências e Matemática
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, Brasil
carlapimentel00@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5801-9562

**Endereço de correspondência do principal autor**
Rua Francisco da Rocha Martins, S/N, Bairro Pabussu, CEP 61609-090, Caucaia, CE, Brasil.

**CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA**
**Concepção e elaboração do manuscrito:** VIANA, E., SILVA, J. A., PAIVA, A. C. P.
**Coleta de dados:** PAIVA, A. C. P.
**Análise de dados:** PAIVA, A. C. P.
**Discussão dos resultados:** VIANA, E., SILVA, J. A., A. C. P. PAIVA
**Revisão e aprovação:** VIANA, E., SILVA, J. A., A. C. P. PAIVA

**CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA**
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

**FINANCIAMENTO**
Trabalho financiado pela Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP) para incentivo à pesquisa no Brasil.

**CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM**
Não se aplica.

**APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA**
Não se aplica.

**CONFLITO DE INTERESSES**
Não se aplica.



**PUBLISHER**
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

**EDITOR**
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

**HISTÓRICO**
Recebido em: 23-02-2021 – Aprovado em: 20-09-2021