Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS: QUE (IN)COMPREENSÕES REVELAM OS ALUNOS?

Rational Number Operations: What (Mis)Understanding Do Children Demonstrate?

Sofia Isabel GRAÇA
Universidade do Algarve, Faro, Portugal
soffiagraca@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2521-2184

João Pedro da PONTE
Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal
jpponte@ie.ulisboa.pt
https://orcid.org/0000-0001-6203-7616

António GUERREIRO
Universidade do Algarve, Faro, Portugal
aguerrei@ualg.pt
https://orcid.org/0000-0002-4711-4270

RESUMO

Este estudo qualitativo e interpretativo pretende conhecer que compreensões revelam os alunos do 5.º ano nas operações com números racionais antes e depois de uma experiência de ensino enfatizando o uso de modelos. Os dados foram recolhidos através de dois testes e quatro entrevistas semiestruturadas individuais. Os resultados mostram que, antes da realização da experiência de ensino, o conhecimento dos alunos das operações de adição e subtração restringiam-se à aplicação de regras. Após a experiência de ensino, os alunos demonstraram compreender a base concetual destas operações. Na multiplicação e divisão de frações, que envolvem uma compreensão concetual mais complexa, demonstraram importantes ideias associadas ao sentido de número racional e sentido de operação. O uso de modelos parece ter contribuído para a compreensão concetual das operações pelos alunos.

Palavras-chave: Números Racionais, Frações, Operações Com Frações

ABSTRACT

This qualitative and interpretative study aims to know grade 5 children's knowledge of rational number operations, before and after a teaching experiment emphasizing the use of models. Data was collected using two tests and four individual semi-structured interviews. The results show that, before the teaching experiment, in fraction addition and subtraction, children just applied rules. After the teaching experiment, they demonstrate conceptual understanding regarding these operations. In fraction multiplication and division, that involve a more complex conceptual understanding, they showed important ideas regarding rational number sense and operation sense. The use of models seems to have promoted the conceptual understanding of these operations by children.

Keywords: Rational Numbers, Fractions, Fraction Operations

1 INTRODUÇÃO

Os números racionais têm uma importância reconhecida na matemática, designadamente no ensino básico, contudo, envolvem diversos conceitos que podem representar ideias complexas para os alunos, sendo um exemplo disso as operações com frações (Braithwaite, Pyke & Siegler, 2017). Quando os alunos iniciam o estudo destas operações eles já têm um conhecimento anterior das operações com números inteiros. Além disso, as metodologias de ensino frequentemente usadas na sua abordagem são maioritariamente procedimentais. Estas são possíveis razões para os fracos resultados que os alunos demonstram (Behr & Post, 1992). A abordagem às operações com números racionais deve permitir o envolvimento dos alunos em tarefas contextualizadas, que os conduzam à construção e compreensão dos algoritmos, e não apenas à assimilação de regras operatórias, e que contribuam para o desenvolvimento do seu sentido de número racional (Lewis & Perry, 2014) e sentido de operação (Huinker, 2002), dois importantes objetivos de aprendizagem.

A resolução de problemas bem como o processo de modelação podem contribuir para o desenvolvimento destas competências. A resolução de problemas permite resoluções diferentes das mais tradicionais e contribui para que cada aluno tenha um leque mais vasto de possibilidades de analisar e resolver um determinado problema. Os alunos envolvem-se ativamente na formulação de conjeturas, na investigação e exploração de ideias. Os modelos geométricos são modelos matemáticos que permitem representar situações ou relações, ou seja, como uma coisa pode ser transformada noutra, à medida que se generalizam ideias, estratégias e representações entre contextos, sendo ferramentas fundamentais para o raciocínio (Fosnot & Dolk, 2002). Desta forma, são promovem a compreensão conceitual dos números racionais, nomeadamente das operações com frações, permitindo aos alunos progredir do concreto para o abstrato, ajudando a construir modelos mentais para as operações. Os alunos representam as quantidades e visualizam a relação entre elas, para que posteriormente operem com frações de forma significativa. Por exemplo, quando os alunos adicionam duas frações adicionando numeradores e denominadores, eles consideram as duas frações como quatro números, o que reflete a falta de uma imagem mental para a quantidade que uma fração representa. A associação entre a resolução de problemas e a modelação deve assumir um papel de destaque ao longo da escolaridade para que os alunos se consciencializem do papel da matemática no quotidiano e desenvolvam as aprendizagens visadas. Deste modo, este estudo tem como objetivo conhecer que compreensões revelam os alunos do 5.º ano nas operações com números racionais na sua representação em fração, antes e após a realização de uma experiência de ensino de cunho exploratório direcionada à aprendizagem destes números, de forma a verificar o desenvolvimento do sentido de número racional e do sentido de operação.

2 SENTIDO DE NÚMERO RACIONAL E SENTIDO DE OPERAÇÃO

Apesar de as operações com números racionais serem um subtópico com muita relevância na aprendizagem dos números racionais, suscitam grande dificuldade aos alunos, que demonstram não compreender concetualmente os processos envolvidos quando adicionam, subtraem, multiplicam ou dividem frações. Acabam muitas vezes por confundi-los, aplicando procedimentos de uma operação a outra (Behr & Post, 1992; Zembat, 2017). O sentido de número racional, fundamental na compreensão dos números racionais, permite ao aluno compreender: (i) que as frações representam um número e não apenas partes ou situações; (ii) que a unidade pode ser dividida em partes cada vez menores, e a mesma quantidade fracionária pode ser representada por diferentes frações (ideia de particionamento); (iii) o significado do denominador, isto é, que frações unitárias com diferentes denominadores têm diferentes grandezas; quanto maior o número de partes em que o todo é dividido, menor é o tamanho de cada parte; que $\frac{1}{n}$ cabe *n* vezes no todo a que se refere; que frações com denominadores diferentes representam diferentes unidades; (iv) concetualização da unidade; (v) a grandeza da fração, nomeadamente que esta é determinada pela relação entre numerador e denominador, e saber que as frações não unitárias são uma adição de frações unitárias; e (vi) que as frações podem representar quantidades maiores que um (Lewis & Perry, 2014). Também Wilkins e Norton (2018) referem que compreender a fração $\frac{m}{n}$ como *m* medidas da fração unitária $\frac{1}{n}$ através de iterações, associado ao significado de medida das frações, constitui uma progressão no desenvolvimento do conceito de fração pelos alunos, podendo ser uma mais-valia para a compreensão das operações.

O sentido de operação é uma competência igualmente importante no trabalho com números racionais. Segundo Huinker (2002), envolve: (i) compreender os diferentes significados e modelos das operações; (ii) reconhecer e descrever situações da vida real para as diferentes operações; (iii) atribuir significado aos símbolos e à linguagem matemática formal; (iv) traduzir entre diferentes representações; (v) compreender a relação entre as operações; e (vi) conhecer os efeitos das operações sobre os números, permitindo refletir sobre a razoabilidade dos resultados. Importa ainda referir a importância do uso de modelos na compreensão dos números racionais, particularmente das operações com frações na medida em que permite ao aluno desenvolver imagens mentais das representações simbólicas. Numa fase inicial de abordagem de uma operação, o aluno deverá modelar a situação, acompanhando-a da expressão numérica que a traduza, de forma a perceber como surge o algoritmo e o que representa cada uma das suas etapas (Behr & Post, 1992).

3 OPERAÇÕES

Adição e subtração

A adição e a subtração são as primeiras operações que os alunos aprendem na representação em fração, sendo frequente aplicarem a operação separadamente a numeradores e denominadores para encontrar os resultados, não compreendendo a necessidade de obter denominadores comuns ou o papel das frações equivalentes, compreensões fundamentais no trabalho com estas operações (Braithwaite et al., 2017). Cramer, Wyberg e Leavitt (2009) referem que a operação de subtração é mais difícil de identificar pelos alunos do que a adição. Para Behr e Post (1992), o uso de modelos pode promover estas compreensões, pois, ao representar as quantidades a operar, representadas por frações com denominadores diferentes, o aluno verifica que as partes têm diferentes tamanhos, não sendo possível a sua adição. Desta forma, o uso de modelos contribui para o desenvolvimento de compreensões associadas ao sentido de número racional e sentido de operação.

Multiplicação

A multiplicação é, muitas vezes, encarada como adição sucessiva (significado “grupos equivalentes”), originando sempre um resultado maior do que qualquer dos fatores. Tarefas envolvendo o significado “relação multiplicativa”, no campo dos números racionais, são uma mais-valia possibilitando aos alunos compreender que na multiplicação o produto obtido poderá ser menor que os fatores (Greer, 1992). Apesar da variedade de contextos para a multiplicação, é frequente esta operação ser ensinada com base em procedimentos, sem que o aluno compreenda o seu significado. Para Johanning (2017), um dos erros mais comuns relaciona-se com a ordem dos fatores na expressão multiplicativa, sendo frequente esta ter início com a primeira fração escrita no enunciado do problema, o que nem sempre traduz a situação real. O uso de modelos permite aos alunos compreender como a unidade muda ao longo do problema, o que cada fração representa no contexto do problema, e que o produto pode ser menor que os fatores (Behr & Post, 1992). Estas compreensões contribuem para o desenvolvimento do sentido de número racional e sentido de operação.

Divisão

A divisão, muitas vezes associada a contextos de partilha equitativa, é encarada como uma operação que origina um quociente menor que o dividendo e em que este tem de ser superior ao divisor, o que leva os alunos, muitas vezes, a trocar o dividendo pelo divisor. Para uma compreensão e uso significativos do conceito de divisão, a sua abordagem deve contemplar o significado de medida, que conduz ao raciocínio “quantas vezes o divisor cabe no dividendo?” (Greer, 1992). Independentemente dos contextos utilizados para a abordagem da divisão, a regra “inverte e multiplica”, sem significado para o aluno, tem primazia em relação a qualquer outra forma de encarar a operação. O algoritmo do denominador comum, aliado à modelação numa fase inicial, oferece grandes possibilidades de uma compreensão concetual da divisão bem como ao desenvolvimento do sentido de número racional e sentido de operação (Zembat, 2015). Ao modelar uma divisão de frações, o aluno compreende o papel das diferentes frações, a utilidade de obter denominadores iguais e relação com a operação de subtração, no sentido em que verifica o número de vezes que encontra o divisor na quantidade do dividendo.

4 METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Este estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), envolvendo 4 dos 20 alunos de uma turma do 5.º ano de uma escola pública no Algarve (Portugal). A primeira autora deste artigo também participou como professora e investigadora. Nara, David, Ana e Nuno (nomes fictícios) foram selecionados por apresentarem relativa facilidade na comunicação oral, comparativamente com os restantes alunos da turma. Pretendia-se que os alunos a entrevistar pudessem evidenciar o seu raciocínio durante as entrevistas, por ilustrarem diferentes níveis de desempenho. Procurou-se, também, garantir a diversidade de género. As resoluções destes alunos são representativas do trabalho da restante turma. Nesta turma, os alunos estavam habituados a trabalhar sempre de modo individual, fazendo os exercícios do manual escolar. Para a recolha de dados foram aplicados dois testes que envolviam diversos conceitos associados aos números racionais, com especial foco nas operações com frações. Os alunos podiam resolver as questões (de resposta livre) usando a estratégia que preferissem, pois, nenhuma indicação era dada quanto à estratégia de resolução que deviam seguir.

O teste inicial (antes de iniciar a experiência de ensino) foi construído com base nos dados de um estudo-piloto realizado anteriormente com alunos de uma turma do 4.º ano e com base numa revisão de literatura sobre o tema em estudo. O teste pretendia identificar os conhecimentos prévios dos alunos relativos a conceitos de número racional, nomeadamente adição e subtração de frações, conteúdos abordados anteriormente. O teste final (após a experiência de ensino), além de outros conceitos relativos aos números racionais, envolvia as quatro operações com estes números uma vez que a multiplicação e a divisão de frações são conteúdo do 5.º ano, pelo que estas operações foram introduzidas durante a experiência de ensino. A divisão surgiu com o significado de medida e a multiplicação com o significado de relação multiplicativa. Este teste tinha como objetivo verificar as aprendizagens dos alunos, resultantes da experiência de ensino, no que diz respeito à compreensão das quatro operações. Posteriormente à realização de cada teste, foram realizadas entrevistas semiestruturadas individuais aos quatro alunos (áudio gravadas e transcritas na íntegra), conduzidas pela primeira autora deste artigo, tendo em vista interpretar os seus raciocínios na resolução das questões. O foco neste subtópico baseou-se no importante papel que as operações com números racionais desempenham na educação matemática, e que continuam a causar grandes obstáculos aos alunos. Os dados das entrevistas foram confrontados com as resoluções dos alunos nos testes, de forma a analisar o seu sentido de número racional e sentido de operação, nas perspectivas de Lewis e Perry (2014) e Huinker (2002) e a forma como estes evoluíram.

A experiência de ensino

A experiência de ensino foi construída de forma a enfatizar compreensões essenciais no trabalho com os números racionais, nomeadamente as suas quatro operações, na representação em fração. Adição, subtração, multiplicação e divisão foram introduzidas separadamente, nesta ordem, após a abordagem às diferentes representações dos números racionais e aos significados das frações (constituiram as últimas 11 tarefas do conjunto de 18 tarefas da experiência de ensino, em contextos de resolução de problemas). A experiência de ensino seguiu uma abordagem exploratória (Ponte & Quaresma, 2014), ou seja, a tarefa era apresentada aos alunos, estes trabalhavam autonomamente e de modo individual (usual na turma) e, no final, havia uma discussão coletiva das suas estratégias de resolução e uma síntese. A abordagem às quatro operações teve como base o uso de modelos circulares ou retangulares, fornecidos no enunciado das tarefas, para que os alunos representassem as quantidades e compreendessem a relação entre elas de forma a, eles próprias, construírem os respetivos algoritmos. Na adição e subtração de duas frações, os alunos representavam, por sombreamento, as quantidades a operar em dois modelos distintos, verificando a necessidade de obter subdivisões do mesmo tamanho (denominadores comuns) de forma a ser possível realizar a operação. Quando as subdivisões estavam iguais, tendo obtido, por exemplo, sextos em cada modelos, adicionavam o número total de sextos e representavam-no, num terceiro modelo, dividido da mesma forma. No caso da subtração, semelhante à adição, os alunos subtraíam as quantidades após ambas estarem representadas pela mesma unidade.

Na multiplicação de frações, abordada com o significado "relação multiplicativa", os alunos representavam num modelo a quantidade inicial e, posteriormente, a quantidade representada pela fração operador nessa quantidade inicial. Este processo permitia verificar e compreender a mudança de unidade ao longo do problema bem como o facto de esta operação poder originar um resultado menor que a quantidade inicial. Na divisão de frações, abordada com o significado de "medida", foi promovido o uso do algoritmo do denominador comum. Os alunos começavam por representar nos modelos a quantidade inicial, indicada pelo dividendo. A seguir, nessa quantidade, verificavam quantos grupos iguais podiam obter, considerando para cada grupo a quantidade indicada pelo divisor. Isto permitia compreender a necessidade de denominadores comuns e a divisão dos numeradores como se se tratasse de uma divisão de números inteiros. Também permitia mais facilmente interpretar o "resto", caso a divisão não fosse inteira, bem como o facto de esta operação poder originar um resultado superior ao dividendo. As transformações realizadas nos modelos eram registadas, em simultâneo, na forma simbólica, através de expressões numéricas. Os alunos estabeleciam conexões entre as etapas da modelação e os processos realizados simbolicamente, que iriam dar lugar aos algoritmos, compreendedo-os concetualmente. Numa fase posterior, os alunos poderiam escolher a estratégia de resolução que preferiam, recorrendo apenas ao algoritmo, ao modelo, ou a ambos.

5 RESULTADOS

Resultados antes da experiência de ensino

Adição. A adição de números racionais, na sua representação em fração, surgiu na questão “O Pedro, o João e o Gonçalo iniciaram um percurso de 6 km num parque perto da escola, mas nenhum deles conseguiu chegar ao fim. O Pedro desistiu ao fim de $\frac{2}{6}$ do percurso, o João percorreu $\frac{2}{3}$ e o Gonçalo $\frac{1}{2}$ do percurso. Que fração representa a distância percorrida pelos três amigos juntos? Explica como pensaste.” Nara (figura 1) e David identificaram a operação a utilizar para chegar ao resultado, tendo adicionado numeradores e denominadores, de forma independente, convictos da validade do procedimento.

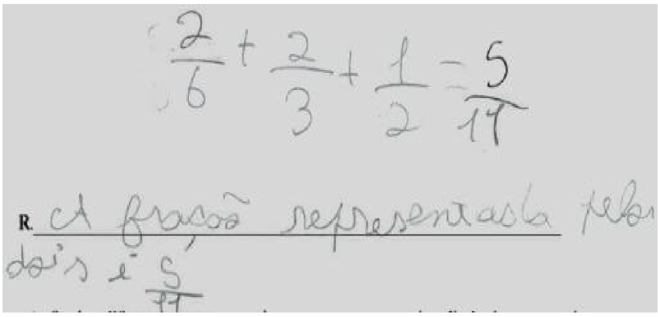

Figura 1: Resolução de Nara de uma tarefa de adição de frações
(Fonte: dados da pesquisa)

Durante a entrevista, quando questionados relativamente à possibilidade de adicionar frações com denominadores diferentes e o que tal representava, os alunos mostraram total estranheza perante a questão colocada. Ana tentou recorrer a uma representação pictórica das quantidades a adicionar, no entanto, acabou por abandonar a sua estratégia. Durante a entrevista, optou por adicionar numeradores e denominadores. Nenhum destes alunos conseguiu interpretar o resultado obtido, referindo “não sei se fizeram 5 ou se fizeram 11 quilómetros!” (Ana). Nuno (figura 2) dividiu o total de quilómetros do percurso pelos denominadores das frações e, de seguida, adicionou os três quocientes.

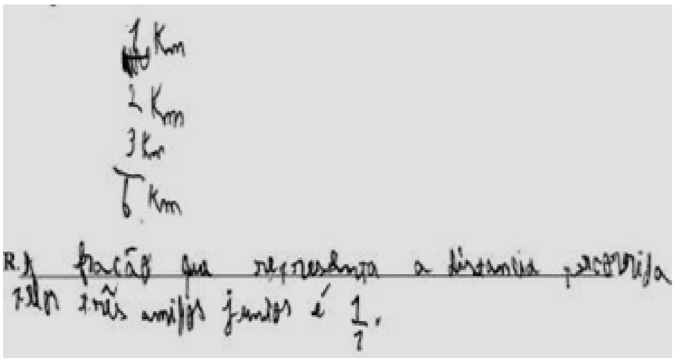

Figura 2: Resolução de Nuno de uma tarefa de adição de frações
(Fonte: dados da pesquisa)

Como o resultado, 6, correspondia ao número de quilómetros do percurso, referiu que a resposta seria $\frac{1}{1}$, e explicitou:

> *Nuno: Eu aqui olhei para os quilómetros e juntei tudo nesta conta.*
> *Professora: Porque é que a fração é um sobre um?*
> *Nuno: Porque é equivalente a 100%, que equivale aos 6 quilómetros, que é o percurso todo.*
> (Diálogo entre a professora e um aluno, 2017)

Apesar das dificuldades encontradas na sua resolução, Nuno demonstrou compreensão das diferentes representações dos números racionais e do conceito de unidade. De um modo geral, estes alunos identificaram uma situação aditiva, mas nenhum deles conseguiu concretizá-la corretamente.

Subtração. Na subtração de frações, foi apresentado aos alunos o seguinte problema, que decorre do anterior: "Qual a diferença entre o menino que percorreu maior distância e o menino que percorreu menor distância? Explica como pensaste." Nara identificou a fração $\frac{2}{6}$ como a maior porque "é a que tem números maiores, por causa aqui do 6", e a fração $\frac{2}{3}$ como a menor, sem, no entanto, justificar. A seguir, subtraiu numeradores e denominadores, obtendo $\frac{0}{3}$, que tentou interpretar: "então, é 0! Mas como tem aqui este 3… Não sei!" Ana tentou novamente representar as quantidades em modelos retangulares, salientando como diferença o facto de uma quantidade ser menor do que a outra. Nuno e David não interpretaram corretamente a questão. À semelhança do que tinha feito anteriormente, Nuno (figura 3a) subtraiu os quocientes (maior e menor) determinados anteriormente, obtendo uma diferença de dois quilómetros, que indicou como resposta. David (figura 3b) determinou o número de quilómetros que cada amigo percorreu, de forma incorreta, realizando a diferença entre o valor maior e o menor.

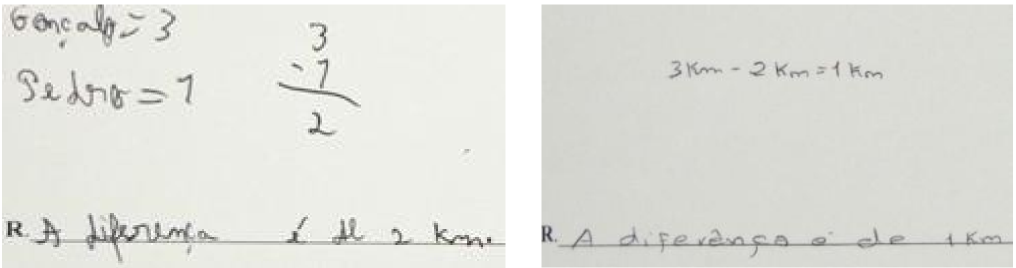

Figura 3: Resoluções de Nuno e David de uma tarefa de subtração de frações
(Fonte: dados da pesquisa)

Estes resultados evidenciam a dificuldade dos alunos em problemas de subtração, nomeadamente na identificação desta operação. A estratégia de Ana sugere que os modelos poderiam ser uma ferramenta para apoiar o raciocínio dos alunos, na passagem do conhecimento informal para o conhecimento formal, se construídos e explorados de forma adequada. Ainda assim, permitiram à aluna verificar a grandeza das frações.

Resultados após a experiência de ensino

Adição. Relativamente à adição de frações após a experiência de ensino, foi apresentado aos alunos o seguinte problema: “A Clara, a Maria e a Gabriela iniciaram um percurso. A Clara parou para descansar depois de ter feito $\frac{2}{5}$ do percurso, a Maria parou ao fim de $\frac{4}{10}$ e a Gabriela ao fim de $\frac{3}{5}$. Que fração representa a distância percorrida pelas três amigas juntas até ao momento em que pararam para descansar? Explica como pensaste.” Nara, Ana e David identificaram a operação a usar e realizaram-na corretamente. Nara referiu “como as partes que juntamos não são do mesmo tamanho, temos que por iguais. Depois é que podemos juntar!”. Referiu ainda que “em $\frac{3}{5}$ as partes são maiores porque a figura só está dividida em 5 partes e em $\frac{4}{10}$ são mais pequenas porque a unidade tinha de se dividir em 10 partes e isso dava partes muito pequeninas!”. Analisou o resultado obtido e acrescentou “deu $\frac{14}{10}$, que é 1,4… Dá quase um percurso e meio! Acho que é isso porque, se o percurso fosse 10 quilómetros, este aqui fez logo 6. Estes é que fizeram só 4!” Ana também apresentou a sua justificação “como aqui em baixo não era tudo do mesmo tamanho, fiz para ser […] depois somei as partes todas, em cima, e deixei o de baixo, que diz o tamanho das partes!”

David, por seu lado, obteve denominadores comuns por divisão dos termos de uma das frações, apresentando o resultado na forma simplificada e justificou: “podia ter metido os denominadores todos maiores, mas meti mais pequenos. É a mesma coisa, porque são frações equivalentes! Representam a mesma quantidade!” Acrescentou ainda que “assim, fico logo com as frações mais pequenas, já não tenho de simplificar”. Interpretou o resultado $\frac{7}{5}$ como “o percurso todo era cinco partes e elas todas juntas fizeram sete dessas partes, que é sete bocadinhos de $\frac{1}{5}$!” David atribuiu significado ao resultado da sua operação e mostrou compreender a grandeza da fração ao mencionar a fração unitária que a constitui. Nuno não adicionou corretamente os numeradores devido a erros no processo de obtenção de frações equivalentes. Referiu que o resultado $\frac{10}{10}$ que obteve é igual a uma unidade. Durante a entrevista, fez uma nova tentativa de resolução. Interpretou o novo resultado, $\frac{14}{10}$, como “elas juntas fizeram mais do que um percurso todo porque, de 10 bocadinhos, que era o percurso todo, elas fazem 14!” Acrescentou ainda que “se a gente puser isto aqui com vírgula, dá um vírgula… quatro, que é um percurso e mais um bocadinho!”

Assim, a adição de frações, após a experiência de ensino, registou um melhor desempenho e a maioria dos alunos demonstrou alguma compreensão concetual e flexibilidade na realização desta operação, compreendendo-a concetualmente. As justificações destes alunos demonstraram igualmente importantes compreensões associadas aos números racionais de modo geral, nomeadamente a conversão entre representações (Nuno) ou o significado de medida das frações (David).

Subtração. Na sequência da questão anterior, surgiu um problema de subtração de frações “No final do percurso decidiram comer rebuçados de um saco com $\frac{3}{4}$ kg. Juntas comeram $\frac{1}{3}$ kg. Que quantidade deixaram?” David e Nara identificaram a operação que lhes permitia chegar à resposta: “se comeram $\frac{1}{3}$ de kg, e o saco tinha $\frac{3}{4}$ de kg, temos de fazer este ($\frac{3}{4}$) menos aquele ($\frac{1}{3}$) […] não podemos fazer três menos um, porque as partes não são iguais e têm de estar!” (David) e “é de três quartos que tiramos um terço porque tínhamos três quartos, que não chega a um quilo de rebuçados. É… 75%!” (Nara). Interpretaram os resultados obtidos como “se 1 kg está dividido em 12 partes, sobraram 5 dessas partes depois de elas comerem!” (David) ou “é menos de metade de 1 quilo” (Nádia). Ana, apesar de ter identificado e realizado corretamente a operação, voltou à estratégia inicial de subtrair numeradores e denominadores. Quando questionada acerca da sua resolução, explicitou:

Ana: Fiz $\frac{3}{4}$ - $\frac{1}{3}$. O $\frac{3}{4}$ era o saco, o que havia no início, e $\frac{1}{3}$ é o que elas tinham comido!
Professora: Podemos subtrair frações com denominadores diferentes?
Ana: Não, porque são coisas diferentes!
[…]

Ana: É que aqui ($\frac{3}{4}$), é como se as partes fossem mais pequenas porque tinha mais divisões e aqui ($\frac{1}{3}$) são maiores porque tem menos divisões, assim, tem mais espaço para cada fatia! Eu tinha feito assim [vezes 3 e vezes 4] mas depois… não sei!
(Diálogo entre a professora e uma aluna, 2018)

Ana mostrou não estar confiante com a sua resolução inicial, porém, fez uma análise adequada das frações envolvidas na operação.

Nuno (figura 4) tentou resolver a questão através de uma representação pictórica. Representou um quadrado dividido em quatro partes iguais, riscando uma delas. De seguida, interpretou a fração $\frac{1}{3}$ como a quantidade que cada pessoa comeu: “um rebuçado, de um total de três rebuçados.” Assim, em cada subdivisão do quadrado representou $\frac{1}{3}$, desenhando três círculos e sombreando um. Referiu que foram deixados seis rebuçados, o total de círculos não sombreados.

De um modo geral, os alunos mostraram um progresso a nível da sua compreensão desta operação. Na sua maioria, não sentiram necessidade de recorrer a modelos, utilizando corretamente o algoritmo como estratégia de resolução e compreendendo o seu significado. Mostraram ainda familiaridade com a equivalência de frações, o significado do denominador e a conversão entre representações, um dos aspetos abordados durante a experiência de ensino.

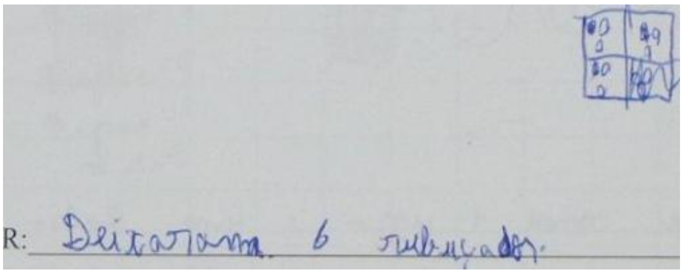

Figura 4: Resolução de Nuno de uma tarefa de subtração de frações
(Fonte: dados da pesquisa)

Multiplicação. A multiplicação foi apresentada aos alunos com o significado “relação multiplicativa”, através do problema: “Para a decoração de um dos bolos, a Maria colocou pepitas de chocolate em $\frac{5}{10}$ do bolo e coco ralado em $\frac{2}{3}$ da parte que tinha as pepitas de chocolate. Que fração de todo o bolo tem ambas as decorações?” Para resolver esta questão, David multiplicou as duas frações, embora tenha trocado a ordem dos fatores, apresentando o resultado na forma irredutível. Justificou que “a Maria deitou coco ralado em cima das pepitas, por isso, era na parte que já estava sombreada! […] fiz vezes, porque é uma parte de outra!” A seguir, analisou o resultado “se só comemos uma parte de metade, porque $\frac{5}{10}$ é metade, tem de dar uma parte ainda mais pequena, acho eu! E $\frac{1}{3}$ é mais pequeno que metade, por isso, acho que está bem!”. Nara (figura 5) realizou uma subtração, tendo cometido diversos erros a nível procedimental e concetual. Durante a entrevista, contudo, referiu “eu pensava que o coco tirávamos do chocolate! Mas não… foi nesta parte [$\frac{5}{10}$]! Acho que não tínhamos que tirar! Era de vezes, para dar o bocadinho que tem os dois!”

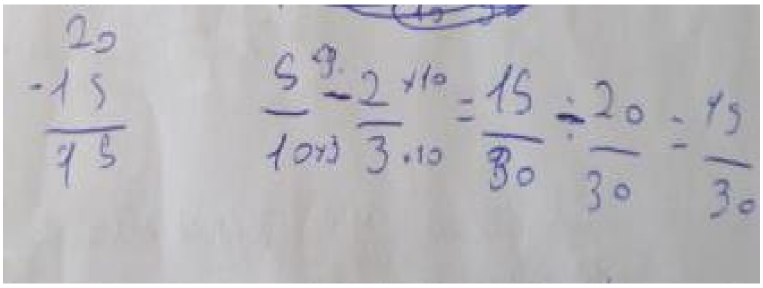

Figura 5: Resolução de Nara de uma tarefa de multiplicação de frações
(Fonte: dados da pesquisa)

Nuno tentou usar um modelo circular para a resolução da questão, no entanto, sendo a última questão do teste, referiu não ter tido tempo, apresentando uma resolução que sabia estar incorreta. Durante a entrevista, foi-lhe dada oportunidade para resolver a questão:

Nuno: Eu tinha de fazer dez fatias e pintar cinco e, depois, era $\frac{2}{3}$ com coco…
Investigadora: Onde é que poderias sombrear esses $\frac{2}{3}$?
(…)
Investigadora: Não te esqueças que o coco era na parte que tinha as pepitas de chocolate!
Nuno: Ah, pois é! Acho que tinha de dividir esta parte [$\frac{5}{10}$] para pôr a outra em cima, porque é de! E depois era uma conta de vezes!
(Diálogo entre a professora e um aluno, 2018)

Nuno mostrou alguma compreensão do significado relação multiplicativa da multiplicação, embora tenha tido ajuda da professora para perceber o significado de “uma parte *de* outra”.

Ana (figura 6) também recorreu a um modelo circular no qual tentou representar $\frac{5}{10}$ na parte não sombreada. Verificando que o sombreamento não correspondia a metade da figura, fez uma segunda tentativa. Ao representar $\frac{2}{3}$ nessa metade (lado direito), Ana efetuou as divisões na horizontal, não conseguindo chegar a uma solução. Estes resultados mostram alguma dificuldade associada à compreensão deste significado da multiplicação, anteriormente desconhecido dos alunos. Determinar uma parte de outra ou subdividir modelos circulares pode causar algumas dificuldades nos alunos e limitações nas suas resoluções, demonstrando a falta de familiaridade destes alunos com atividades desta natureza.

Figura 6: Resolução de Ana de uma tarefa de multiplicação de frações
(Fonte: dados da pesquisa)

Divisão. A divisão, com o significado de medida, surgiu no problema "A Maria está a fazer bolos para o aniversário da irmã. Ela tem $2\frac{1}{4}$ kg de açúcar e cada receita de bolo de chocolate leva $\frac{1}{8}$ kg deste ingrediente. Quantas receitas de bolo de chocolate pode fazer? Apresenta o resultado na forma de fração simplificada." David e Nara tiveram um desempenho positivo nesta questão, usando o algoritmo do denominador comum, que mostraram compreender. David referiu "aqui eu dividi para ver quanto é que isto ($\frac{1}{8}$) cabia em $2\frac{1}{4}$ e deu este resultado, por isso, pode fazer 18 bolos! […] $\frac{1}{8}$ cabe 18 vezes aqui [$2\frac{1}{4}$]." Nara teve um desempenho igualmente correto, porém, não deu como resposta o numerador da fração obtida (18), resultante da divisão das quantidades. Em vez disso, arranjou uma fração equivalente, $\frac{36}{2}$, que indicou como resposta. Durante a entrevista, referiu "vamos fazendo grupos de $\frac{1}{8}$ com a quantidade inicial para ver quantos podemos fazer! São 18 grupos!" A aluna acrescentou ainda "vamos retirando sempre esta quantidade", estabelecendo uma relação entre este significado da divisão e a realização de subtrações sucessivas. Não conseguiu justificar a fração equivalente obtida. Justificaram o uso deste algoritmo da seguinte forma: "as partes não eram iguais e tinham de ser" (Nara) ou "só podemos arranjar grupos de $\frac{1}{8}$ quando as outras partes também são oitavos" (David). Ana (figura 7a), porém, adicionou as quantidades ("ela queria fazer um bolo com essa quantidade toda, por isso, fiz mais!") e não simplificou corretamente o resultado obtido.

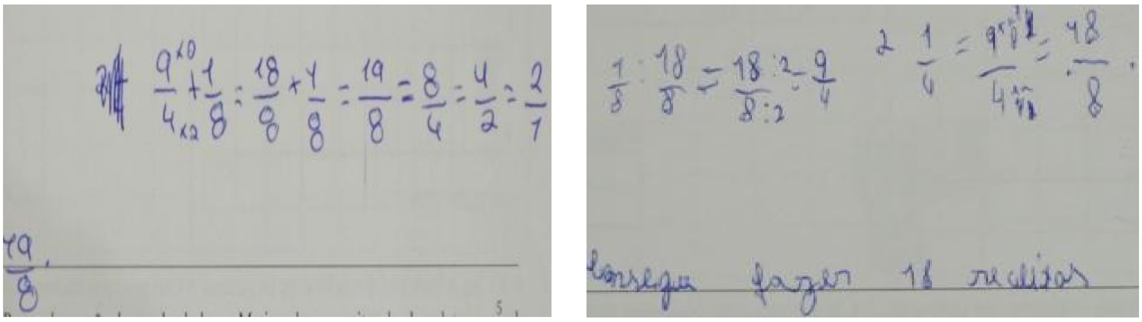

Figura 7: Resoluções de Ana e de Nuno de uma tarefa de divisão de frações
(Fonte: dados da pesquisa)

Nuno (figura 7b) utilizou o algoritmo do denominador comum, explorado durante a experiência de ensino, contudo, trocou o dividendo com o divisor ($\frac{1}{8} : \frac{18}{8}$) pelo que, perante a impossibilidade de dividir 1 por 18, inverteu a operação. O resultado obtido, $\frac{18}{8}$, simplificou, obtendo $\frac{9}{4}$. Durante a entrevista, explicou “acho que tinha de ser ao contrário! É a quantidade total que dividimos pelo que leva cada bolo!” Questionado relativamente à resposta que indicou (18 receitas), referiu que “aqui as partes já estão iguais! Se eu tirasse o 8… dá 18 a dividir por 1, que dá 18!” O aluno compreendeu a necessidade de obter denominadores comuns e o facto de dividir apenas os numeradores, uma vez que as unidades eram as mesmas (oitavos) embora o tenha feito de forma invertida. Este problema mostrou estar ao alcance da maioria dos alunos, que compreenderam o significado de medida desta operação e superaram o mal-entendido de que a divisão “diminui sempre”, pois dividiram para obter uma quantidade maior.

6 DISCUSSÃO

Antes da experiência de ensino, os conhecimentos demonstrados pelos alunos relativamente às operações de adição e subtração de frações, a nível da sua compreensão concetual e procedimental, eram muito precários. As suas resoluções e respetivas justificações permitem perceber lacunas no seu sentido de número racional (Lewis & Perry, 2014) e sentido de operação (Huinker, 2012). Relativamente ao sentido de número racional, quando adicionaram e subtraíram numeradores e denominadores de forma independente, demonstraram a incompreensão de que uma fração representa um número. A mesma incompreensão foi demonstrada quando estes alunos não conseguiram interpretar os resultados destas operações, nomeadamente $\frac{5}{11}$ (“não sei se fizeram 5 ou se fizeram 11 quilómetros!", Ana) e $\frac{0}{3}$ ("então, é 0! Mas como tem aqui este 3… Não sei!", Nara). Também a divisão do total de quilómetros pelos denominadores das frações, ignorando os numeradores, evidencia esta incompreensão. Conhecer a grandeza das frações também não esteve ao alcance destes alunos quando indicaram que a fração que representa maior quantidade é aquela em que os números envolvidos são maiores, por exemplo, "[$\frac{2}{6}$ é a maior porque] é a que tem números maiores, por causa aqui do 6" (Nara). Incompreensões relativas ao significado do denominador também foram evidentes em diversas situações: (i) ao aplicar a operação a numeradores e denominadores, o aluno não compreende que está a operar com unidades diferentes; e (ii) estimar a grandeza de uma fração com base na grandeza dos números envolvidos (individualmente).

No início do estudo, o sentido de operação (Huinker, 2012) destes alunos também apresentava inconsistências em diversos aspetos. Apesar de compreenderem a adição como "juntar quantidades", mesmo que não tivessem realizado corretamente a operação, nem todos os alunos associaram a expressão "qual a diferença" à operação de subtração, mostrando não reconhecer situações da vida real para as diferentes situações. Estes dados corroboram a afirmação de Cramer et al. (2009), de que a operação de subtração é mais difícil de identificar do que a adição. Uma das razões para esta dificuldade pode ser o facto de o enunciado não especificar que se pretendia determinar quais as frações que representavam uma quantidade maior e uma quantidade menor e, posteriormente, retirar a segunda quantidade da primeira, tendo os alunos acabado por se basear no número de quilómetros para determinar essa diferença. Nas resoluções dos alunos não se observou conhecimento relativo a modelos para representar as operações, à exceção de Ana que, no entanto, não o fez corretamente, originando conclusões erradas. Conhecer os efeitos das operações nos números e refletir sobre os resultados obtidos é fundamental no sentido de operação, porém, também não se verificou nestas resoluções. A interpretação do resultado $\frac{5}{11}$ é exemplo disso. Se, à quantidade $\frac{1}{2}$, adicionamos $\frac{2}{3}$, que representa mais de metade, não poderemos obter um resultado inferior a metade. Esta compreensão não foi alcançada pelos alunos. De um modo geral, estes alunos não atribuíam significado aos símbolos e à linguagem matemática formal. Importa, no entanto, salientar uma componente associada ao sentido de operação demonstrada por Nuno, nomeadamente a tradução entre modos de representação "[$\frac{1}{1}$] é equivalente a 100%, que equivale aos 6 quilómetros, que é o percurso todo".

Após a experiência de ensino, o desempenho dos alunos na adição e subtração de frações foi mais positivo, embora ainda tenha persistido alguma dificuldade na subtração (em Ana e Nuno). Relativamente ao sentido de número racional, estes alunos deixaram de aplicar a operação a numeradores e denominadores, passando a compreender cada fração como um número, bem como a necessidade de obter denominadores iguais ("como as partes que juntamos não são do mesmo tamanho, temos que por iguais. Depois é que podemos juntar!", Nara). Também mostraram compreensão do significado do denominador ao referir "em $\frac{3}{5}$ as partes são maiores porque a figura só está dividida em 5 partes e em $\frac{4}{10}$ são mais pequenas porque a unidade tinha de se dividir em 10 partes e isso dava partes muito pequeninas!" (Nara) ou "somei as partes todas, em cima, e deixei o de baixo, que diz o tamanho das partes que estão aqui!" (Ana). A justificação "[$\frac{7}{5}$] é sete bocadinhos de $\frac{1}{5}$", fornecida por David, evidencia igualmente compreensão da grandeza de uma fração. Este aluno refletiu uma importante compreensão de fração que vai além da sua interpretação como relação parte-todo, mostrando compreender a ação de iteração da fração $\frac{1}{5}$ para produzir o todo, o que está associado a uma conceção de medida, que, para Wilkins e Norton (2018), representa um progresso na sua compreensão de fração.

Quanto ao sentido de operação, estes alunos perceberam os diferentes significados das operações e também mostraram compreensão da conversão entre representações, quando referiram: "três quartos, que não chega a um quilo de rebuçados. É… 75%!" (Nara) ou "se a gente puser isto aqui [$\frac{14}{10}$] com vírgula, dá um vírgula… quatro" (Nuno). A verificação da razoabilidade dos resultados obtidos nas operações, que anteriormente não ocorria, passou a estar presente: "acho que é isso porque, se o percurso fosse 10 quilómetros, este aqui fez logo 6. Estes é que fizeram só 4!" (Nara). As justificações dos alunos demonstram ainda compreensão de que as frações podem representar quantidades maiores que um. Apenas Ana e Nuno mostraram algumas incompreensões no problema de subtração. Ana identificou e realizou corretamente a subtração, no entanto, possivelmente por não se sentir segura com a sua primeira tentativa de resolução, regressou à estratégia de subtrair numeradores e denominadores. O facto de os denominadores não serem múltiplos poderá ter dificultado o seu desempenho pois na adição este foi bastante positivo. Contudo, a aluna demonstrou uma importante compreensão associada ao significado do denominador: "Aqui ($\frac{3}{4}$) é como se as partes fossem mais pequenas porque tinha mais divisões e aqui ($\frac{1}{3}$) são maiores porque tem menos divisões, assim, tem mais espaço para cada fatia!" Nuno também demonstrou dificuldade nesta operação, possivelmente devido à forma como encarou a quantidade $\frac{1}{3}$ (uma parte de três), considerando unidades contínuas e discretas na sua resolução. No entanto, demonstrou a importância da modelação como auxílio ao raciocínio, durante a resolução de um problema.

Na multiplicação de frações, o desempenho dos alunos foi variado, contudo, em termos gerais, acabaram por compreender o significado de “obter uma parte de outra”. Segundo Greer (1992), o significado “grupos equivalentes” para a multiplicação, que os alunos estão mais habituados, não lhes permite associar o contexto “tirar uma parte de outra” a esta operação, acabando por encarar como “retirar”. No caso de Ana, embora o particionamento de uma das metades obtidas não tivesse sido realizado corretamente, a aluna mostrou alguma compreensão deste significado da multiplicação, ao tentar encontrar a quantidade $\frac{2}{3}$ na quantidade inicial. Possivelmente, num modelo retangular, o seu desempenho teria sido mais positivo. David, por seu lado, foi bem-sucedido nesta questão, demonstrando compreensão deste significado da multiplicação já que multiplicou para encontrar uma parte de outra. Contudo, alterou a ordem dos fatores na sua expressão, seguindo a ordem do enunciado, cometendo um erro frequente na multiplicação de duas frações (Johanning, 2017). De um modo geral, estes alunos evidenciaram sentido de número racional ao compreenderem uma fração como um número, ao atribuírem significado ao denominador, ao compreenderem a unidade e a grandeza das frações. Quanto ao sentido de operação, estes alunos perceberam os diferentes significados para as operações (“era de vezes, para dar o bocadinho que tem os dois!”, Nara) e compreenderam o efeito das operações nos números (“se só comemos uma parte de metade, tem de dar uma parte ainda mais pequena, David).

Na operação de divisão de frações, estes alunos compreenderam uma fração como um número ou uma quantidade e o significado do denominador (“só podemos arranjar grupos de $\frac{1}{8}$ quando as outras partes também são oitavos”, David), evidenciando sentido de número racional. Quanto ao sentido de operação, estes alunos associaram a operação ao respetivo contexto embora, em algumas situações, o tivessem feito apenas durante a entrevista, tal como na multiplicação. Mostraram compreender os diferentes significados das operações (“aqui eu dividi para ver quanto é que isto ($\frac{1}{8}$) cabia em $2\frac{1}{4}$, David; ou “vamos fazendo grupos de $\frac{1}{8}$ com a quantidade inicial para ver quantos podemos fazer! São 18 grupos!”, Nara). Isto mostra compreensão da relação entre dividendo, divisor e quociente, fundamental para o sucesso dos alunos nas operações (Post, Harel, Behr & Lesh, 1991). Também compreenderam a relação entre as operações (“vamos retirando sempre esta quantidade”, Nara), estabelecendo uma relação entre este significado da divisão e a realização de subtrações sucessivas. Por fim, analisaram adequadamente a razoabilidade dos resultados ao referirem: “pode fazer 18 bolos! […] $\frac{1}{8}$ cabe 18 vezes aqui [$2\frac{1}{4}$]” (David). Apesar de Nuno ter trocado a ordem das frações, tentou corrigir este erro, ao indicar “É a quantidade total que dividimos pelo que leva cada bolo!” O aluno compreendeu a necessidade de obter denominadores comuns e o facto de dividir apenas os numeradores, uma vez que as unidades já eram as mesmas (oitavos) embora o tenha feito de forma invertida. Quanto a Ana, teve um desempenho menos positivo, mostrando dificuldade com diferentes significados para as operações.

7 CONCLUSÃO

Um dos principais aspetos da abordagem seguida neste estudo diz respeito aos significados da multiplicação e da divisão utilizados. Optámos pelos significados de “relação multiplicativa” para a multiplicação e “medida” para a divisão, o que mostrou ser uma mais-valia para os alunos superarem os mal-entendidos usuais nestas operações. A maioria dos alunos utilizou a divisão para obter um “resultado maior” e a multiplicação para obter um “resultado menor”. Na divisão de frações, o contexto de medida forneceu um importante suporte para a sua compreensão, usando a abordagem do denominador comum. A forma como David, após a experiência de ensino, interpretou o resultado da adição, mostra igualmente a importância de um esquema de medição na compreensão do conceito de fração, pelo que seria importante envolver os alunos em tarefas que requerem iteração de frações unitárias que, posteriormente, se generaliza a frações próprias. De modo geral, a interpretação dos enunciados dos problemas, semelhantes em ambos os momentos, sofreu uma melhoria significativa. As resoluções sem sentido destes alunos, designadamente os modelos construídos incorretamente e os algoritmos errados e sem compreensão, deram lugar a uma compreensão concetual, evidenciada pelas suas resoluções e justificações.

A multiplicação e a divisão constituem conceitos complexos, novos no 5.º ano, pelo que os alunos tiveram o primeiro contacto com estas operações apenas durante a experiência de ensino. Isso poderá constituir uma possível razão para as dificuldades verificadas. Contudo, a operação de divisão registou resultados favoráveis e os alunos demonstraram uma compreensão flexível da relação entre dividendo, divisor e quociente.

Estes resultados permitem ainda constatar a viabilidade do uso de modelos para a compreensão concetual das frações e das operações com frações, como sugerido por Cramer et al. (2009), bem como para o desenvolvimento do sentido de número racional e sentido de operação, tendo sido diversas as situações em que estes alunos estabeleceram relações com o processo de modelar. Passaram a associar as ações realizadas aos símbolos, construindo eles próprios os algoritmos para as operações, e desenvolvendo compreensão concetual de cada uma das suas etapas. Ideias e conceitos que antes eram demasiado abstratos, tornaram-se mais acessíveis à sua compreensão. É de referir que, a justificação “temos que por [as partes] iguais” (Nara), na adição e subtração, ou o facto destes alunos procurarem sombrear uma parte sobre outra, na multiplicação, evidenciam uma forte relação entre algoritmos e modelos. Também a análise dos resultados obtidos evidenciou uma associação com o uso de modelos, nomeadamente por David na divisão de frações. Os contextos de resolução de problemas desempenharam um papel fundamental, permitindo aos alunos explorar ideias e, principalmente, raciocinar sobre as situações, atribuindo significado às operações neles implícitas, como referem McIntosh et al. (1992). Os resultados aqui apresentados mostram que estes alunos estão a construir o seu sentido de número racional e o seu sentido de operação, ainda que de forma gradual. Abrem, ainda, caminho para futuras investigações acerca do modo como os alunos vinculam as representações (modelos) a símbolos matemáticos. Uma vez que os métodos numéricos são rápidos e eficazes, quando esses métodos são desenvolvidos através da modelação e raciocínio, os alunos têm uma maior oportunidade de compreender porquê e como eles funcionam, bem como quando são apropriados para usar.

REFERÊNCIAS

Behr, M., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2nd ed.). (pp. 201-248). Boston, MA: Allyn & Bacon.

Braithwaite, D., Pyke, A., & Siegler, R. (2017). A computational model of fraction arithmetic. *Psychological Review,* v. 124(5), 603-625.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2009). *Rational Number Project: Fraction operations and initial decimal ideas*. [Companion module to RNP: Fraction Lessons for the Middle Grades]. Recuperado de: https://docplayer.net/22797823-Rational-number-project.html.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: MacMillan.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals, and percents.* Heinemann.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning.* (pp. 276-295). New York, NY: MacMillan, 1992.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller & G. Bright (Org.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: NCTM 2002 Yearbook* (pp. 72-78). Reston, VA: NCTM.

Johanning, D. (2017). A questioning framework for supporting fraction multiplication understanding. In Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 188-194). Recuperado de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED581294.pdf.

Lewis, C., & Perry, R. (2014). Lesson study with mathematical resources: A sustainable model for locally-led teacher professional learning (pp. 22-42). *Mathematics Teacher Education and Development*, v. 16(1),22-42.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2014). Representações e raciocínio matemático dos alunos na resolução de tarefas envolvendo números racionais numa abordagem exploratória. *Uni-pluri/versidad*, v. 14(1), 102-114.

Wilkins, J., & Norton, A. (2018). Learning progression toward a measurement concept of fraction. *International Journal of STEM Education*, v. 5(27). Recuperado de: https://doi.org/10.1186/s40594-018-0119-2.

Zembat, I. (2015). An alternative route to teaching fraction division: Abstraction of common denominator algorithm (pp. 399-422). *International Electronic Journal of Elementary Education*, v. 7(3). Recuperado de https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1068041.pdf.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA

Operações com números racionais: que (in)compreensões revelam os alunos?

Sofia Isabel Graça
Mestrado
Universidade do Algarve, Escola Superior de Educação e Comunicação, Faro, Portugal, Assistente.
soffiagraca@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2521-2184

João Pedro da Ponte
Doutoramento
Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Lisboa, Portugal, Professor catedrático
jpponte@ie.ulisboa.pt
https://orcid.org/0000-0001-6203-7616

António Guerreiro
Doutoramento
Universidade do Algarve, Escola Superior de Educação e Comunicação, Faro, Portugal, professor adjunto
aguerrei@ualg.pt
https://orcid.org/0000-0002-4711-4270

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Percursores da Restauração, caixa postal 32M, 8700-104 Moncarapacho, Olhão, Algarve, Portugal.

AGRADECIMENTOS
Este trabalho teve o apoio financeiro da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) no âmbito de uma bolsa de doutoramento concedida à primeira autora deste artigo, com a referência SFRH/BD/130343/2017.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: S. I. Graça, J. P. Ponte, A. Guerreiro.
Coleta de dados: S. I. Graça
Análise de dados: S. I. Graça, J. P. Ponte, A. Guerreiro.
Discussão dos resultados: S. I. Graça, J. P. Ponte, A. Guerreiro.
Revisão e aprovação: S. I. Graça, J. P. Ponte, A. Guerreiro.

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO
Este trabalho teve o apoio financeiro da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) no âmbito de uma bolsa de doutoramento concedida à primeira autora deste artigo, com a referência SFRH/BD/130343/2017.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Pesquisa aprovada pela Comissão de Ética do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 03-06-2021 – Aprovado em: 28-04-2022