

CONHECIMENTO DE PROPRIEDADES DA MEDIANA E MÉDIA DE ALUNOS DO FINAL DO ENSINO MÉDIO

Knowledge of Median and Mean Properties by End High School Students

José António FERNANDES

Universidade do Minho, Braga, Portugal
jfernandes@ie.uninho.pt

 <https://orcid.org/0000-0003-2015-160X>

Ailton Paulo Oliveira JÚNIOR

Universidade Federal do ABC, Santo André – São Paulo, Brasil
ailton.junior@ufabc.edu.br

 <https://orcid.org/0000-0002-2721-7192>

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo 

RESUMO

No presente artigo estuda-se o conhecimento de alunos brasileiros do Ensino Médio sobre propriedades da mediana e da média que derivam de transformações dos dados ou de afirmações enunciadas. Para tal, foi implementado um estudo quantitativo, de tipo descritivo, em que participaram 104 alunos do 3.º ano do Ensino Médio de uma escola pública da região de São Paulo. Os dados foram obtidos através da aplicação de um questionário *online*, do qual estudaremos aqui apenas três dessas questões, exatamente aquelas que dizem respeito a propriedades da mediana e da média. Na questão de itens abertos, perguntava-se sobre a alteração da mediana e da média ao ser adicionado um valor constante a todos os dados, e nas duas questões de itens fechados, numa inquiria-se sobre se a mediana diminui/aumenta/mantém-se ao acrescentar um ou dois dados em certas condições e na outra questionava-se se certas afirmações sobre a média eram verdadeiras ou falsas. Em termos de resultados, em geral, os alunos revelaram muitas dificuldades nos itens abertos, enquanto nos itens fechados os alunos tiveram um melhor desempenho. Perante estes resultados, conclui-se que os alunos têm um conhecimento conceitual da mediana e da média um tanto limitado, devendo ser-lhe dada mais atenção no ensino.

Palavras-chave: Educação Estatística, Mediana, Média, Ensino Médio

ABSTRACT

This article studies the knowledge of Brazilian high school students about the properties of the median and mean that derive from data transformations or declared assertions. To this end, a quantitative, descriptive study was implemented, in which 104 students from the 3rd year of a public high school in the region of São Paulo participated. Data were obtained through the application of an online questionnaire, of which we will study only three of these questions here, exactly those that concern median and mean properties. In the question of open items, we asked about the change in the median and the mean by adding a constant value to all data, and in the two questions of closed items, one questioned whether the median decreases/increases/maintains when adding one or two data under certain conditions and the other questioned whether certain statements about the mean were true or false. In terms of results, in general, students revealed many difficulties in open items, while in closed items students performed better. In view of these results, it is concluded that students have a somewhat limited conceptual knowledge of the median and mean, and that more attention should be paid to them in teaching.

Keywords: Statistics Education, Median, Mean, High school students

1 INTRODUÇÃO

A importância das medidas de tendência central, em que se incluem a mediana e a média, é reconhecida nos currículos escolares dos diferentes países. No caso específico do Brasil, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), os conceitos de média e mediana são introduzidos nos anos finais do Ensino Fundamental, especificamente, a média surge pela primeira vez no 7.º ano do Ensino Fundamental e as restantes medidas de tendência central (moda e mediana) aparecem no 8.º ano do Ensino Fundamental. Em anos subsequentes, já no Ensino Médio, as medidas de tendência central são aplicadas à resolução de problemas e a outros conceitos estatísticos.

Desde a sua introdução, à semelhança de outros conceitos matemáticos, as medidas de tendência central devem ser exploradas numa dupla vertente, procedimental e conceitual (Hiebert & Lefevre, 1986). Tal como resulta da BNCC (Brasil, 2018), os alunos devem ser capazes de determinar os valores das estatísticas, mas também de as relacionar, interpretar e reconhecer/aplicar as suas propriedades. Relacionar as estatísticas permite estudar outros conceitos, como seja a simetria, a correlação e regressão lineares ou outros conceitos mais avançados, enquanto a interpretação permite usar a Estatística para responder a situações-problema da realidade, pois é necessário atribuir significado a esses valores no contexto dessas situações (Batanero, 2013).

O interesse do conhecimento e da aplicação das propriedades das medidas de tendência central e das relações entre elas pode ser visto numa dupla perspectiva. Por um lado, o domínio das propriedades dessas estatísticas destaca uma visão estrutural da matemática, que começou a ser valorizada na segunda metade dos anos cinquenta, do século passado, com o surgimento do bem conhecido Movimento da Matemática Moderna. Por outro lado, em termos psicológicos, as relações entre as estatísticas favorecem a retenção e a evocação desses conceitos e contribuem para uma aprendizagem significativa (Ausubel, Novak & Hanesian, 1980).

No âmbito do contexto antes referido, no presente artigo investiga-se o conhecimento de alunos do 3.º ano do Ensino Médio sobre propriedades da média e da mediana. Mais especificamente, trata-se de propriedades inerentes a estas estatísticas ou que derivam de transformações dos dados.

Além das razões invocadas anteriormente, a pertinência do presente estudo também decorre da centralidade dos conceitos de média e mediana no estudo e na aplicação da

Estatística, podendo mesmo serem perspectivados como conceitos-chave desta área de conhecimento.

Em termos de estruturação do artigo, após a apresentação desta seção de introdução, segue o enquadramento teórico, em que são revistas pesquisas relacionadas com este estudo, a metodologia, onde se especificam os participantes e procedimentos metodológicos adotados, a apresentação de resultados do estudo e, por último, as conclusões, onde se apresentam os principais resultados do estudo e são extraídas algumas implicações.

2 ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Em geral, os alunos têm dificuldades nos mais variados conteúdos de Estatística, seja na construção e leitura de tabelas estatísticas (Fernandes, Gonçalves & Barros, 2021), na construção e interpretação de gráficos estatísticos (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga & Gea, 2016; Fernandes, Martinho & Gonçalves, 2020), nas medidas estatísticas de localização (Fernandes & Freitas, 2018) e de dispersão (Estepa & Pino, 2013) ou em estatística bivariada (Fernandes, Gea & Correia, 2019).

No caso das medidas de tendência central, que são o foco do presente estudo, a partir da revisão de vários estudos, Jacobbe e Carvalho (2011) relatam dificuldades dos alunos e professores. Nos estudos de Boaventura e Fernandes (2004) e de Fernandes e Barros (2005) verificou-se que as dificuldades eram mais acentuadas no caso da mediana e da média, e menos acentuadas no caso da moda. Detalhando mais, no estudo de Boaventura e Fernandes (2004), em que participaram alunos portugueses do 12.º ano, portanto do mesmo nível escolar daqueles que participam no presente estudo, salientaram-se dificuldades na determinação da média ponderada e de um conjunto de dados de que são conhecidos os valores da média, mediana e moda, em reconhecer as condições em que é possível definir as medidas de tendência central, na compreensão das propriedades da mediana e média e na atribuição de significado às medidas de tendência central.

Strauss e Bichler (1988) conduziram um dos primeiros estudos sobre propriedades da média. Nesse estudo, em que participaram alunos de idades compreendidas entre 8 e 14 anos, estudou-se o reconhecimento e a aplicação das seguintes propriedades da média a partir de tarefas diversas, incluindo a consideração do tipo de dados discretos e contínuos: a) A média situa-se entre os valores extremos da distribuição; b) A soma dos desvios dos

dados em relação à média é zero; c) A média é influenciada pelo valor de cada um dos dados; d) A média não é necessariamente igual a um dos valores do conjunto de dados; e) O valor da média pode não ser inteiro; f) Os dados com valor nulo influenciam o cálculo da média; e g) A média é um “representante” do conjunto de dados a que diz respeito.

Dos resultados obtidos nesse estudo, salienta-se uma melhoria sistemática da compreensão das propriedades com a idade e, para uma mesma idade dos alunos, o grau de compreensão das propriedades foi variável, apresentando menos dificuldades em relação as propriedades a), c) e d) e mostrando-se mais difíceis as propriedades b), f) e g). Já na análise dos raciocínios foi verificado que as dificuldades dos alunos aumentaram com o maior grau de complexidade das propriedades e a aplicação das propriedades a conjuntos de dados discretos ou contínuos esteve na origem de níveis de complexidade distintos, tendo sido mais difícil para os alunos os dados de tipo contínuo.

Leon e Zawojewski (1991) replicaram o estudo de Strauss e Bichler (1988), agora entrevistando crianças dos 8 aos 14 anos, tendo confirmado também uma importante influência da idade na compreensão da média e que a contextualização das tarefas facilita muito a sua resolução. Todavia, propriedades como b) A soma dos desvios dos dados em relação à média é zero, f) Os dados com valor nulo influenciam o cálculo da média ou g) A média é um “representante” do conjunto de dados a que diz respeito continuaram a ser muito abstratas para um número importante de alunos de 14 anos.

Segundo Leon e Zawojewski (1991), as dificuldades dos alunos devem-se a que as duas primeiras propriedades envolvem a ideia de distribuição de dados e sua relação com a média, que os alunos consideram fácil de compreender, enquanto as duas últimas lidam com a interpretação implícita da média. Além disso, os autores também notaram que as duas primeiras propriedades são baseadas em computação, muito embora os alunos não as pudessem verificar a partir de números e operações, enquanto nas duas últimas isso não acontece.

Num estudo posterior, Boaventura e Fernandes (2004) questionaram alunos portugueses do 12.º ano sobre propriedades da média e da mediana. No caso da média, os alunos deviam afirmar a verdade ou falsidade das propriedades: a) A média de um conjunto de dados nunca é igual a um dos dados; b) A média de um conjunto de dados é sempre um valor compreendido entre o menor e o maior dos dados; c) Se acrescentarmos o valor 0 (zero) ao conjunto de dados, o valor da média não é alterado; d) Se acrescentarmos o valor da média ao conjunto de dados, o valor da média não é alterado; e e) Dois conjuntos de dados diferentes podem ter a mesma média. Nestas propriedades, a

percentagem de respostas corretas variou entre 47,5% e 93,9%, com uma média de 75,2% de acerto por item, sendo as maiores dificuldades dos alunos nos itens c) e d). Ao acrescentar o valor 0 (zero), menos alunos responderam corretamente (62,4%), sendo que muitos acreditam que o valor da média não é alterado porque o veem como elemento neutro. Ainda mais alunos sentiram dificuldade em concluir que a média não se altera quando é acrescentado um dado com o valor da média, sendo que agora menos de metade respondeu corretamente (47,5%).

Ainda na propriedade de acrescentar o valor 0 (zero) ao conjunto de dados, também Cazorla (2003) constatou que a maioria dos estudantes universitários (79,5%) que participaram no seu estudo, sobre a compreensão do conceito de média, respondeu corretamente, sendo que o erro mais frequente resultou de ignorar o novo dado e calcular novamente a média dos números dados, que significa também ignorar o valor 0 (zero).

Voltando ao estudo de Boaventura e Fernandes (2004), no caso da mediana, questionaram os alunos sobre se o valor da mediana diminui, aumenta ou mantém-se quando: a) Se acrescenta um dado inferior a todos os outros; b) Se acrescenta um dado com o valor da mediana; c) Se acrescenta um dado com valor superior ao da mediana; d) Se acrescenta dois dados, um dado inferior a todos os outros e outro superior a todos os outros. A percentagem de respostas corretas variou entre 65,7% e 82,3%, com uma média 72,9% de acerto por item. Foi verificado, ainda, que as dificuldades dos alunos foram um pouco superiores no caso de ser acrescentado um dado inferior a todos os outros (65,7%), um dado igual à mediana (72,9%) ou um dado superior à mediana (70,7%). Na globalidade, entre as percentagens de respostas corretas das propriedades da média e da mediana não se verificaram grandes discrepâncias.

Numa outra questão, do mesmo estudo, é dada a média dos vencimentos dos trabalhadores de uma empresa, e questionam-se os alunos sobre o novo valor da média quando o vencimento de cada trabalhador foi aumentado a) de 25 euros e b) em 5%. O desempenho dos alunos foi semelhante em ambos os itens, sendo que 59,7% e 58,0% dos alunos responderam corretamente, respetivamente, ao item a) e ao item b). Nas respostas incorretas de ambos os itens, salienta-se a ausência de sentido crítico dos alunos quando apresentaram um novo valor da média muito superior ou muito inferior ao valor dado.

Em estudo mais recente, Freitas, Figueiredo, Silva e Miranda (2018) indagaram alunos portugueses do 8.º ano sobre possíveis alterações da mediana e do diagrama de extremos e quartis decorrentes de alterações dos dados, envolvendo, portanto, uma abordagem analítica e uma abordagem gráfica. Relativamente aos estudos anteriores, este,

ao investigar a compreensão de propriedades da mediana a partir da representação gráfica, assume uma nova vertente complementar da vertente analítica.

No caso da abordagem analítica, que é mais relevante para o presente estudo, foi pedido aos alunos para determinarem os quartis de um conjunto de dados, após o que eram questionados sobre o que acontece à mediana quando se 1) substitui o valor mínimo por um valor inferior, 2) acrescenta um valor superior a todos os outros e 3) acrescenta um valor inferior a todos os outros. Em todos estes três itens obtiveram-se percentagens de respostas corretas de 70%, 85% e 83%, respetivamente, o que mostra um bom desempenho dos alunos em qualquer dos itens.

Na abordagem gráfica, solicitou-se aos alunos para indicarem ou determinarem, a partir do diagrama de extremos e quartis dado, os quartis e o intervalo interquartil. Em seguida, foi perguntado aos alunos sobre se o diagrama de extremos e quartis permanece inalterado, pode sofrer alterações ou sofre necessariamente alterações quando é substituído um dado por um outro diferente, designadamente ao 1) substituir um valor do intervalo $]Q_3, máx[$ pelo valor $máx$, 2) substituir um valor do intervalo $]mín, Q_1[$ por outro valor desse intervalo, 3) substituir o valor de Q_2 pelo valor de Q_1 , 4) alterar o valor $mín$, 5) alterar o valor $máx$ e 6) substituir um valor do intervalo $]Q_2, Q_3[$ por outro valor desse intervalo. Em relação à tarefa anterior, os alunos revelaram mais dificuldades nesta tarefa, tendo-se obtido percentagens de respostas corretas de 42%, 58%, 36%, 42%, 40% e 49%, respectivamente, em cada um dos itens.

Perante os resultados obtidos, os autores concluíram que as dificuldades dos alunos se devem a um “domínio deficiente” da mediana, na abordagem analítica, e à “incapacidade dos alunos de extrapolar informação visual e espacial” (p. 124), na abordagem gráfica. Adicionalmente, os autores concluíram que não existe qualquer associação entre os tipos de respostas dadas pelos alunos na tarefa da mediana e na tarefa do diagrama de extremos e quartis. Logo, quando é alterado ou acrescentado um dado, conclui-se que não existe influência entre identificar/determinar a mediana a partir de uma coleção de dados ou a partir da descrição gráfica de um diagrama de extremos e quartis.

3 METODOLOGIA

A presente investigação tem por propósito estudar o conhecimento de alunos do 3.º ano do Ensino Médio sobre propriedades da média e da mediana. Para tal, foi realizado um

estudo de natureza quantitativa e de tipo descritivo, em que os participantes foram selecionados pelo critério de conveniência. Neste tipo de estudo pretende-se fazer descrições rigorosas e efetuar inferências alicerçadas em evidência de um fenômeno educacional preexistente (Gall, Gall & Borg, 2003).

Participaram da investigação 104 alunos do 3.º ano do Ensino Médio que frequentavam, em 2021, uma escola pública do município de São Paulo, Brasil. Estes alunos tinham idade compreendida entre 16 e 19 anos, com média de idade de cerca de 17 anos. Já as classificações obtidas pelos alunos em matemática no final do ano letivo de 2019/2020 variavam entre 5 e 10 valores, com média de 7,5 valores. Assim, globalmente, conclui-se que os alunos frequentaram o 3.º ano do Ensino Médio na idade em que seria expectável e que tinham um desempenho médio em matemática.

Os dados do estudo foram obtidos através da aplicação de um questionário, que foi aplicado *online*, por meio do *Google Forms*, em virtude das restrições à atividade letiva presencial decorrentes da pandemia COVID-19. O questionário era constituído por sete questões, cada uma com vários itens de resposta fechada ou aberta. Dessas questões, neste estudo centramo-nos apenas em três, que são exatamente aquelas que envolvem propriedades da mediana e da média, temática essa que constitui o foco do presente estudo.

A primeira questão, com três itens de resposta aberta, trata da determinação dos novos valores da mediana e da média quando é adicionado o mesmo valor a todos os dados. Já na segunda questão, com quatro itens de resposta fechada, os alunos são inquiridos sobre se a mediana diminui, aumenta ou se mantém quando é acrescentado um ou dois dados, em certas condições, à série inicial. Por fim, na terceira questão, com cinco itens de resposta fechada, é questionado sobre a verdade ou falsidade de afirmações envolvendo o conceito de média. As questões do presente estudo são idênticas ou muito análogas às questões do estudo de Boaventura e Fernandes (2004), cujos enunciados são apresentados na seção de resultados.

Na aplicação do questionário, os alunos responderam no mesmo período de tempo, que tinha sido estabelecido e que não excedeu 1 hora e 30 minutos. Adicionalmente, os alunos foram incentivados a responder com empenho e sinceridade ao questionário, sendo também informados da preservação do anonimato e de que a sua participação no estudo era sempre voluntária, podendo a qualquer momento deixar de participar no estudo.

Por último, em relação ao tratamento e análise de dados, foram estudadas as respostas apresentadas pelos estudantes, classificando-as em corretas e incorretas. Em

seguida, foram determinadas frequências dos tipos de respostas (corretas e incorretas) e recorreu-se a tabelas para resumir a informação dos tipos de respostas, incluindo também, quando necessário, as não respostas.

4 APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

A apresentação dos resultados do estudo foi estruturada segundo cada uma das três questões que foram propostas aos alunos, as quais envolvem propriedades da média e da mediana.

4.1 Questão 1

Na questão 1, apresentada no Quadro 1, pretende-se que os alunos determinem as alterações no valor da mediana e da média quando é adicionado um valor constante a todos os dados.

Quadro 1: Enunciado da questão 1 proposta aos alunos

1. A média dos vencimentos dos 20 trabalhadores de uma empresa é 1500 reais e a mediana é 1000 reais.
- a) Sabendo que o vencimento de cada um dos trabalhadores foi aumentado em 80 reais, qual a mediana dos novos vencimentos dos 20 trabalhadores?
 - b) Sabendo que o vencimento de cada um dos trabalhadores foi aumentado em 90 reais, qual a média dos novos vencimentos dos 20 trabalhadores?
 - c) Sabendo que o vencimento de cada um dos trabalhadores foi aumentado em 5%, qual a média dos novos vencimentos dos 20 trabalhadores?

Fonte: Elaborado pelos autores

Na resolução dos itens desta questão era esperado que os alunos adicionassem ao valor dado da mediana e da média o valor da constante que foi adicionado aos dados. Assim, em 1a), a mediana é $1000 + 80 = 1080$ reais; em 1b), a média é $1500 + 90 = 1590$ reais; e, em 1c), a média é $1500 + 1500 \times 0,05 = 1575$ reais.

Na Tabela 1 encontram-se registradas as percentagens dos tipos de respostas (corretas e incorretas) dadas pelos alunos, incluindo, eventualmente, as percentagens de não respostas nos itens da questão 1.

Tabela 1: Percentagens dos tipos de respostas nos itens da questão 1

Itens	% de respostas		Não respostas
	Corretas	Incorretas	
1a)	28,9	49,0	22,1
1b)	30,8	49,0	20,2
1c)	26,9	51,9	21,2

Fonte: Elaborado pelos autores

Pela Tabela 1 conclui-se que esta questão revelou ser muito difícil para os alunos, variando a percentagem de respostas corretas entre 26,9% e 30,8%, o que significa que menos de um terço dos alunos respondeu corretamente a qualquer dos três itens desta questão.

Por outro lado, além da percentagem de respostas incorretas, que correspondem a cerca de metade dos alunos em qualquer dos itens, destaca-se a elevada percentagem de alunos que não responderam a qualquer dos itens, o que vem a agravar as dificuldades sentidas pelos alunos. Neste caso, adicionada a percentagem de alunos que responderam incorretamente com a percentagem dos que não responderam, verificamos que a soma varia entre 69,2% e 73,1%.

Tendo em conta que, em qualquer item, os dados sofreram um aumento, seria de esperar que os alunos reconhecessem que a tal aumento dos dados corresponderia também um aumento da mediana e da média. Ora, no caso das respostas incorretas, conclui-se que isso não foi verificado, sendo a maioria dessas respostas um valor inferior ao valor inicialmente dado da mediana ou da média, concretamente 31,7% em 1a) e 38,5% em 1b) e 1c).

Aprofundando a análise, foi constatado que ao adicionar um valor positivo a qualquer dos dados, resulta que tanto a mediana como a média vêm aumentadas desse valor. Contudo, verificou-se, em qualquer dos itens, que a maioria dos alunos não teve em consideração que as respectivas medidas estatísticas deviam aumentar, o que agrava as dificuldades reveladas pelos alunos. Este resultado é particularmente problemático porque denota uma total ausência de sentido crítico e raciocínio lógico por parte dos alunos.

Por último, em todos os itens desta questão, salienta-se, ainda, uma variação pequena nas percentagens dos diferentes tipos de respostas e de não respostas. Esta regularidade das percentagens ao longo dos três itens deve-se, muito provavelmente, ao fato de em qualquer deles se ter de adicionar um valor constante ao valor dado da mediana

ou da média. Ou seja, os processos matemáticos implicados na resolução de qualquer dos itens são, essencialmente, os mesmos.

4.2 Questão 2

Na questão 2, apresentada no Quadro 2, questionam-se os alunos sobre se a mediana aumenta, diminui ou se mantém quando é acrescentado um ou dois dados em certas condições.

Quadro 2: Enunciado da questão 2 proposta aos alunos

<p>2. Considere a mediana de um conjunto de 20 dados, todos diferentes. O valor da mediana diminui, aumenta ou mantém-se, quando:</p> <p>a) Se acrescenta um dado inferior a todos os outros? <input type="checkbox"/> diminui <input type="checkbox"/> aumenta <input type="checkbox"/> mantém-se</p> <p>b) Se acrescenta um dado com o valor da mediana? <input type="checkbox"/> diminui <input type="checkbox"/> aumenta <input type="checkbox"/> mantém-se</p> <p>c) Se acrescenta um dado com valor superior ao da mediana? <input type="checkbox"/> diminui <input type="checkbox"/> aumenta <input type="checkbox"/> mantém-se</p> <p>d) Se acrescentam dois dados, um inferior e outro superior a todos os outros? <input type="checkbox"/> diminui <input type="checkbox"/> aumenta <input type="checkbox"/> mantém-se</p>
--

Fonte: Elaborado pelos autores

Como os dados são todos diferentes, e considerando a sua ordenação crescente, em a), ao acrescentar um dado inferior a todos os outros, a mediana diminui, coincidindo com o dado imediatamente inferior à mediana; em b), ao acrescentar um dado igual à mediana, ela mantém-se, coincidindo com o dado introduzido; em c), ao acrescentar um dado superior à mediana, ela aumenta, coincidindo com o dado imediatamente superior à mediana; e, em d), ao acrescentar um dado inferior e outro superior a todos os outros, a mediana mantém-se porque esses valores passam a constituir os novos valores extremos da série ordenada e, portanto, não intervêm na determinação da mediana.

Na Tabela 2 encontram-se registradas as percentagens dos tipos de respostas (corretas e incorretas) dadas pelos alunos, incluindo, eventualmente, as percentagens de não respostas nos itens da questão 2.

Tabela 2: Percentagens dos tipos de respostas nos itens da questão 2

Itens	% de respostas		Não respostas
	Corretas	Incorretas	
2a)	65,4	34,6	—
2b)	59,6	40,4	—

2c)	63,5	36,5	—
2d)	74,0	26,0	—

Fonte: Elaborado pelos autores

Por observação da Tabela 2 verifica-se que todos os alunos responderam a todos os itens, não havendo não respondentes, e que o desempenho dos alunos foi bastante melhor nesta questão do que na questão 1. Agora, em qualquer dos itens, mais de metade dos alunos responderam corretamente, observando-se alguma variação no desempenho dos alunos ao longo dos quatro itens da questão, especificamente, variando entre 59,6% e 74,0%, com média de 65,6% por item.

No item 2b) os alunos tiveram mais dificuldade em reconhecer que a mediana se mantém quando é acrescentado um novo dado igual à mediana. Neste item, quase todas as respostas incorretas (88,1%) resultaram de os alunos afirmarem que a mediana aumenta. Já no item 2d) os alunos foram mais sucedidos em reconhecer que a mediana não se altera, ou mantém-se, quando são acrescentados dois dados, um menor e outro maior do que todos os outros. Agora, as respostas incorretas distribuíram-se, sensivelmente, na mesma percentagem pelas opções de resposta diminui (44,4%) e aumenta (55,6%).

No item 2d), possivelmente o maior sucesso dos alunos tenha a ver com o fato de ao acrescentar um dado inferior e outro superior a todos os outros não ser alterada a paridade do número total de dados e desses dois novos dados não interferirem na determinação da mediana. É como se pudéssemos retirá-los da série ordenada dos dados, mantendo-se, portanto, a mediana do conjunto inicial.

Por fim, em termos das respostas incorretas, no item 2a), entre as opções aumenta e mantém-se, a opção aumenta foi selecionada pelo dobro dos alunos (66,7%). Já no item 2c), entre as opções diminui e mantém-se, a opção diminui foi escolhida por mais do dobro dos alunos (68,4%).

Considerando apenas as respostas incorretas, verifica-se que a maioria dos alunos afirmou que a mediana aumenta quando é acrescentado um dado inferior a todos os outros ou igual à mediana, respetivamente, nos itens 2a) e 2b), e diminui quando se acrescenta um dado superior à mediana, no item 2c). Afirmar que a mediana aumenta/diminui quando é acrescentado um dado inferior/superior que todos os outros contradiz o fato da nova série ordenada ser deslocada para a esquerda/direita e, conseqüentemente, a mediana

diminuir/aumentar. Assim, tal como na questão 1, observa-se novamente que alguns alunos denotam ausência de sentido crítico e raciocínio lógico nas respostas que apresentaram.

4.3 Questão 3

Na questão 3, apresentada no Quadro 3, inquiram-se os alunos sobre a verdade ou falsidade de várias afirmações envolvendo o conceito de média.

Quadro 3: Enunciado da questão 3 proposta aos alunos

3. Relativamente a cada uma das afirmações seguintes, envolvendo o conceito de média, diga se é verdadeira ou falsa.
- a) A média de um conjunto de dados nunca é igual a um dos dados.
 verdadeira falsa
 - b) A média de um conjunto de dados é sempre um valor compreendido entre o menor e o maior dos dados.
 verdadeira falsa
 - c) Se acrescentarmos o valor 0 (zero) ao conjunto de dados, o valor da média não se altera.
 verdadeira falsa
 - d) Se acrescentarmos o valor da média ao conjunto de dados, o valor da média não se altera.
 verdadeira falsa
 - e) Dois conjuntos de dados diferentes podem ter a mesma média.
 verdadeira falsa

Fonte: Elaborado pelos autores

Em termos de respostas, os alunos deviam reconhecer que se tratava de uma afirmação, em 3a), falsa (basta considerar uma série em que o mesmo dado é repetido); em 3b), verdadeira (a divisão da soma dos dados pelo número de dados não pode ser inferior ao valor mínimo nem superior ao valor máximo); em 3c), falsa (ao adicionar o valor 0 (zero) a soma dos dados mantém-se, mas o número de dados aumenta de uma unidade, portanto a média diminui); em 3d), verdadeira (ao adicionar o valor da média, o quociente da soma dos dados pelo número de dados mantém-se, portanto a média mantém-se); e, em 3e), verdadeira (basta considerar dois conjuntos de dados com o mesmo número cardinal e com a mesma soma).

Na Tabela 3 estão registradas as percentagens dos tipos de respostas (corretas e incorretas) dadas pelos alunos, incluindo, eventualmente, as percentagens de não respostas nos itens da questão 3.

Tabela 3: Percentagens dos tipos de respostas nos itens da questão 3

Itens	% de respostas		Não respostas
	Corretas	Incorretas	
3a)	58,7	41,3	—
3b)	64,4	35,6	—
3c)	41,3	58,7	—
3d)	45,2	54,8	—
3e)	76,9	23,1	—

Fonte: Elaborado pelos autores

À semelhança do que aconteceu na questão 2, também na questão 3 todos os alunos responderam a todos os itens, não havendo não respostas, sendo que a variação do desempenho dos alunos ao longo dos cinco itens aumentou, sendo agora de 41,3% a 76,9%, e o desempenho médio na globalidade dos itens diminuiu um pouco, sendo agora de 57,3% por item.

Entre os cinco itens desta questão, destacamos os itens 3c) e 3d), em que os alunos revelaram mais dificuldades, e o item 3e), que foi aquele em que mais alunos responderam corretamente. No caso do item 3c), que foi aquele que se revelou mais difícil, é afirmado que quando se acrescenta o valor 0 (zero) ao conjunto de dados, o valor da média não se altera. Nesta situação, a maior parte dos alunos afirmou que se tratava de uma afirmação verdadeira, o que vai de encontro à interpretação de que o valor 0 (zero) não interfere com a média, ou seja, funciona como elemento neutro. Assim, tendo em conta o elevado número de alunos que responderam deste modo, podemos concluir que esta ideia errada foi largamente adotada pelos alunos.

No item 3d), em que é afirmado que acrescentar o valor da média ao conjunto de dados não altera o valor da média, também a maioria dos alunos respondeu incorretamente. Nesta situação, esses alunos declararam que a afirmação era falsa, contrariando, assim, a definição de média. Da interpretação da média como repartição equitativa, que corresponde a transformar todos os dados no mesmo valor (que é a média), resulta imediatamente que ao adicionar o valor da média ela se mantém.

Já o item 3e), em que se diz que dois conjuntos de dados diferentes podem ter a mesma média, foi aquele em que mais alunos responderam corretamente ao declararem ser uma afirmação verdadeira. Neste caso, tratando-se de uma afirmação de existência, basta que o aluno reconheça uma situação que verifique a afirmação para responder corretamente. Talvez se deva a isso o maior sucesso dos alunos.

Finalmente, nos itens 3a) e 3b), em que é afirmado que a média de um conjunto de dados nunca é igual a um dos dados e que é sempre um valor compreendido entre o menor e o maior dos dados, respectivamente, verificou-se que a maioria dos alunos respondeu que a primeira era falsa e a segunda verdadeira, respondendo, assim, corretamente.

5 CONCLUSÃO

Assim, entre as três questões aqui estudadas, a primeira revelou-se muito mais difícil do que as duas restantes, verificando-se, em todos os seus itens, que menos de um em cada três alunos respondeu corretamente e um desempenho semelhante em todos eles. Portanto, não foram observadas diferenças relevantes do desempenho na determinação da mediana e da média, o que pode dever-se ao fato de os processos matemáticos envolvidos em ambas estatísticas serem, essencialmente, os mesmos.

Comparando com o desempenho em dois itens análogos, envolvendo apenas a média, do estudo de Boaventura e Fernandes (2004), em que se obteve cerca de 60% de respostas de corretas, concluímos existir uma grande disparidade. Considerando, ainda, que os alunos frequentavam o mesmo nível de escolaridade, temos de admitir que se trata de um resultado muito problemático do presente estudo.

Talvez as maiores dificuldades experimentadas pelos alunos na questão 1 tenham origem na exigência de determinar um valor único para as estatísticas mediana e média, pois nos itens das questões 2 e 3, em que não existia esse requisito, a percentagens de respostas corretas foi muito superior, sendo, em média, de 65,6% por item na questão 2 (sobre propriedades da mediana) e de 57,3% por item na questão 3 (sobre propriedades da média). Comparativamente com o estudo de Boaventura e Fernandes (2004), nos mesmos itens, os alunos portugueses obtiveram percentagens de respostas corretas um pouco superiores, especificamente, em média, 72,9% por item no caso das propriedades da mediana e 75,2% por item no caso das propriedades da média.

Por outro lado, tanto na questão 2 como na questão 3 é enfatizada uma dimensão estrutural dos conceitos de mediana e de média, o que não acontece na questão 1, em que se destaca uma dimensão conceitual e algorítmica. Portanto, segundo este ponto de vista, deste estudo concluímos que os alunos demonstraram um melhor desempenho nas questões que envolviam uma dimensão estrutural.

No presente estudo, no caso das propriedades da mediana, afirmadas na questão 2, os alunos tiveram mais dificuldades em reconhecer que a mediana se mantém quando é acrescentado um novo dado igual à mediana e foram mais sucedidos em reconhecer que a mediana se mantém quando é acrescentado um dado menor e outro maior do que todos os outros. Foi também nesta última propriedade que os alunos do estudo de Boaventura e Fernandes (2004) tiveram maior sucesso.

Já quanto às propriedades da média, afirmadas na questão 3, os alunos deste estudo sentiram mais dificuldade em reconhecer que ao acrescentar o valor 0 (zero) ou o valor da média ao conjunto de dados, o valor da média não é alterado, e foram mais sucedidos em reconhecer que dois conjuntos de dados diferentes podem ter a mesma média. Em todas estas propriedades verificou-se o mesmo padrão de dificuldade/sucesso do estudo de Boaventura e Fernandes (2004).

Também no estudo de Freitas et al. (2018) foram incluídos três itens, nos quais se questionam alunos do 8.º ano sobre possíveis alterações da mediana quando se substitui ou acrescenta um dado em certas condições. Em qualquer destes itens os alunos obtiveram percentagens de respostas corretas entre 70% e 85%, com média de 79,3% por item, o que é superior à percentagem média de respostas corretas obtida pelos alunos do presente estudo na questão da mediana, que é de 65,6% por item. Especificamente, no item relativo a acrescentar um dado inferior a todos os outros, comum aos dois estudos, os alunos do 8.º ano tiveram um desempenho superior (83%).

Muito embora os alunos do presente estudo possam ser capazes de determinar os valores das estatísticas mediana e da média, numa vertente procedimental, daí não decorre que eles também conheçam e apliquem as propriedades dessas estatísticas, pois no presente estudo os alunos exibiram dificuldades em várias propriedades, quer da mediana, quer da média. Adicionalmente, conclui-se que, globalmente, os alunos brasileiros revelaram mais dificuldades do que alunos portugueses do mesmo nível de escolaridade (Boaventura & Fernandes, 2004), e mesmo do que alunos do 8.º ano, no caso da mediana (Freitas et al., 2018).

A partir das respostas incorretas foi possível constatar no presente estudo a ausência de sentido crítico e raciocínio lógico por parte de bastantes alunos, o que aconteceu nas questões 1 e 2. Concretamente, na questão 1, esses alunos afirmaram que ao adicionar o mesmo valor positivo a todos os dados, a mediana e a média diminuíam, enquanto, na questão 2, ao acrescentar um dado inferior/superior a todos os outros, a mediana aumenta/diminui. Deste resultado problemático do estudo deve-se extrair consequências

didáticas, como seja, por exemplo, antes de estudar as propriedades da mediana e média numa vertente algorítmica e conceitual, os alunos poderão discutir intuitivamente, sem efetuar quaisquer cálculos, os efeitos da alteração dos dados na diminuição, aumento ou manutenção dos valores da mediana e média (Fischbein, 1987).

Portanto, face aos resultados obtidos no estudo, recomenda-se que os alunos explorem na escola situações-problema semelhantes às do presente estudo, envolvendo as propriedades das medidas de tendência central, em particular da mediana e da média, que são precisamente aquelas em que os alunos têm mais dificuldades. Desse modo, os alunos terão oportunidades para desenvolver um conhecimento conceitual a par de um conhecimento algorítmico ou procedimental (Hiebert & Lefevre, 1986), que desempenham papéis complementares e aprofundam a compreensão das respetivas estatísticas.

REFERÊNCIAS

- Ausubel, D., Novak, J. & Hanesian, H. (1980). *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana.
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico. Componentes y desarrollo. In J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 55-61). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Boaventura, M. G., & Fernandes, J. A. (2004). Dificuldades de alunos do 12.º ano nas medidas de tendência central: O contributo dos manuais escolares. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa, & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 103-126). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base*. Brasília: Ministério da Educação.
- Cazorla, I. M. (2003). Média aritmética: um conceito prosaico e complexo. In C. Reading (Ed.). *Anais do IX Seminário de Estatística Aplicada* (pp. 1-14). Rio de Janeiro: Instituto Interamericano de Estatística.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., & Gea, M. M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *Bolema*, 30(55), 713 – 737.
- Estepa, A., & Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Números*, 83(julio), 43-63.

- Fernandes, J. A., & Barros, P. M. (2005). Dificuldades de futuros professores do 1º e 2º ciclos em estocástica. *Actas do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* (CIBEM). Porto (Portugal): Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.
- Fernandes, J. A., & Freitas, A. (2019). Selection and Application of graphical and numerical statistical tools by prospective primary school teachers. *Acta Scientiae*, 21(6), 82-97.
- Fernandes, J. A., Gea, M. M., & Correia, P. F. (2019). Conhecimento de estatística bivariada de futuros professores portugueses dos primeiros anos. *Revista Portuguesa de Educação*, Braga, 32(2), 40-56.
- Fernandes, J. A., Gonçalves, G., & Barros, P. M. (2021). Uso de tabelas de frequências por futuros professores na realização de trabalhos de projeto. *Uniciencia*, 35(1), 139-151.
- Fernandes, J. A., Martinho, M. H., & Gonçalves, G. (2020). Uso de gráficos estatísticos por futuros professores dos primeiros anos na realização de trabalhos de projeto. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 13(4), 394-401.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Freitas, A., Figueiredo, T. S., Silva, N., & Miranda, M. C. (2018). Dificuldades na aprendizagem da mediana e quartis por alunos do 8.º ano de escolaridade: estudo comparativo fórmula versus gráfico. *Indagatio Didactica*, 10(2), 109-132.
- Gall, M. D.; Gall, J. P.; Borg, W. R. (2003). *Educational research: An introduction*. 7. ed. Boston: A & B Publications, 2003.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Jacobbe, T., & Carvalho, C. (2011). Teachers' understanding of averages. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 199-209). Springer, Dordrecht.
- Leon, M. R., & Zawojewski, J. S. (1991). Use of the arithmetic mean: An investigation of four properties. Issues and preliminary results. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 302-306). Voorburg: International Statistical Institute.
- Strauss, S., & Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 64-80.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA

Conhecimento de propriedades da mediana e média de alunos do final do Ensino Médio

José António Fernandes

Doutor em Educação, área de conhecimento de Metodologia do Ensino da Matemática

Universidade do Minho, Professor Associado, Departamento de Estudos Integrados de Literacia, Didática e Supervisão, Braga, Portugal
jfernandes@ie.uninho.pt

 <https://orcid.org/0000-0003-2015-160X>

Ailton Paulo Oliveira Júnior

Doutor e Pós-Doutor em Educação, área de Didática, Práticas Escolares e Técnicas de Ensino

Universidade Federal do ABC, Professor Associado, Departamento de Matemática, Computação e Cognição, Santo André – São Paulo, Brasil
ailton.junior@ufabc.edu.br

 <https://orcid.org/0000-0002-2721-7192>

Endereço de correspondência do principal autor

Rua 8 de setembro, Lote 6, Ferreiros, 4705-272 Braga, Portugal

AGRADECIMENTOS

Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

Os papéis descrevem a contribuição específica de cada colaborador para a produção acadêmica inserir os dados dos autores conforme exemplo, excluindo o que não for aplicável. Iniciais dos primeiros nomes acrescidas com o último Sobrenome, conforme exemplo.

Concepção e elaboração do manuscrito: J. A. Fernandes

Coleta de dados: A. P. Oliveira Júnior

Análise de dados: J. A. Fernandes

Discussão dos resultados: J. A. Fernandes, A. P. Oliveira Júnior

Revisão e aprovação: J. A. Fernandes, A. P. Oliveira Júnior

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO

Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM

Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES

Não se aplica.

LICENÇA DE USO – uso exclusivo da revista

Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution \(CC BY\) 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). Esta licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista

Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](https://portal.periodicos.ufsc.br/). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista

Mérciles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista

Recebido em: 21-06-2021 – Aprovado em: 13-10-2021

