Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CONSTRUÇÕES E PERCEPÇÕES DE ALGUNS ALUNOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA SOBRE DEMONSTRAÇÕES

Constructions And Perceptions Of Some Preservice Mathematics Teachers About Demonstrations

Luisa Rodriguez DOERING
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil
ldoering@mat.ufrgs.br
https://orcid.org/0000-0002-9678-7682

Cydara Cavedon RIPOLL
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil
cydara@mat.ufrgs.br
https://orcid.org/0000-0002-7645-5322

Érica Vitória Machado da SILVA
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil
erica-vitoria-855@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0002-2400-5354

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Neste artigo, investigamos como alunos de distintas etapas do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul produzem e percebem argumentações matemáticas quando inseridos em um ambiente de reflexão em grupo. Os dados foram coletados em uma oficina oferecida a esses discentes, intitulada Critérios de Divisibilidade na Escola: Um Trabalho de Reflexão em Grupo. Para a análise dos dados, adaptamos para grupos, a metodologia de análise (individual) proposta por Andreas Stylianides e Gabriel Stylianides (2009) denominada Reasoning-and-Proving. Foram constatadas, nos grupos, divergências de percepções no que diz respeito a um argumento ser válido ou não, ou seja, se constitui ou não uma prova. A experiência oportunizou aos sujeitos da pesquisa uma sensibilização sobre aspectos matemáticos de uma demonstração e suas potencialidades pedagógicas.

Palavras-chave: Demonstração, Critérios De Divisibilidade, Pensamento Matemático, Reflexão Em Grupo, Raciocínio-E-Prova

ABSTRACT

In this article, we investigate how students of different levels of the preservice teachers course in Mathematics from the Federal University of Rio Grande do Sul, Brazil, produce and perceive mathematical arguments in a group reflection environment. The data were collected in a workshop offered to these students, entitled Division Criterias in School: A group reflection work. For data analysis, we adapted, for groups, the (individual) analysis methodology proposed by Andreas Stylianides and Gabriel Stylianides (2009) called Reasoning-and-Proving. Differences in perceptions were found in the groups regarding whether an argument is valid or not, that is, whether or not it constitutes a proof. The experience provided the research participants with an awareness of the mathematical aspects of a proof and its pedagogical potentialities.

Keywords: Proof, Divisibility Criteria, Mathematical Thinking, Group Reflection, Reasoning-And-Proof

1 INTRODUÇÃO

Estamos efetivamente ensinando matemática quando estimulamos o estudante a praticar o pensamento matemático.

> [...] pensamento matemático não se refere a pensar sobre o conteúdo da Matemática; refere-se, sim, a um estilo de pensar que vem em função de operações particulares, processos e dinâmicas reconhecidamente matemáticas. (Burton, 1984, p. 35, tradução das autoras)

Embora não haja uma unanimidade na definição de pensamento matemático, há uma convergência de que ele está intimamente ligado à demonstração (Balacheff (1987), Stylianides (2009), Burton (1984)). Neste texto, consideramos que o pensamento matemático engloba não apenas demonstrar, mas também identificar padrões, conceituar, definir, testar para intuir, intuir, conjecturar, modelar, generalizar, particularizar. Assim, para que se desenvolva o pensamento matemático e se adquira uma noção do que é efetivamente a Matemática, é necessário que se compreenda e saiba construir algumas demonstrações ou provas (termos que, neste texto, são utilizados como sinônimos).

Acreditamos que, para desenvolver o pensamento matemático de forma completa com os estudantes na Educação Básica, seria importante trabalhar-se com demonstrações desde os anos iniciais de escolarização. No entanto, pesquisadores ressaltam que, na maioria das salas de aula, a prova em argumentações de professores, de alunos e de livros didáticos é tratada como mera formalidade ou cumprimento de um protocolo ou, ainda, como uma parte da Matemática que não necessita de visibilidade na Educação Básica (Hanna (2000), Stylianides (2008)).

Concordamos com os pesquisadores que defendem a valorização de demonstrações no ensino e aprendizagem de Matemática, tais como (Hanna (1990), Harel e Sowder (1998), Stylianides (2007)), pois, além de serem fundamentais ao pensamento matemático, elas podem auxiliar no ensino e aprendizado dessa ciência. Acreditamos que, enfatizando aos futuros professores a relevância da demonstração no ensino da Matemática e incentivando-os a adotá-la também como recurso didático em suas salas de aula, pode-se contribuir para uma mudança do atual cenário da demonstração na Educação Básica. Para isso, julgamos ser relevante inicialmente procurar compreender como futuros professores a percebem. Sendo assim, neste artigo, buscamos investigar:

Como alunos de um curso de Licenciatura em Matemática percebem argumentações e demonstrações inseridas em um ambiente de reflexão em grupo?

A importância de investigar como licenciandos percebem uma demonstração é ressaltada por Stylianides (2008) quando este coloca que as eventuais divergências entre as percepções sobre demonstração podem também mostrar caminhos que oportunizem discutir (em cursos de Licenciatura, por exemplo) aspectos pedagógicos e matemáticos sobre demonstração.

Como metodologia, escolhemos a reflexão em grupo para oportunizar discussões enriquecidas pelos diferentes pontos de vista. Além disso, na construção em grupo de alguma demonstração para uma dada afirmação matemática, o sujeito precisa expressar oralmente suas ideias aos demais, ficando motivado, por sua autocrítica ou pelo questionamento de outro sujeito, a aperfeiçoar o seu argumento e a aprimorar sua percepção sobre o que constitui e contém uma demonstração.

Os dados para a pesquisa foram coletados durante a oficina intitulada *Critérios de Divisibilidade na Escola: Um Trabalho de Reflexão em Grupo* oferecida na XIV Semana Acadêmica da Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul em 2019. A metodologia da oficina é apresentada na Seção 2. A análise dos dados (construções de provas de licenciandos em Matemática e suas respectivas percepções sobre tais produções) inspirou-se na metodologia Reasoning and Proof (RP) de Gabriel Stylianides e Andreas Stylianides e é detalhada na Seção 3. Cabe ressaltar que, devido à dinâmica de grupo da oficina, foram necessárias, para a análise das produções, uma adequação e uma ampliação das categorias consideradas no RP que são apresentadas na Seção 4. Um breve relato da oficina e a análise de suas atividades são apresentados na Seção 5.

Nas considerações finais, são relatadas reflexões sobre essa experiência, bem como limitações da pesquisa realizada e caminhos para futuros trabalhos nessa direção.

2 REFLEXÃO EM GRUPO

O termo "reflexão", como processo, tem sido empregado frequentemente nas pesquisas sobre formação de professores. Segundo Dewey (1959, apud Pivetta e Isaia, 2014, p.4) "O pensamento reflexivo envolve necessariamente um estado de imprecisão, de hesitação, de perplexidade e até mesmo de dificuldade, o que origina o ato de pensar".

O processo reflexivo pode ser abordado de várias formas. Por exemplo, no que diz respeito a uma reflexão individual, Dewey (1959) aponta que essa ocorre quando o sujeito, frente a um problema real, necessita resolvê-lo de maneira racional. Pinto (2000), ao abordar a reflexão sobre o erro, destaca que “O erro, quando submetido à reflexão, poderá desencadear um questionamento de todo o processo de ensino e transformar-se em uma estratégia didática inovadora, pela possibilidade que oferece ao professor de ampliar seus saberes e, com isso, seu ensino” (Pinto, 2000, p. 24). As pesquisas de Carraro e Andrade (2011); Pivetta e Isaia (2014); Simão et al. (2009) focam na prática reflexiva coletiva em um espaço onde os professores compartilham suas experiências de sala de aula, com o intuito de motivá-los a reconstruir, desconstruir e [res]significar seu papel enquanto educadores, transformando a prática pedagógica em aprendizagem docente reflexiva.

A comunicação fluida, livre e espontânea em contextos grupais contribui para aumentar a coesão de pensamento e ação. Além disso, pensamentos divergentes podem “ensejar polêmica, debate, discussão, trazendo outras contribuições que, servindo de contraponto, apresentam alternativas que revigoram as decisões, oportunizando maior consistência nas conclusões” (Marques, 2009, p.146).

Atividades propostas em contextos grupais podem gerar uma aprendizagem colaborativa que é construída por meio de discussões emergentes de pontos de vista diferentes, contribuindo substancialmente para uma resolução mais lógica e harmônica, onde todos são parte do processo e possuem seus interesses supridos. Por exemplo, em Mathias, Doering e Ripoll (2020) é relatado que a troca de experiência e as diferentes visões foram enriquecedoras a todos os envolvidos (professores da Escola Básica), corroborando a posição defendida por Marques (2009).

O presente trabalho foca na reflexão em grupo, precedida naturalmente por uma reflexão individual e finalizada por meio de uma plenária.

3 RACIOCÍNIO-E-PROVA NA CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Neste texto, bem como na oficina em que os dados para esta pesquisa foram coletados, é utilizado como conceito de demonstração para uma afirmação matemática todo conjunto de argumentos capazes de estabelecer a veracidade dessa afirmação em todos os possíveis casos por ela contemplados. Por exemplo, uma prova do tipo direta de uma afirmação expressa na forma de implicação (*se...então…*, ou seja, *se for verdade que… então é verdade que....*) consiste de uma sequência finita de afirmações, de modo que a primeira delas (chamada hipótese) é suposta verdadeira e cada uma das afirmações seguintes é derivada de afirmações anteriores ou de outras já demonstradas verdadeiras, sendo a última afirmação aquela que queríamos provar (chamada tese). (Ripoll; Ripoll; Silveira, 2011)

Leron (1983), Movshovitz-Hadar (1988), Balacheff (1987), Stylianides e Stylianides (2009), entre outros, sugerem que sejam levadas todas as etapas do pensamento matemático para a sala de aula, seja da Escola, seja da Universidade, incluindo a demonstração. E, no que diz respeito a esta última, Hanna (1995) sugere que o docente questione seus alunos sobre a validade de afirmações matemáticas, incentivando o debate entre eles, passando pela heurística, pela conjectura, partindo de métodos não formais e estimulando a reestruturação dos argumentos, até chegar, sempre que possível, a uma prova.

A construção do conhecimento sobre demonstrações proposta por Hanna (1995) para a Escola Básica assemelha-se ao processo de gerar novos conhecimentos na Matemática em todos os níveis, incluindo o da pesquisa em Matemática – processo que, conforme ressalta Stylianides (2008), leva em consideração a organização e a codificação de um padrão, a formulação de uma conjectura, o teste da conjectura com novas evidências culminando em uma eventual revisão da mesma. E, como última etapa, tem-se o desenvolvimento de uma prova da conjectura original ou da reformulada.

Stylianides (2009) denomina *Reasoning-and-Proving* (RP) as abordagens que oportunizam competências de raciocínio e de prova, ou seja, que geram possibilidades para que os alunos possam experienciar todas as etapas da construção do conhecimento matemático. Assim, o RP coloca a prova em destaque no ensino de Matemática, incluindo-se aqui a Escola Básica e os cursos de Licenciatura em Matemática e de Pedagogia, nesses últimos contribuindo para a formação de profissionais que poderão, futuramente, incentivar seus futuros alunos a construírem demonstrações.

Para Stylianides (2009), é essencial, no uso do RP, uma análise constante do desenvolvimento dos alunos nas abordagens utilizadas. Para isso, propõe duas componentes a serem analisadas: a Componente Matemática e a Componente Pedagógica. Ambas referem-se a uma observação feita pelo docente; no entanto, a primeira tem como objetivo verificar o rigor matemático nas argumentações de cada discente; na segunda, o docente deve observar a análise do discente sobre suas próprias construções e argumentações: por exemplo, se o discente considera que essas já constituem uma demonstração, se constituem apenas parte de uma demonstração, se todos os argumentos são válidos.

Stylianides (2008) ressalta a relevância tanto da Componente Pedagógica como da Componente Matemática, visto que eventuais discrepâncias emergentes da comparação entre elas podem auxiliar na identificação de possíveis focos de ação para os professores, objetivando aprimorar a compreensão de seus alunos sobre determinado conteúdo matemático. Em Stylianides e Stylianides (2009) são analisadas as Componentes Matemática e Pedagógica, utilizando categorias para codificar as construções individuais dos alunos (Figura 1).

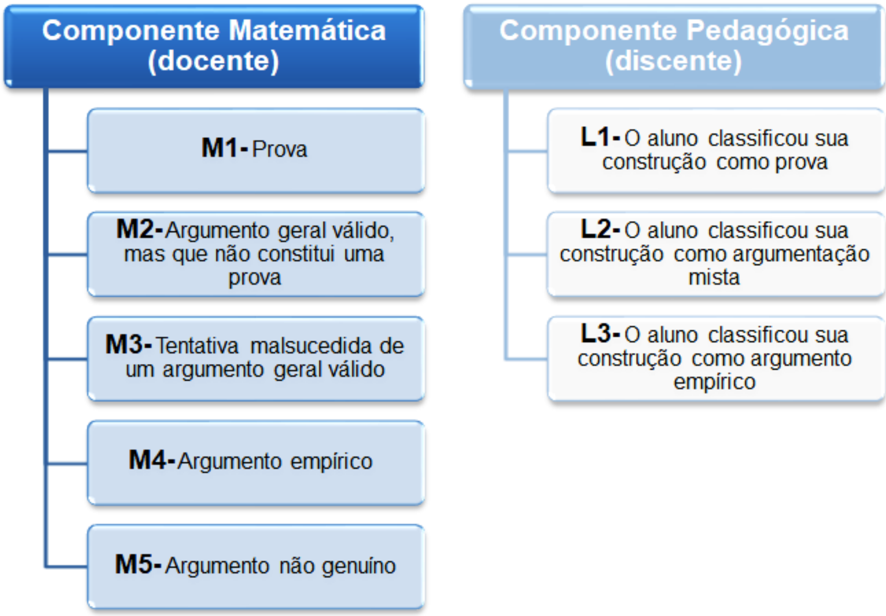


Figura 1: Categorias relativas às argumentações segundo Stylianides, Stylianides (2009, p. 245)
Fonte: Construção das autoras

As categorias da Componente Matemática abrangem argumentos em nível decrescente de sofisticação matemática. A seguir, apresentamos a descrição dada pelos autores de cada categoria, acrescida de exemplos por nós elaborados, todos eles referindo-se a argumentações para a afirmação:

A soma de dois números ímpares é sempre um número par. (*)

Categoria M1: Prova

Nesta categoria, a argumentação elaborada pelo estudante é baseada nas regras de dedução matemática, e cada etapa de dedução é devidamente justificada. As afirmações apresentadas, além de corretas, estão devidamente justificadas e cobrem todos os casos contemplados pela afirmação a ser provada, constituindo, assim, uma demonstração para a mesma.

Levando em consideração o nível de maturidade matemática de um estudante do primeiro ano de Licenciatura em Matemática, exemplificamos a categoria M1.

Exemplo 1- Demonstração para (*) esperada de um licenciando em Matemática:

Todo número natural par é da forma $2n$ *e todo número natural ímpar é da forma* $2n + 1$*, sendo* n *um número natural. Simbolicamente, queremos demonstrar que, dados* a*,* b *números naturais,* $(2a+1) + (2b+1) = 2c$*, sendo* c *um número natural a ser determinado.*

Partindo da adição $(2a + 1) + (2b + 1)$ *e utilizando as propriedades associativa e comutativa da adição de números naturais, podemos escrever*

$$(2a + 1) + (2b + 1) = (2a + 2b) + (1+1) = (2a + 2b) + 2 = 2a + 2b + 2.$$

Pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, temos

$$2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1).$$

Como $(a + b + 1)$ *é a soma de três números naturais, ela é também um número natural. Assim, tomando* $c = a + b + 1$ *temos que* $(2a + 1) + (2b + 1) = 2c$*, e* c *é um número natural, portanto, pela definição de número par,* $(2a + 1) + (2b + 1)$ *é um número par.*

Categoria M2: argumento geral válido, mas que não constitui uma prova para a afirmação em consideração.

Nessa categoria, o argumento do estudante também é baseado em dedução matemática correta, entretanto não constitui uma demonstração para a afirmação em consideração porque, por exemplo: faltam justificativas que apoiem as deduções matemáticas apresentadas; não estão contemplados todos os possíveis casos abarcados na hipótese da afirmação (ver Exemplo 2); a afirmação em questão estabelece uma equivalência, porém só foi apresentada a demonstração de uma das implicações que a compõem.

Exemplo 2- O argumento de um estudante para (*) tratando apenas da soma de dois números ímpares iguais:

Vamos demonstrar que $(2a+1) + (2a+1) = 2b$*, sendo* a *um número natural dado e* b *um número natural a determinar. Usando as propriedades associativa, comutativa e distributiva da multiplicação em relação à adição, temos*

$$(2a+1) + (2a+1) = (2a + 2a) + (1+1) = 4a + 2 = 2\,(2a + 1).$$

O número $(2a + 1)$ *é natural, pois é a soma dos números naturais* $2a$ e 1*. Então, definindo* $b = (2a + 1)$*, temos que* $2(2a + 1) = 2b$ *e* b *é um número natural; portanto, pela definição de número par,* $(2a + 1) + (2a + 1)$ *é um número par.*

Categoria M3: tentativa malsucedida de um argumento geral válido.

Nessa categoria, o aluno, ao tentar demonstrar a sentença dada, faz uso, em sua construção, de argumentos gerais inválidos (Exemplo 3) ou argumentos incompletos.

Exemplo 3- O estudante, ao tentar demonstrar que, dados a, b *números naturais, existe um número natural* c *tal que* $(2a + 1) + (2b + 1) = 2c$, apresenta um erro ao afirmar, em seu argumento para (*), que $2a + 2b + 1 + 1 = 6ab$:

$$(2a + 1) + (2b + 1) = 2a + 2b + 1 + 1 = 6ab = 2(3ab).$$

O número $(3ab)$ *é natural, pois é o produto de números naturais. Tomando* $c = 3ab$, *temos que* $(2a + 1) + (2a + 1) = 2c$, *e* c *é um número natural; portanto, pela definição de número par,* $(2a + 1) + (2b + 1)$ *é um número par.*

Categoria M4: argumento empírico.

Esta categoria engloba argumentos que se apoiam exclusivamente em alguns dos casos contemplados pela afirmação, sem dar conta de todos os casos. Ela aproxima-se do que Balacheff (1987) denomina "empirismo ingênuo" e do que Harel e Sowder (1998), chamam de "justificativa empírica".

Exemplo 4- O estudante redige como argumento para (*) a seguinte frase:

A soma de dois números ímpares é par porque, por exemplo, 5 *e* 7 *são ímpares,* $5+7 = 12$ *e* 12 *é, de fato, par:* $12 = 2 \times 6$.

Categoria M5: argumento não genuíno.

Nesta categoria encontram-se argumentações irrelevantes ou que evidenciam um envolvimento mínimo do discente com a afirmação a ser demonstrada ou, ainda, argumentos potencialmente relevantes, cuja relevância, porém, não foi evidenciada pelo aluno (Exemplo 5).

Exemplo 5- O estudante redige como argumento uma ideia correta que, no entanto, não constitui uma demonstração para (*):

A soma de dois números pares é sempre um número par. De fato, quando somamos dois números pares distintos, estamos juntando dois números que já são, separadamente, agrupáveis em duplas. Assim, ao somá-los, estamos apenas juntando duplas completas, não sobrando, portanto, unidade sem par.

Consideramos o Exemplo 5 potencialmente relevante como argumento para demonstrar (*). De fato, levando em conta que um número ímpar é a soma de um número par com 1, usando as propriedades comutativa e associativa pode-se reescrever a soma $(2a+1)+(2b+1)$ como $2a+2b+1+1=2a+2b+2$, e concluir, a partir da argumentação desse exemplo, que $2a+2b+2$ é um número par.

Na Componente Pedagógica, o discente, após ter as definições de prova e de argumento empírico elucidadas, deve ponderar a respeito de sua argumentação. As categorias da Componente Pedagógica elaboradas por Stylianides e Stylianides (2009) são:

Categoria L1: o discente considera a sua construção uma prova;

Categoria L2: o discente alega que sua construção é uma argumentação mista, isto é, uma argumentação que inclui elementos de prova e argumentos empíricos;

Categoria L3: o discente considera a sua construção um argumento empírico.

Encerramos esta seção ressaltando que o foco do RP está no desenvolvimento individual do aluno. Assim, tendo em vista que a presente pesquisa busca compreender como os discentes percebem argumentações e demonstrações inseridos em um ambiente de reflexão em grupo, foi necessário adequar tal metodologia de análise para essa situação, o que é explicitado na próxima seção.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Para caracterizar como alunos de um curso de Licenciatura em Matemática percebem argumentações e demonstrações inseridas em um ambiente de reflexão em grupo, foram utilizados os dados coletados durante a realização de uma oficina, intitulada *Critérios de Divisibilidade na Escola: Um Trabalho de Reflexão em Grupo*, proposta a alunos do curso de Licenciatura em Matemática na XIV Semana Acadêmica da Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. A escolha do tema levou em consideração que critérios de divisibilidade são abordados tanto no Ensino Fundamental como no curso de Licenciatura em Matemática. Para participar da oficina, os estudantes deveriam estar cursando ou já terem cursado a disciplina correspondente do curso que trata desse assunto, denominada Fundamentos de Aritmética. A oficina teve duração de três horas e meia, e contou com a participação de 19 alunos de todos os níveis do curso de Licenciatura em Matemática. Assim, a abordagem adotada foi do tipo qualitativa, uma vez que estamos interessadas em descrever a forma como os sujeitos da pesquisa argumentam e como reagem a argumentações de seus pares.

A oficina foi estruturada em dois momentos. Aos participantes, divididos em grupos com no máximo quatro componentes, foram propostas, no primeiro momento, duas questões para serem debatidas:

- Quais são os critérios de divisibilidade que vocês conhecem?
- Enuncie os critérios que você listou na pergunta anterior.

Como fechamento desse momento, seguiu-se uma plenária que buscou debater as considerações e critérios trazidos pelos grupos.

Como segundo momento, foi distribuído um critério de divisibilidade para cada grupo e foi proposta a seguinte atividade:

- Demonstre o critério de divisibilidade destinado ao seu grupo.

Duas das pesquisadoras conduziram os trabalhos de forma interativa, enquanto a terceira dedicou-se exclusivamente a observar como ocorriam as interações dentro dos grupos, sem qualquer interferência sua, e circulando por todos os grupos nos dois momentos da oficina. A coleta de dados baseou-se tanto nas observações das pesquisadoras que interagiram com os participantes como – e principalmente – nos dados recolhidos pela pesquisadora observadora e registrados em um caderno de campo. Foram também utilizadas as respostas escritas entregues pelos grupos, as fotos dos registros no quadro e os registros das falas individuais nos instantes de plenária.

A análise dos dados coletados baseou-se na Componente Pedagógica e na Componente Matemática propostas por Stylianides e Stylianides (2009), resumidas na Figura 1. Cabe ressaltar que o foco da pesquisa desses autores está no desenvolvimento individual do aluno, a saber, como este evolui na realização e compreensão de uma demonstração. Já na construção de uma demonstração em grupo, é relevante levar em consideração e analisar os argumentos propostos por algum integrante, bem como sua aceitação pelo grupo. Além disso, a dinâmica oportunizada pelo processo de reflexão dá margem a uma mudança dos argumentos propostos pelo grupo e consequente reclassificação. Assim, revelou-se necessária uma adequação e uma ampliação da categorização na Componente Pedagógica.

A adequação que propomos buscou entender como os grupos formados articulavam-se nas resoluções das atividades da oficina. Por exemplo, se no grupo há discordância com relação aos argumentos utilizados, como os integrantes defendem seus argumentos e se o grupo identifica as limitações de suas próprias justificativas. Assim, para a análise dos dados coletados, dividimos a Componente Pedagógica em duas partes, uma que leva em conta o desenvolvimento do processo da criação de uma prova oportunizada pela reflexão em grupo e nomeada por nós “Componente Pedagógica do Desenvolvimento”; outra que se refere à percepção do grupo sobre a produção textual final e sua apresentação em plenária, nomeada por nós “Componente Pedagógica Final” e que segue a mesma classificação apresentada por Stylianides e Stylianides (2009), porém para grupos. As codificações por nós empregadas na análise da Componente Pedagógica estão explicitadas na Figura 2. Já as codificações relativas à Componente Matemática utilizadas no presente trabalho são as mesmas apresentadas na Figura 1.

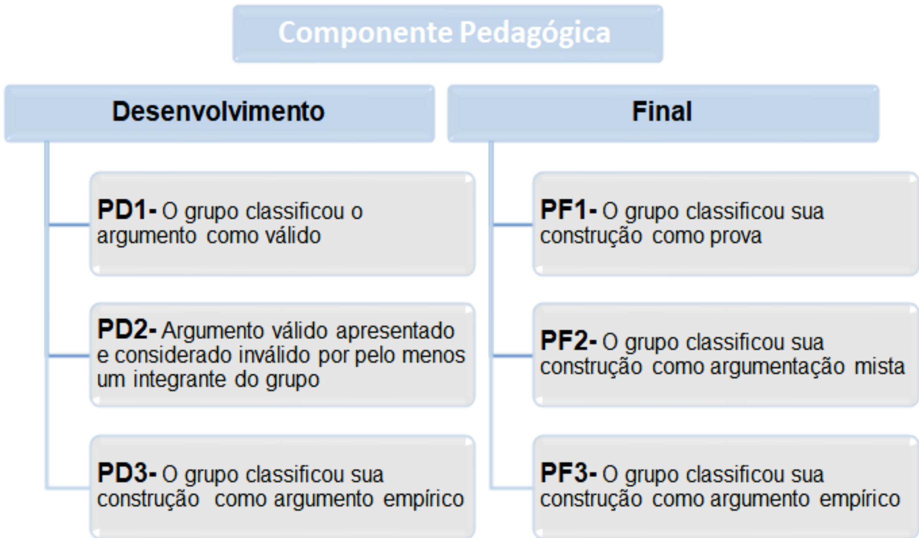


Figura 2: Adaptação da Componente Pedagógica proposta pelas autoras
Fonte: Construção das autoras

Para a análise dos dados desta pesquisa, utilizamos não apenas os argumentos escritos entregues pelos grupos, como também os argumentos orais obtidos nas observações e nas apresentações em plenária. A importância de levar-se em consideração esses dois modos de expressão é salientada por Stylianides, “[...] o uso limitado de métodos de observação e a falta de consideração dos alunos apresentando suas provas percebidas oralmente – em conjunto com as provas escritas dos alunos para as mesmas afirmações – é uma séria ameaça à validade dos resultados de pesquisa nesta área.” (Stylianides, 2019, p.177). Mais especificamente, os registros da pesquisadora observadora sobre anotações, falas e interações entre os componentes dos grupos no primeiro momento foram utilizados para a análise da Componente Pedagógica em Desenvolvimento; já os dados (orais e escritos) coletados na apresentação da construção de cada grupo em plenária foram considerados na Componente Pedagógica Final, e para a Componente Matemática, foi levada em conta a apresentação dos grupos em plenária, além da produção textual entregue às ministrantes.

5 ANÁLISE DAS CONSTRUÇÕES DAS DEMONSTRAÇÕES DOS ESTUDANTES

Iniciamos esta seção com um breve relato do primeiro momento da oficina que se resume às partes que contribuíram diretamente para a pergunta de pesquisa. Os participantes foram divididos em cinco grupos, aqui nomeados G1, G2, G3, G4 e G5. Nas discussões dentro dos grupos, surgiram preocupações com a escrita, no que se refere à clareza e à objetividade, chegando um dos integrantes a declarar “eu sei explicar, mas não sei escrever”. Também foram observadas dúvidas e conjecturas em relação a definições e generalizações, tais como zero ser ou não um número natural e a conjectura de que basta apresentar critérios de divisibilidade por números primos, porque deles podem ser deduzidos os demais. Na plenária de fechamento do primeiro momento, os grupos declararam que haviam enunciado critérios de divisibilidade por 2, por 3, por 4, por 5, por 6, por 8, por 9 e por 10. Os grupos G1 e G2 informaram que, já que $4 = 2^2$, haviam tentado determinar um critério de divisibilidade por 2^n. O grupo G1 propôs também uma generalização, procurando estabelecer um critério de divisibilidade por 5^n.

Os diferentes enunciados para o critério de divisibilidade por 2 desencadearam algumas reflexões, por exemplo, sobre a necessidade de explicitar-se a base (decimal) sobre a qual se está trabalhando. Também o questionamento das ministrantes sobre a equivalência de todos os enunciados apresentados (São todos eles “da mesma forma”?) oportunizou a importante observação de uma participante: “Um grupo usou se, e só se, enquanto os demais usaram apenas o se” (Figura 3, sem a última linha). Desencadeou-se então uma rica discussão sobre o que é um critério em Matemática. Por exemplo, ao procurarmos por um critério para a divisibilidade por 2, “procuramos por uma condição ou propriedade tal que todo número que satisfaz essa condição é divisível por 2 e, reciprocamente, todo o número que é divisível por 2 satisfaz essa condição.” (Doering e Ripoll, 2020, p. 11).

Foi então formulado um enunciado de consenso para o critério de divisibilidade por 2 (última linha da Figura 3).

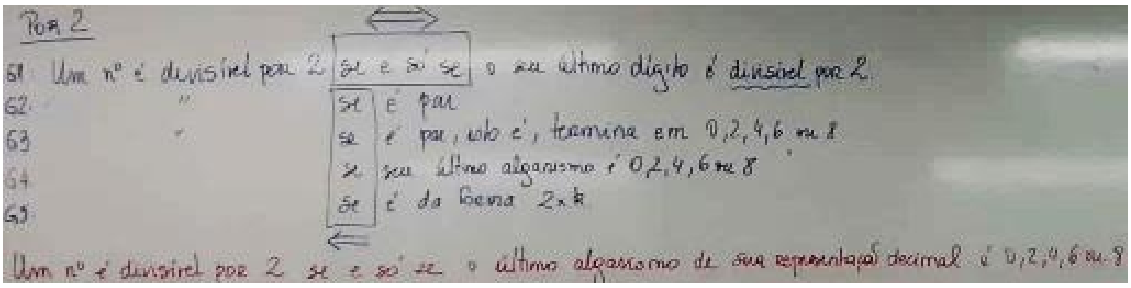
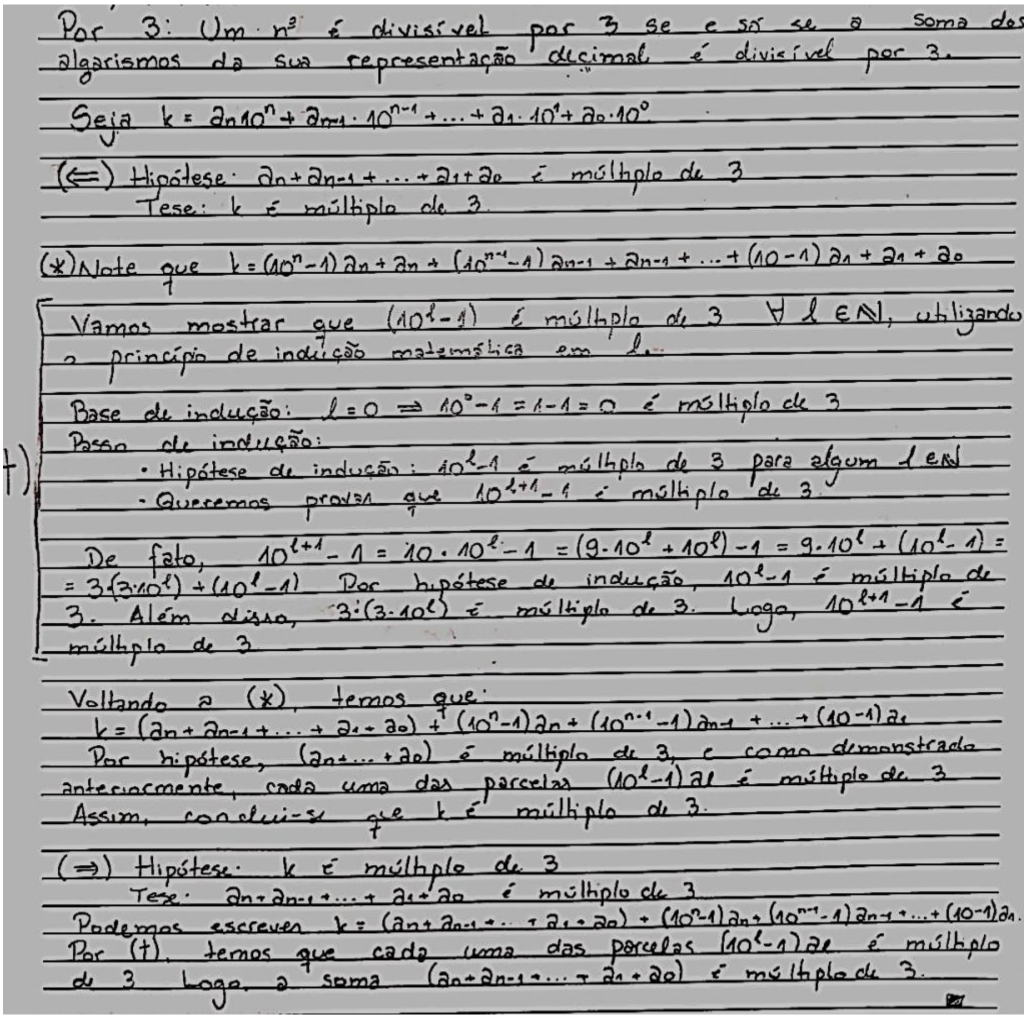


Figura 3: Enunciado do critério de divisibilidade por 2 e por 3
Fonte: arquivo pessoal das autoras

Levando em consideração as reflexões já realizadas para o critério de divisibilidade por 2, os participantes rapidamente procuraram adequar, sem interferência das ministrantes, os enunciados que haviam proposto para os demais critérios, que, por sua vez, geraram frutíferas discussões que fogem ao objetivo deste trabalho.

No segundo momento da oficina, foi solicitada, a cada grupo, a demonstração de critérios de divisibilidade específicos dentre os critérios elencados no primeiro momento e que, posteriormente, deveriam ser apresentados no quadro, em plenária. Assim, foram destinados os critérios de divisibilidade por 3 e por 9 para os grupos G1 e G4, por 10 e por 100 para o grupo G2, por 2 e por 4 para o grupo G3, e por 2 e por 5 para o grupo G5. Durante o processo das construções das provas, as pesquisadoras ministrantes circularam pelos grupos, eventualmente estimulando as discussões em andamento, enquanto a pesquisadora observadora anotava aspectos que considerava relevantes para posterior análise das produções nas Componentes Matemática e Pedagógica (Figura 2).

Na construção da demonstração do critério "Um número é divisível por 3 se, e somente se, a soma dos algarismos de sua representação decimal é divisível por 3", o grupo G1 propôs uma demonstração por indução para a afirmação "10^t-1 é múltiplo de 3, qualquer que seja t". Um de seus integrantes utilizou a igualdade $(10^n-1) \times a + a = 10^n \times a$ (Figura 4) que foi questionada apenas por um colega que, após utilizar a propriedade distributiva, convenceu-se da validade dessa afirmação. Assim, a classificação da produção do grupo na Componente Pedagógica do Desenvolvimento mudou de PD2 para PD1. O mesmo grupo, ao apresentar sua produção em plenária, utilizou a frase "a prova criada por nosso grupo é a seguinte ...", por isso a sua produção na Componente Pedagógica Final foi classificada como PF1. A produção do grupo G1 efetivamente constituiu uma prova, por isso foi classificada na Componente Matemática como M1.



Por 3: Um nº é divisível por 3 se e só se a soma dos algarismos da sua representação decimal é divisível por 3.

Seja $k = a_n 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$

($\Leftarrow$) Hipótese: $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ é múltiplo de 3
Tese: k é múltiplo de 3.

(*) Note que $k = (10^n - 1)a_n + a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + a_{n-1} + \ldots + (10-1)a_1 + a_1 + a_0$

Vamos mostrar que $(10^l - 1)$ é múltiplo de 3 $\forall\, l \in \mathbb{N}$, utilizando o princípio de indução matemática em l.

Base de indução: $l = 0 \Rightarrow 10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ é múltiplo de 3

(†) Passo de indução:

- Hipótese de indução: $10^l - 1$ é múltiplo de 3 para algum $l \in \mathbb{N}$
- Queremos provar que $10^{l+1} - 1$ é múltiplo de 3.

De fato, $10^{l+1} - 1 = 10 \cdot 10^l - 1 = (9 \cdot 10^l + 10^l) - 1 = 9 \cdot 10^l + (10^l - 1) = 3(3 \cdot 10^l) + (10^l - 1)$. Por hipótese de indução, $10^l - 1$ é múltiplo de 3. Além disso, $3 \cdot (3 \cdot 10^l)$ é múltiplo de 3. Logo, $10^{l+1} - 1$ é múltiplo de 3.

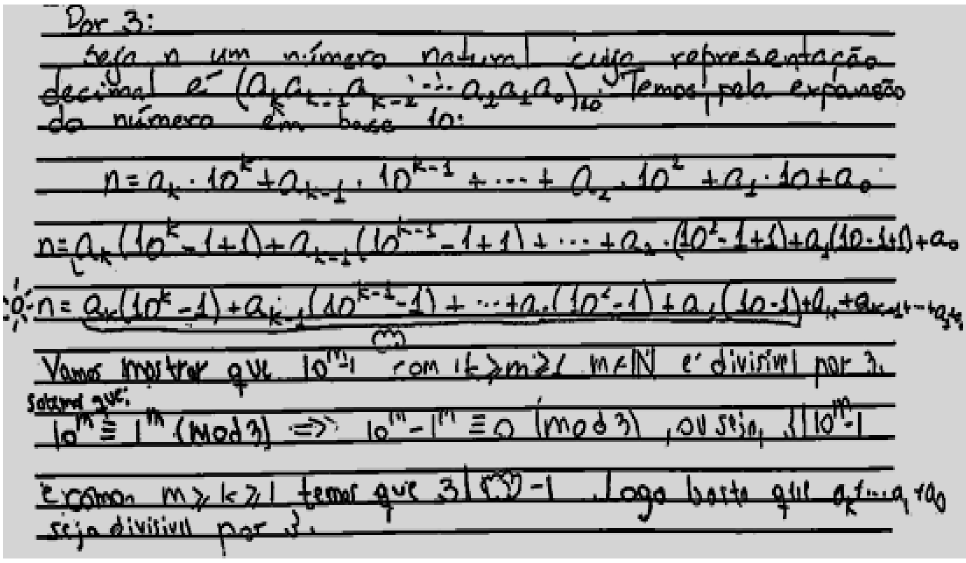
Voltando a (*), temos que:
$k = (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) + (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + \ldots + (10-1)a_1$
Por hipótese, $(a_n + \ldots + a_0)$ é múltiplo de 3, e como demonstrado anteriormente, cada uma das parcelas $(10^l - 1)a_l$ é múltiplo de 3. Assim, conclui-se que k é múltiplo de 3.

($\Rightarrow$) Hipótese: k é múltiplo de 3
Tese: $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ é múltiplo de 3

Podemos escrever $k = (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) + (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + \ldots + (10-1)a_1$.
Por (†), temos que cada uma das parcelas $(10^l - 1)a_l$ é múltiplo de 3. Logo, a soma $(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0)$ é múltiplo de 3.

Figura 4: Produção sobre o critério de divisibilidade por 3 apresentada pelo grupo G1
Fonte: arquivo pessoal das autoras

No desenvolvimento da demonstração pelo grupo G4 do critério de divisibilidade por 3, inicialmente um integrante questionou a argumentação proposta por um dos colegas e que utilizava Congruência Modular. Após os demais participantes do grupo relembrarem ao integrante questionador esse conteúdo, todos os integrantes concordaram com todos os passos da demonstração apresentada pelo grupo. Assim, na Componente Pedagógica do Desenvolvimento, a classificação da produção do grupo passou de PD2 para PD1. Na Componente Pedagógica Final, a classificação foi PF1, visto que, na plenária, o grupo apresentou sua produção como prova (Figura 5). Na Componente Matemática, esse grupo demonstrou somente uma das implicações da equivalência que constitui esse critério, recebendo, por essa razão, a classificação M2.



Por 3:

Seja n um número natural cuja representação decimal é $(a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_2 a_1 a_0)_{10}$. Temos, pela expansão do número em base 10:

$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$

$n = a_k(10^k - 1 + 1) + a_{k-1}(10^{k-1} - 1 + 1) + \cdots + a_2 \cdot (10^2 - 1 + 1) + a_1(10 - 1 + 1) + a_0$

$n = a_k(10^k - 1) + a_{k-1}(10^{k-1} - 1) + \cdots + a_2(10^2 - 1) + a_1(10 - 1) + a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0$

Vamos mostrar que $10^m - 1$ com $k \geq m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ é divisível por 3.

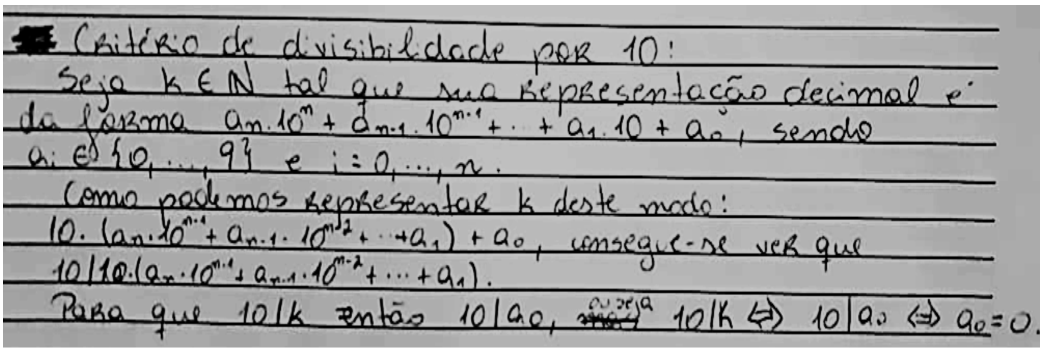
Sabemos que:

$10^m \equiv 1^m \pmod{3} \Rightarrow 10^m - 1^m \equiv 0 \pmod{3}$, ou seja, $3 | 10^m - 1$

E como $m \geq k \geq 1$ temos que $3 | (10^m) - 1$. Logo basta que $a_k + \cdots + a_1 + a_0$ seja divisível por 3.

Figura 5: Produção sobre o critério de divisibilidade por 3 apresentada pelo grupo G4
Fonte: arquivo pessoal das autoras

A construção pelo grupo G2 da demonstração do critério “Um número é divisível por 10 se e somente se o último algarismo de sua representação decimal é zero”, foi classificada como PD3 na Componente Pedagógica do Desenvolvimento, pois o grupo usou a equivalência “a_0 é divisível por 10 se e só se é igual a zero”, sem explicitar o que a_0 representa, o que foi contestado e complementado por um dos participantes do grupo: “a equivalência mencionada é válida porque $a_0 < 10$”. A argumentação foi então complementada e sua classificação passou para PD1. Como o grupo apresentou sua produção em plenária como uma prova (Figura 6), ela foi classificada como PF1 na Componente Pedagógica Final. No entanto, tal construção continuou necessitando de complementações, como a justificativa para a propriedade “se um número é divisor de $a + b$ e é divisor de a, então é também divisor de b”. Assim, na Componente Matemática, a produção foi classificada como M2.



Critério de divisibilidade por 10:

Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que sua representação decimal é da forma $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$, sendo $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$ e $i = 0, \ldots, n$.

Como podemos representar k deste modo: $10 \cdot (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0$, consegue-se ver que $10 | 10 \cdot (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1)$.

Para que $10|k$ então $10|a_0$, ou seja $10|k \Leftrightarrow 10|a_0 \Leftrightarrow a_0 = 0$.

Figura 6: Produção sobre o critério de divisibilidade por 10 apresentada pelo grupo G2
Fonte: arquivo pessoal das autoras

Durante o desenvolvimento pelo grupo G3 da demonstração do critério “um número é divisível por 4 se e somente se os dois últimos algarismos de sua representação decimal, na mesma ordem, formam um número que é divisível por 4”, um integrante logo encontrou um caminho para justificar a sentença, explicando-o para os demais. Como os demais integrantes do grupo concordaram com os argumentos apresentados pelo colega, na Componente Pedagógica do Desenvolvimento, a produção foi classificada como PD1, e, na Componente Pedagógica Final, como PF1. A demonstração apresentada, apesar de correta, referia-se apenas a uma das implicações da equivalência que constitui esse critério, por isso, na Componente Matemática, a classificação da produção do grupo foi M2.

O grupo G5 evidenciou bastante dificuldade na construção da demonstração para o critério de divisibilidade por 2. O grupo reconheceu que algumas de suas argumentações estavam incorretas, sendo então classificada como PD3 na Componente Pedagógica do Desenvolvimento. Como o grupo não conseguiu modificar sua construção, não houve alteração posterior. Em plenária, o grupo manifestou reconhecer que sua construção apresentava partes corretas e incorretas. Dessa forma, na Componente Pedagógica Final, a produção foi classificada como PF2. Na realidade, o grupo, em toda a sua construção, fez uso do empirismo e de expressões como “temos certeza que” e “só pode” (Figura 7), sendo ela classificada na Componente Matemática como M4.

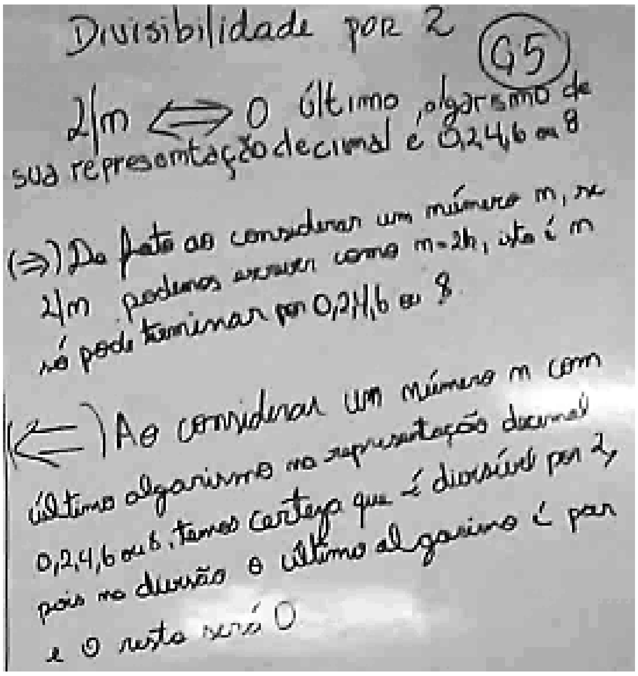


Figura 6: Produção sobre o critério de divisibilidade por 2 apresentada pelo grupo G5
Fonte: arquivo pessoal das autoras

Os integrantes dos grupos G3 e G5 estavam, no momento da oficina, cursando a disciplina Fundamentos de Aritmética, que abordava Congruência Modular, entretanto, ainda não haviam chegado a estudar tal tema. Sendo assim, os discentes declararam não ter compreendido a demonstração apresentada pelo grupo G4. Além disso, confessaram que ainda tinham dificuldades na construção de uma demonstração por indução, como a realizada pelo grupo G1, manifestando, com otimismo, sua convicção de que "um dia conseguiremos demonstrar por indução com naturalidade, igual aos veteranos, mas ainda está muito difícil".

A Tabela 1 resume a análise do segundo momento da oficina, utilizando as classificações apresentadas na Figura 2 e evidenciando que os grupos G3 e G5 não apresentaram movimentação na Componente Pedagógica do Desenvolvimento.

Tabela 1: Análise dos argumentos apresentados pelos grupos, segundo as Componentes Matemática e Pedagógica

	Componente Pedagógica do Desenvolvimento	Componente Pedagógica Final	Componente Matemática
G1	PD2 → PD1	PF1	M1
G2	PD3 → PD1	PF1	M2
G3*	PD1	PF1	M2
G4	PD2 → PD1	PF1	M2
G5*	PD3	PF3	M4

(*) grupos formados basicamente por alunos da etapa inicial do curso (cursando Fundamentos de Aritmética)
Fonte: Elaborado pelas autoras

Como encerramento da plenária, foi proposta uma discussão sobre a viabilidade de levarem-se algumas dessas demonstrações para a sala de aula da Educação Básica, o que contribuiria para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes desse nível. Foi consenso que, para isso, deveriam ser construídas novas provas ou serem realizadas adequações nas demonstrações construídas na oficina, a fim de torná-las mais explicativas. A falta de tempo na oficina inviabilizou a continuidade dessa discussão, porém, por meio de manifestações orais de alguns participantes, foi possível perceber que admitiram a possibilidade de, pelo menos, refletir quanto à viabilidade do uso de demonstração como ferramenta didática na sala de aula, o que avaliamos como um passo relevante para tais integrantes na direção do Conhecimento de Matemática para o Ensino. (Ball; Thames; Phelps 2008).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo da pesquisa aqui relatada foi investigar como os alunos de um curso de Licenciatura em Matemática percebem argumentações e demonstrações quando inseridos em um ambiente de reflexão em grupo, contexto que, de acordo com Carraro e Andrade (2011); Pivetta e Isaia (2014); Simão et al. (2009), oportuniza uma dinâmica de colaboração e discussão entre pares.

Os dados foram coletados durante uma oficina proposta pelas autoras a alunos de diversos níveis do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, com uma dinâmica que oportunizou reflexão tanto em grupos como em plenárias. Para a análise dos dados, apoiamo-nos na metodologia proposta por Gabriel Stylianides e Andreas Stylianides explicitada na Seção 3, adaptando-a para grupos e preservando as Componentes Matemática e Pedagógica sugeridas pelo autor. No entanto, em virtude da dinâmica de grupo, percebemos uma subdivisão natural da Componente Pedagógica (por nós denominadas Componente Pedagógica do Desenvolvimento e Componente Pedagógica Final), bem como novas categorias a serem acrescentadas. Nessa adaptação, ressaltamos que os novos códigos criados e mencionados na Figura 2 referem-se apenas às situações que apareceram na experiência aqui relatada.

No que se refere à análise da Componente Pedagógica do Desenvolvimento, foi possível perceber, em alguns grupos, uma movimentação entre as classificações, devido às discordâncias e reformulações com relação aos argumentos utilizados e à identificação das limitações de justificativas empregadas na construção das demonstrações solicitadas. Os grupos formados por estudantes do primeiro ano do curso não apresentaram tal movimentação ou se satisfizeram com uma produção incompleta ou, ainda, não conseguiram construir justificativas. Com isso, confirmou-se, como esperado, que os alunos mais experientes já exibem maior maturidade na construção e análise de argumentações.

Na Componente Matemática, percebemos que, embora os grupos tenham conseguido apresentar oralmente mais detalhes em suas construções na plenária, o que evidencia a importância de levar em consideração a expressão oral na análise dos dados, apenas um grupo chegou ao ponto de realizar uma demonstração suficientemente detalhada. Todas as provas apresentadas pelos grupos necessitaram de alterações e/ou complementações importantes. No entanto, 4 dos 5 grupos consideraram sua produção uma prova.

A análise da Componente Pedagógica baseou-se principalmente na observação de apenas alguns momentos de interação nos grupos, portanto não foi possível avaliar a percepção individual de todos os participantes para com a prova construída por seu grupo. Consideramos que entrevistas individuais e/ou a aplicação de um questionário final a ser respondido individualmente pelos participantes poderiam contribuir para a análise individual, já que nem todos sentem-se confortáveis em expressar oralmente sua discordância no grupo.

A dinâmica de reflexão em grupo escolhida para a oficina evidenciou pontos positivos: i) a evolução dos participantes na compreensão e na escrita de uma demonstração; ii) a relevância do Conhecimento Matemático para o Ensino; iii) a utilidade do processo de construção de uma demonstração como ferramenta didática à aprendizagem de Matemática.

Esta pesquisa conseguiu identificar, pelo menos relativamente ao tema Critérios de Divisibilidade, algumas formas de percepção de argumentos e de construções de provas por parte dos licenciandos observados, evidenciando divergências entre as percepções desses sobre demonstração e o que é efetivamente uma prova. Ela indica haver ainda muito a ser feito com relação a proporcionar aos licenciandos maior compreensão sobre pensamento matemático e, principalmente, sobre demonstração. As divergências de percepção evidenciadas podem servir de inspiração para caminhos que contribuam nesta direção e levar o futuro professor a considerar a demonstração como uma ferramenta didática alternativa para a sala de aula, como propõem Hanna (1990), Harel e Sowder (1998) e Stylianides (2007).

REFERÊNCIAS

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176. doi: 10.1007/BF00314724

Ball, D. L., Thames M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: the struggle for meaning. *Journal For Research In Mathematics Education*, 15(1), 35-49. doi: 10.2307/748986

Carraro, P. R. & Andrade, A. S. (2011). O professor do ensino fundamental em grupos de reflexão. Revista Mal Estar e Subjetividade, 11(4), 1339-1378. Recuperado em 21 de abril de 2022, de http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1518-61482011000400003&lng=pt&tlng=pt.

Dewey, J. (1959). *Como pensamos: Como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo: uma reexposição*. São Paulo: Companhia Editora Nacional.

Doering, L. R. & Ripoll, C. C. (2020). Critérios de divisibilidade para todas as idades: Um trabalho de reflexão de grupo. *IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13. doi: 10.1007/bf01809605.

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.

Hanna, G. (2000). A Critical Examination of Three Factors in the Decline of Proof. *Interchange*, 31, 21–33. doi: 10.1023/A:1007630729662

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education*. v.3, p. 234-283.

Leron, U. (1983). Structuring Mathematical Proofs. *The American Mathematical Monthly*, 90(3), 174-185. doi:10.2307/2975544

Marques, J. C. (2009). Pensamento de Grupo: o risco de decisões equivocadas e a diversidade de perspectivas na solução de problemas. *Psicologia Argumento*, 27(57), 141-149.

Mathias, C., Doering, L. R. & Ripoll, C. C. (2020). Uma Reflexão de Professores sobre Demonstrações Relativas à Irracionalidade de √2. *Bolema*. Rio Claro (SP), 34(67), 719-739.

Movshovitz-Hadar, N. (1988). Stimulating Presentation of Theorems Followed by Responsive Proofs. *For the Learning of Mathematics*, 8(2), 12-30. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/40247920> . Acesso em fev. 2021

Pinto, N. B. (2000). *O erro como estratégia didática: estudo do erro no ensino da matemática elementar*. Campinas, SP: Editora Papirus.

Pivetta, H. M. F. & Isaia, S. M. de A. (2014). Grupo reflexivo de professores da educação superior: estudo sobre seus movimentos construtivos. *Revista Portuguesa de Educação*, 27(1), 111-132, doi: 10.21814/rpe.4300.

Ripoll, J. B., Ripoll, C. C. & Silveira, J. F. P. (2011). *Números Racionais, Reais e Complexos*. Porto Alegre, RS: Editora UFRGS.

Simão, A. M. V. et al. (2009). Formação de professores em contextos colaborativos: um projeto de investigação em curso. *Sísifo: Revista de Ciências da Educação*, 8, 61-74. Disponível em: <http://sisifo.fpce.ul.pt>. Acesso em: fev. 2021.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 38, (3), 289-321. doi:10.2307/30034869

Stylianides, A. J. (2019). Secondary students' proof constructions in mathematics: The role of written versus oral mode of argument representation. *Review of Education*. 7(1), 156-182. doi: 10.1002/rev3.3157

Stylianides, A. J. & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies In Mathematics*, 72(2), 237-253. doi: 10.1007/s10649-009-9191-3

Stylianides, G. J. (2008). An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9-16. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/40248592> Acesso em: fev.2021

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical Thinking And Learning*, 11(4), 258-288. doi: 10.1080/10986060903253954

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Construções e percepções de alguns alunos de licenciatura em matemática sobre demonstrações.

Luisa Rodriguez Doering
Doutora, Professora Associada
UFRGS, Instituto de Matemática e Estatística, Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, Porto Alegre, Brasil
ldoering@mat.ufrgs.br
https://orcid.org/0000-0002-9678-7682

Cydara Cavedon Ripoll
Doutora, Professora Titular
cydara@mat.ufrgs.br
https://orcid.org/0000-0002-7645-5322

Érica Vitória Machado da Silva
Mestranda
UFRGS, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, Porto Alegre, Brasil
erica-vitoria-855@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0002-2400-5354

Endereço de correspondência do principal autor
Avenida Bento Gonçalves, 9500, Prédio 43-111, 91509-900, Agronomia, Porto Alegre - RS

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: L. R. Doering, C. C. Ripoll, É. V. M. Silva
Coleta de dados: L. R. Doering, C. C. Ripoll, É. V. M. Silva
Análise de dados: L. R. Doering, C. C. Ripoll, É. V. M. Silva e
Discussão dos resultados: L. R. Doering, C. C. Ripoll, É. V. M. Silva
Revisão e aprovação: L. R. Doering, C. C. Ripoll, É. V. M. Silva

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO
Bolsista: Érica Vitória Machado da Silva
Programa de Bolsas: BIC
Instituição Financiadora: UFRGS
Projeto de Pesquisa: 34709 - Análise de Material Didático

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 08-07-2021 – Aprovado em: 08-04-2022