Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

AS CONDIÇÕES COGNITIVAS DA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA: DESENVOLVIMENTO DA VISUALIZAÇÃO, DIFERENCIAÇÃO DOS RACIOCÍNIOS E COORDENAÇÃO DE SEUS FUNCIONAMENTOS[1]

Les Conditions Conitives De L'apprentissage De La Geometrie: Développement De La Visualisation, Différenciation Des Raisonnements Et Coordination De Leur Fonctionnements

Raymond **DUVAL**
Professor Emérito da Université du Littoral Côte d'Opale/France

Tradução

Cleide Ribeiro Mota **ARINOS**
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, Brasil.
cleide.arinos@ufms.br
https://orcid.org/0000-0001-9510-5590

José Luiz Magalhães de **FREITAS**
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, Brasil.
Universidade para o Desenvolvimento do Estado e da Região do Pantanal, Campo Grande, Brasil.
joseluizufms2@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5536-837X

Méricles Thadeu **MORETTI**
Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brasil.
mthmoretti@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

... não negligenciar de maneira alguma a geometria

República VII, 527 c

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

[1] Este texto é tradução do artigo: DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, n. 10, p. 5-53, 2005.
Foram produzidas algumas adaptações de forma no texto original para adequá-lo às normas da ABNT.

RESUMO

A geometria é um domínio do conhecimento que exige articulação cognitiva de dois registros de representação muito diferentes: a visualização de formas para representar o espaço e a linguagem para enunciar propriedades para daí deduzir novas. As dificuldades da aprendizagem vêm inicialmente da forma como esses dois registros são utilizados, de uma maneira frequentemente contrária ao seu funcionamento cognitivo normal e fora da matemática. O modo de ver as figuras depende da atividade em que ela é mobilizada. Podemos assim, distinguir um modo de ver que funciona de maneira icônica e um modo de ver que funciona de maneira não icônica. A visualização não icônica implica na desconstrução das formas já visualmente reconhecidas. Existem três tipos de desconstrução das formas: a desconstrução instrumental para construir uma figura, a decomposição heurística e a desconstrução dimensional. A desconstrução dimensional constitui o processo central da visualização geométrica. Para analisar o papel da linguagem em geometria, deve-se distinguir três níveis de operações discursivas: a denominação, a enunciação de propriedades e a dedução. Essa distinção é essencial porque a relação da linguagem com a visualização muda completamente de um nível a outro. Contudo, nesta variação, se esconde um fenômeno cognitivo fundamental: o hiato dimensional. As passagens entre visualização e discurso implicam em geometria uma mudança do número de dimensões para reconhecer os objetos do conhecimento visados em cada um desses dois registros. A tomada de consciência da desconstrução dimensional das formas e a da variedade de operações discursivas são as condições para que a visualização e o discurso funcionem em sinergia, apesar de seu hiato dimensional. São esses os limiares decisivos na aprendizagem da geometria.

Palavras-chave: Análise Funcional, Codificação, Circuito De Visualização, Contraexemplo, Decomposição Heurística (De Figuras), Desconstrução Dimensional (De Formas), Definição, Reta, Figura, Hiato Dimensional, Prova, Proposição, Reconfiguração, Representação Autossuficiente, Fonte De Convicção, Unidade Figural, Visualização Icônica, Visualização Não Icônica, Representação Autossuficiente

RÉSUMÉ

La géométrie est un domaine de connaissance qui exige l'articulation cognitive de deux registres de représentation très différents : la visualisation de formes pour représenter l'espace et le langage pour en énoncer des propriétés et pour en déduire de nouvelles. Les difficultés d'apprentissage viennent d'abord de ce que ces deux registres sont utilisés d'une manière souvent contraire à leur fonctionnement cognitif normal en dehors des mathématiques. La manière de voir des figures dépend de l'activité dans laquelle elle est mobilisée. On peut ainsi distinguer une manière de voir qui fonctionne de manière iconique et une manière de voir fonctionnant de manière non iconique. La visualisation non iconique implique que l'on déconstruise les formes déjà visuellement reconnues . Il y trois types de déconstruction des formes : la déconstruction instrumentale pour construire une figure, la décomposition heuristique et la déconstruction dimensionnelle. La déconstruction dimensionnelle constitue le processus central de la visualisation géométrique. Pour analyser le rôle du langage en géométrie, il faut distinguer trois niveaux d'opérations discursives : la dénomination, l'énonciation de propriétés, la déduction. Cette distinction est essentielle car le rapport du langage à la visualisation change complémentaire d'un niveau à l'autre. Cependant, sous cette variation, se cache un phénomène cognitif fondamental : le hiatus dimensionnel. Les passages entre visualisation et discours impliquent en géométrie un changement du nombre dimensions pour reconnaître les objets de connaissance visés dans chacun des deux registres. La prise de conscience de la déconstruction dimensionnelle des formes et celle de la variété des opérations discursives sont les conditions pour que la visualisation et le discours fonctionnent en synergie malgré leur hiatus dimensionnel. Ce sont là les seuils décisifs dans l'apprentissage de la géométrie.

Mots-Clés: Analyse Fonctionnelle, Codage, Circuit De Visualisation, Contre-Exemple, Décomposition Heuristique (Des Figures), Déconstruction Dimensionnelle (Des Formes), Définition, Droite, Figure, Hiatus Dimensionnel, Preuve, Proposition, Reconfiguration, Représentation Autosuffisante, Source De Conviction, Unité Figurale, Visualisation Iconique, Visualisation Non Iconique, Représentation Autosuffisante

Entre todos os domínios de conhecimentos que o aluno deve adentrar, a geometria é o que exige atividade cognitiva mais completa, porque ela solicita o gesto, a linguagem e o olhar. Nela, é necessário construir, raciocinar e ver, indissociavelmente. Mas a geometria é também o domínio mais difícil de ensinar e um daqueles em que, mesmo quando os objetivos permanecem muito modestos, os resultados alcançados são decepcionantes. Basta consultar as avaliações nacionais no início do colégio (equivalente aos anos finais do ensino fundamental no Brasil), sem mesmo lembrar as dificuldades concernentes à demonstração, para constatar um estado de coisas bem conhecido. O que é que, na atividade cognitiva solicitada para fazer de geometria, se revela ser tão complexa ou tão incompreensível para os alunos: construir, raciocinar para justificar ou ver? Paremos um instante nas figuras, as quais condensam de alguma maneira todas as modalidades da atividade cognitiva.

Ver uma figura, em geometria, exige dissociar o que diz respeito à grandeza e, portanto, aquilo que depende da escala de grandeza onde se efetua o ato de ver, e o que concerne às formas discriminadas, as quais são independentes da escala de grandeza. A relação com as figuras, ou seja, a maneira de olhar para o que elas fornecem para ver, concerne à discriminação das formas e não a grandeza ou a mudança da escala de grandeza. É essa, aliás, a análise que Poincaré fez da "intuição geométrica":

> Quando, em um teorema de geometria métrica, é feito um chamado a essa intuição, é porque é impossível estudar as propriedades métricas de uma figura fazendo abstração de suas propriedades qualitativas, isto é, aquelas que são o objeto próprio da Análise ... É para favorecer essa intuição que o geômetra precisa desenhar as figuras, ou pelo menos representá-las mentalmente. Ou, se para ele fica "barato" as propriedades métricas ou projetivas dessas figuras, se ele se apega apenas em suas propriedades puramente qualitativas, é que é ali que a intuição geométrica intervém realmente. (POINCARÉ, 1963, p. 134-135)

A discriminação dessas "propriedades puramente qualitativas" constitui o primeiro limiar crítico para a aprendizagem da geometria. E esse limiar pode ser o mais difícil para os alunos superá-lo no ensino, mas, também o mais decisivo para levá-los a compreender o que é uma abordagem geométrica.

Tal afirmação pode surpreender. De fato, o reconhecimento das propriedades "puramente qualitativas" parece diretamente enraizado na percepção. Além disso, o corpo das figuras onde os programas escolares podem demandar o conhecimento é muito restrito, e corresponde às formas que são perceptivelmente notáveis e culturalmente familiares. E, no ensino, essas figuras são encontradas na encruzilhada de uma grande variedade de atividades: observação, reprodução, construção, descrição, definição etc. Por que a fonte profunda das dificuldades que o ensino da geometria enfrenta, deveria ser procurada de início nesta intuição geométrica que se baseia na percepção, essa aqui recobrindo também o espaço do mundo cotidiano que os diferentes tipos de representação (fotos, mapas, planos, diagramas, figuras) aos quais ele dá lugar?

É a percepção que se torna um problema. Não somente ela funciona abaixo de qualquer dissociação entre grandeza e discriminação visual das formas (COREN, *et al*, 1979), mas principalmente ela impõe uma maneira comum de ver que vai ao encontro de duas maneiras de ver as figuras que são solicitadas no ensino de matemática: uma centrada na construção de figuras usando instrumentos e outra centrada em seu enriquecimento heurístico para fazer aparecer as formas que não são aquelas que o olho vê. E sabemos o quanto a passagem do funcionamento habitual da percepção das formas (KANIZA, 1998) à essas duas maneiras de ver, especialmente a segunda, podem ser difíceis para muitos alunos. No entanto, essas duas maneiras de ver são apenas a manifestação superficial de uma terceira, aquela que constitui o mecanismo cognitivo da visualização matemática: a desconstrução dimensional das formas. A construção de figuras, ou sua utilização heurística, tem significado apenas na medida que elas são parte do funcionamento da visualização matemática. Porque, com essa terceira maneira de ver, o espaço não é mais abordado sob o aspecto grandeza e mudança de escalas de grandeza, nem sob o das propriedades topológicas e afins discriminando formas, ele é abordado sob o aspecto de suas dimensões e da mudança do número de suas dimensões. A mudança do número de dimensões está no centro do olhar geométrico sobre as figuras.

Mas retornando às figuras, onde Poincaré reconheceu a necessidade cognitiva para a "intuição geométrica". Sua principal característica em comparação com as outras representações do espaço circundante que são os planos, os mapas, ou os modelos, é de não ser icônica, ou seja, não parecer a um objeto visto e conhecido na realidade. Isso significa dizer de fato que o reconhecimento dos objetos representados não depende em primeiro lugar da discriminação visual das formas, mas de hipóteses que foram dadas e que vão comandar também o olhar sobre as figuras. E nele há outro tipo de atividade que se encontra mobilizada: a produção discursiva de enunciados que se conectam entre eles para justificar, para explicar ou para demonstrar. É necessário lembrar que isso não pode ser feito fora da linguagem, mas que, como para a visualização, fazemos a linguagem funcionar da mesma maneira somente quando utilizamos fora da matemática?

São essas condições cognitivas da aprendizagem da geometria que vamos analisar em detalhe neste artigo. Mostraremos mais particularmente que a visualização e a produção de enunciados em geometria requerem funcionamentos cognitivos que são diferentes e mais complexos do que aqueles implementados fora da geometria. É por isso que seu desenvolvimento e sua coordenação devem ser considerados como objetivos do ensino tão essenciais quanto os próprios conteúdos matemáticos. Porque aqui a compreensão dos conteúdos só pode ser construída a partir de uma sinergia entre visualização e linguagem. Essas condições cognitivas são de certa forma as condições para aprender a aprender em geometria.

Começaremos por colocar em evidência a especificidade das maneiras de ver praticadas em matemática. Para isso vamos partir de uma ideia muito simples: é a tarefa solicitada que determina a relação com as figuras. A maneira de ver uma figura depende da atividade na qual ela é mobilizada. E isso nos permitirá levantar uma questão essencial para organizar as aprendizagens, e que raramente é abordada: a maneira de ver que um tipo de atividade favorece a entrar em outras maneiras de ver necessárias a outros tipos de atividade? Nós abordaremos em seguida o que constitui o processo central da visualização geométrica: a desconstrução dimensional das formas. Nenhuma das atividades classicamente exploradas para introduzir os alunos na geometria não permite verdadeiramente o desenvolvimento dessa maneira de ver. E, entretanto, essa é a única que é solicitada para o desenvolvimento das abordagens discursivas em geometria: enunciação de propriedades, definição, dedução de outras propriedades, teoremas, ... Introduzir os alunos nisso exige um outro tipo de atividade, além daquelas habitualmente exploradas. Mas, para além de sua implementação didática, esse é o problema mais global da articulação entre visualização e discurso geométrico que nós examinaremos. De fato, é aí que se situam não somente os desafios educacionais da geometria, desafios de formação geral como Platão já mencionou, mas também seus desafios científicos porque isso concerne às maneiras matemáticas de provar.

CLASSIFICAÇÃO DAS MANEIRAS DE VER EM FUNÇÃO DO PAPEL DAS FIGURAS NAS ATIVIDADES GEOMÉTRICAS PROPOSTAS AOS ALUNOS

O leque das atividades possíveis para fazer os alunos trabalharem com as figuras de geometria ou sobre as figuras de geometria é extremamente vasto. As variações das atividades ocorrem tanto sobre *a tarefa a fazer* (reproduzir uma figura conforme um modelo ou construir, ou efetuar medidas, ou ainda, descrever para um outro aluno construir a figura) e *o modo da atividade solicitada* (modalidade concreta utilizando um material manipulável, modalidade representacional se dedicando à produção gráfica, ou modalidade técnica impondo certos instrumentos). Ora, não são as mesmas maneiras de ver que são solicitadas em um e n'outro tipo de atividade, mesmo que sejam as mesmas formas nD (peças materiais 3D para manipular fisicamente, figuras 2D já construídas ou propostas para construir, para modificar,...) que são perceptivelmente apresentadas para ver. Tomando simplesmente como critério o tipo de operação nas formas dadas para ver e a maneira como as propriedades geométricas são mobilizadas em relação a esse tipo de operações, podemos distinguir quatro maneiras de ver. Essas quatro maneiras de ver são quatro entradas muito diferentes na geometria conforme mostra o quadro 1 a seguir.

O BOTÂNICO: É a entrada mais evidente e a mais imediata. Trata-se de aprender a reconhecer e a nomear as formas elementares que são utilizadas em geometria plana: tipos de triângulos e de quadriláteros, configurações obtidas por diferentes posições de duas retas, uma em relação à outra, eventualmente as formas circulares e as formas ovais etc. E trata-se, evidentemente, de observar as diferenças entre duas formas com certas semelhanças (um quadrado e um retângulo) e de observar as semelhanças entre as formas diferentes (entre um quadrado e um paralelogramo). Aqui, as propriedades distinguidas são as características visuais do contorno.

Quadro 1: Quatro entradas clássicas na geometria

	BOTÂNICO	AGRIMENSOR-geômetra	CONSTRUTOR	INVENTOR-faz-tudo
1. Tipo de operação nas **FORMAS VISUAIS**, exigida para a atividade proposta	Reconhecer as formas a partir das qualificações visuais do contorno: **UMA forma particular é privilegiada como TÍPICA**	Medir as bordas de uma superfície: **em um TERRENO ou em um DESENHO (variação de escala de grandeza e consequentemente do procedimento de medida)**	**Decompor uma forma em traços construtíveis com a ajuda de um instrumento.** É preciso (frequentemente) passar de **TRAÇOS AUXILIARES** que não pertencem a figura “final”.	**Transformar formas, umas em outras.** Deve-se adicionar **TRAÇOS REORGANIZADORES** na figura final para iniciar as transformações
2. Como as **PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS** são mobilizadas **em relação ao tipo de operação**	**Sem ligações entre as diferentes propriedades (não há definição matemática possível)**	As propriedades **são dos critérios de escolha** para as medidas a fazer**.** Elas só são uteis se remetem a uma fórmula permitindo um cálculo	Como **restrições de uma ordem de construção.** Certas propriedades são obtidas por **uma única operação de traçagem,** as outras exigem várias operações	Implicitamente por enviar a uma rede mais complexa (uma trama de retas para a geometria plana ou uma trama de intersecções de planos ...) que a figura de partida

Fonte: O autor

Na realidade esse tipo de atividade não tem nada de atividade geométrica. Ela parece geométrica apenas na medida que ela se refere às formas ditas “euclidianas”. Mas o mesmo trabalho de observação poderia (e deveria) ser feito em folhas de árvores. E entre todos os modelos de formas planas que Piaget (1947, p. 70) tinha solicitado “copiar”, para crianças de 2 a 7 anos, poderia apenas também deslizar uma folha de plátano e uma folha de castanheira, a forma de um pinheiro, e o de um abeto, ou o desenho esquemático de um automóvel. Lembre-se que a observação de Piaget era para copiar “à mão livre” sem utilizar qualquer instrumento, nem mesmo uma régua!

O AGRIMENSOR geômetra. É a entrada histórica. Consiste em aprender a medir os comprimentos de um terreno, ou solo, ou de distância entre dois pontos, e representá-los num desenho que assume o estatuto de plano. *Nos situamos então de início sobre duas escalas de grandezas que devem ser colocadas em correspondência*. No entanto, colocar em correspondência essas medidas não tem nada de natural ou evidente, porque não existe procedimento comum para medir as distâncias reais em um terreno e para medir os comprimentos dos traçados de um desenho. As tarefas específicas dessa entrada consistem em propor atividades que exigem a passagem de uma escala de grandeza a outra. O problema do vidraceiro é um exemplo típico (BERTHELOT & SALIN 94, p. 40-41): quantas medidas efetuar, e quais, para fabricar uma janela que entra em uma abertura que tem a forma de um paralelogramo? A medida do raio da terra por Eratóstenes é outro exemplo célebre.

Esse tipo de atividade mostra as dificuldades que muitos alunos encontram para colocar em correspondência o que eles veem no chão e o que é desenhado numa folha. Fazer essa correspondência exige privilegiar aspectos que são essenciais para a leitura de um plano ou de um mapa de geografia (BERTHELOT & SALIN, 2000): a escolha de objetos de referência, a escolha de pontos ou de eixos de referência para representar a posição dos objetos, uns em comparação a outros, tendo em conta direções ou orientações... Esses aspectos nem sempre são pertinentes para a representação geométrica. Além disso, nesse tipo de atividade *as propriedades geométricas são mobilizadas para fins de medida*.

O construtor: Esta entrada é necessária. Pela particularidade das figuras geométricas, pelo menos daquelas que correspondem às formas euclidianas elementares e às configurações de formas elementares, é *de serem construtíveis com a ajuda de instrumentos*. As figuras geométricas não se desenham à mão livre, elas se constroem com a ajuda de um instrumento que guia o movimento da mão, ou que a substituí. Por quê? Um instrumento permite produzir uma forma visual com uma propriedade geométrica e essa forma visual constitui a primitiva do instrumento, por causa da regularidade que ele impõe ao movimento do traçado, e *assim a invariância visual que introduz no traço*. Assim a linha reta ou o redondo regular, para os instrumentos clássicos que são a régua (não graduada) e o compasso. Sem a utilização de instrumentos, seria impossível verificar uma propriedade em uma figura.

É através da utilização de um instrumento que alunos podem realmente tomar consciência que as propriedades geométricas não são somente características perceptivas. Com efeito, a utilização de um instrumento dá a possibilidade de experimentar, de certo modo, as propriedades geométricas como **restrições de construção**: quando uma forma visual não é diretamente produzida por um instrumento, várias operações de traçados são então necessárias para obter e existe uma ordem para essas operações. Sem levar isso em conta torna a construção impossível. Naturalmente, toda mudança de instrumento resulta em mudança das propriedades geométricas que devem ser explicitamente mobilizadas.

É essa entrada que levou às inovações mais espetaculares para o ensino da geometria no decorrer dos últimos vinte anos (LABORDE, 1994). Softwares de construção têm sido desenvolvidos. Sua vantagem, além do já considerado de executar automaticamente as tarefas de realização como para as calculadoras, é de remover completamente as aproximações compensatórias da mão na utilização de instrumentos. Em outras palavras, não é mais possível de conseguir uma construção “para julgar”, sem levar em conta as propriedades geométricas. Assim, no Cabri Géomètre, uma figura construída pode conservar as configurações se movemos um de seus pontos.

O inventor: Para apresentar esta quarta entrada, basta evocar os problemas clássicos do seguinte tipo:

1) Como dividir, com um único corte de tesoura, um triângulo de modo a poder juntar os dois pedaços para formar um paralelogramo?

2) Como construir, a partir de um quadrado dado, outro quadrado duas vezes maior (cuja área seja o dobro)? (Esse problema pode ser dado no papel quadriculado, o que reduz as operações de medida a uma simples contagem de quadrados).

Esses problemas têm em comum exigir uma DESCONSTRUÇÃO VISUAL das formas perceptivas elementares que se impõem ao primeiro olhar, para poder obter a reconfiguração, ou a figura solicitada. Esses problemas tocam uma capacidade fundamental que é a condição necessária à toda utilização heurística das figuras: **adicionar traços suplementares a uma figura de partida** (isto é, aquela que acompanha um enunciado de um problema, ou que podemos construir a partir de um enunciado de um problema) **a fim de descobrir na figura um procedimento de resolução.** São esses traços suplementares que vão permitir uma reorganização visual da figura de partida. Aqui, é a procura desse traçado suplementar que constitui o problema: “como repartir com um único corte de tesoura ...?”.

Passar de uma maneira de ver a uma outra constitui uma mudança profunda de olhar, que frequentemente é ignorada no ensino. Pelo fato de que o funcionamento cognitivo envolvido para cada uma dessas quatro maneiras de ver não é o mesmo, como nós mostraremos mais adiante. Mas já podemos ressaltar que cada maneira de ver induz a um tipo particular e limitado de compreensão. O conhecimento desenvolvido não é o mesmo conforme o olhar que um aluno se sente capaz, ou incapaz, de mobilizar, na presença de uma mesma figura.

A diversidade destas maneiras de ver levanta duas questões cruciais para o ensino da geometria e para a organização das situações de aprendizagem.

(1) A prática de uma atividade favorece a aquisição de maneiras de ver relacionadas aos outros tipos de atividades? Privilegiar, por exemplo, as atividades de construção

provocam o desenvolvimento da capacidade heurística de enriquecer e reorganizar as figuras?

Esta questão de transferência, essencial na aprendizagem, pode ser estendida?

(1 bis) Existe aí uma ordem, e portanto uma hierarquia a respeitar, para introduzir as atividades próprias destas quatro entradas? Por exemplo, a abordagem botanista pode ser considerada como a primeira etapa necessária à toda aquisição de conhecimentos geométricos?

(2) Qual maneira de ver a utilização da linguagem em geometria (para formular definições e teoremas, para mobilizá-los num raciocínio, para avançar ou explicar uma conjectura...), ela exige? É uma dessas quatro maneiras de ver ou não seria ao contrário uma quinta, totalmente diferente?

Esta questão nos remete a uma questão fundamental tanto de um ponto de vista cognitivo quanto de um ponto de vista epistemológico:

(2 bis) Como, e até onde, "ver" e "enunciar" podem se juntar na geometria?

Quadro 2: O modo de compreensão e de conhecimento ligado à cada maneira de ver

	BOTANISTA	AGRIMENSOR-geômetra	CONSTRUTOR	INVENTOR faz-tudo
ESTATUTO EPISTEMOLÓGICO	**CONSTATAÇÃO** perceptiva imediata: "isso se vê sobre..."	**CONSTATAÇÃO** resultante da leitura de um instrumento de medida	**RESULTADO** *de um procedimento de construção*	**RESULTADO** de uma decomposição da figura de partida em unidades figurais que a reconfiguramos em outra.
FONTE COGNITIVA DA CONFIANÇA	**Superposição** efetuada no olhar ou utilizando um modelo	**Comparação** dos valores numéricos que foram obtidos empiricamente	**Necessidade interna** para a sequência das operações do procedimento de construção	**Invariância das unidades figurais** que são referentes da transformação da figura de partida.

Fonte: O autor

Estas questões são cruciais porque a predominância dada a uma dessas quatro entradas, como o desconhecimento da complexidade de articulação entre ver e dizer, podem criar obstáculos que, a médio e longo prazo vão se revelar intransponíveis para o progresso dos alunos. E, no entanto, estas questões são raramente colocadas, de tanto que a resposta "sim" é considerada evidente para a primeira, que a tomamos em sua formulação estrita ou na sua formulação expandida. No que concerne à segunda questão ela pode parecer bem estranha. Entretanto ela toca o nó de todas as dificuldades que o ensino da geometria colide de maneira profunda e recorrente.

II DOIS MODOS OPOSTOS DO FUNCIONAMENTO COGNITIVO: A VISUALIZAÇÃO ICÔNICA E A VISUALIZAÇÃO NÃO ICÔNICA

Vamos primeiro relembrar a complexidade dos processos em jogo no ato de “ver”. Ver envolve sempre dois níveis de operações que são diferentes e independentes um do outro, mesmo que frequentemente se fundam na sinergia de um mesmo ato. Estes dois níveis de operações são **o reconhecimento discriminativo das formas** e **a identificação dos objetos correspondentes às formas reconhecidas.** O problema cognitivo importante é saber como ocorre a passagem de um reconhecimento discriminativo de formas à identificação dos objetos dados para ver.

Na percepção do mundo que nos envolve estes dois níveis de operações não parecem dissociáveis porque são simultâneos (pelo menos na escala de nossa consciência), o objeto sendo imediatamente dado com a forma que permite distingui-lo. Esta fusão entre reconhecimento de uma forma e identificação de um objeto, base de toda evidência perceptiva, é a condição para as respostas rápidas e adaptadas às situações novas e imprevistas. Por outro lado, não ocorre o mesmo para a percepção das representações construídas para produção de traços. Não existe nenhuma relação intrínseca entre as formas reconhecidas em um traço e o objeto que esse traço “quer” representar. Como é possível então efetuar a passagem de um ao outro?

A passagem repousa em uma “**semelhança”** entre a forma visualmente discriminada e a forma típica do objeto representado. É esta semelhança que é geralmente considerada como constitutiva da imagem. Assim, Peirce (1978) fez disso a característica de todas as representações icônicas por oposição aos símbolos e aos índices. Geralmente esta semelhança é suficiente para reconhecer diretamente e imediatamente, o objeto representado, como na percepção no mundo que nos envolve. Assim não há necessidade de saber ler para olhar as histórias em quadrinhos e seguir a história. Naturalmente, o mecanismo cognitivo da iconicidade nem sempre é suficiente. Às vezes é necessário recorrer a uma **enunciação** implícita ou explícita. Em outros termos, às vezes é preciso uma entrada verbal de informações, integrada à imagem como legenda ou como código de um elemento figurativo, para poder identificar o que as formas discriminadas representam.

Mas esse papel auxiliar de enunciação não deve nos fazer esquecer da importância do mecanismo da iconicidade. Ele continua a se impor de maneira autônoma sempre em qualquer coisa (desenho, figuras ou formas de peças a manipular) dada para ver.

Vejamos agora como a passagem ocorre para as diferentes maneiras de ver solicitadas na atividade de geometria. Para os dois primeiros, isso é feito pelo mecanismo icônico, como para qualquer representação visual fora da geometria. Os dois outros, ao contrário, requerem a neutralização desse mecanismo icônico. Mas não se deve acreditar que a passagem seria então assegurada por uma contribuição verbal de informações. A identificação visual dos objetos é feita a partir das impossibilidades e invariâncias que uma sequência de transformações visuais, realizadas com ou sem instrumentos, permite descobrir. Porque toda figura é geradora de uma outra, seja por extensão de seu procedimento de construção ou pela reorganização visual das formas imediatamente reconhecidas. Esse processo é intrinsecamente autônomo, mesmo se no contexto de um problema podemos finalizá-lo discursivamente e, então o restringir consideravelmente. É a apreensão operatória construída no processo que faz a fecundidade intuitiva das figuras.

Quadro 3: Dois mecanismos de identificação de objetos a partir de formas visuais

VISUALIZAÇÃO ICÔNICA **É SEMELHANTE AO** perfil de um objeto real, ou a um conjunto de deslocamentos em um território ou a um modelo típico (padrão). *A figura permanece um objeto independentemente das operações efetuadas sobre ela.*		**VISUALIZAÇÃO NÃO ICÔNICA** É uma **SEQUÊNCIA DE OPERAÇÕES** que permite reconhecer as propriedades geométricas, por impossibilidade de obter certas configurações, ou por invariância das configurações obtidas. *A figura é uma configuração contextualmente destacada de uma rede ou de uma organização mais complexa.*	
BOTÂNICO	AGRIMENSOR geômetra	CONSTRUTOR	INVENTOR faz-tudo

Fonte: O autor

1) Os Impasses Da Visualização Icônica Para A Aprendizagem Da Geometria

A visualização icônica repousa em uma semelhança entre a forma reconhecida em um traço e a forma característica do objeto a identificar. Naturalmente a situação não é a mesma conforme o referente é um objeto material no espaço que nos cerca[2] ou uma representação de sua forma típica. No caso da representação, a visualização icônica supõe o conhecimento de uma forma típica para cada objeto geométrico a identificar. A

[2] Quando o referente é um espaço físico que nos cerca ou um objeto material, o estabelecimento das correspondências entre as formas reconhecidas em um traço e referencial real implica a mobilização do corpo que olha (a posição, sua orientação, os movimentos ou os gestos para manipular). As cartas, os mapas das cidades, os diagramas acompanhados de instruções de montagem é um excelente exemplo (DUVAL, 2000).

comparação entre as formas a reconhecer e as formas típicas tolera distanciamentos mais ou menos grandes. Há por exemplo uma forma típica do retângulo que exclui uma grande desproporção entre comprimento e largura. De modo análogo, a forma típica de um triângulo requer que as alturas estejam situadas no seu interior. Cada forma típica é associada a um nome que permite evocá-la e que lhe confere assim um estatuto de objeto. Os impasses da visualização icônica para a aprendizagem da geometria são bem conhecidos:

– O reconhecimento estando centrado no contorno de uma zona ou de uma superfície, **uma forma é de início um perfil.** Significa dizer que todas as propriedades que não estão diretamente relacionadas ao contorno característico de uma forma (aquelas relacionadas às diagonais dos quadriláteros notáveis) permanecem fora do campo e, portanto, menos facilmente mobilizáveis quando os enunciados de problemas não as mencionam explicitamente. Isso também significa dizer que existe uma resistência em sair do contorno fechado da figura, prolongando por exemplo os lados para fazer aparecer as retas subjacentes.

– As formas aparecem como sendo **estáveis.** Elas não são, portanto, vistas de uma maneira que permite transformá-las em outras formas semelhantes ou, principalmente, diferentes. Por exemplo, é difícil de perceber uma superposição de paralelogramos em uma rede de retas onde vemos imediatamente se destacar uma justaposição de triângulos. E poderá ser ainda mais difícil que o reconhecimento das formas seja acompanhado da enunciação implícita ou explícita, do nome daquilo que a identifica.

– A dissociação entre as operações constituindo o ato de ver é tão necessário que pode haver *conflito entre o reconhecimento das formas por simples semelhança à um exemplo típico e a identificação do objeto ao qual corresponde a forma reconhecida.* Porque as relações constitutivas dos objetos não são propriedades cuja presença pode ser decidida de um simples olhar. A visão permite, para as relações entre duas unidades figurais, apenas uma estimação perceptiva sujeita à ilusão e com limiares de discernimento estreitos.

Estas tendências pesadas da visualização icônica vão contra o desenvolvimento do que deve se tornar o gesto reflexo para poder fazer na geometria: **decompor toda forma,** que reconhecemos de imediato em um conjunto de traços ou em qualquer figura de partida, **em uma configuração de outras unidades figurais** do mesmo número de dimensões ou de um número inferior de dimensões.

2) A Visualização Não Icônica Ou A Desconstrução De Formas

A decomposição das formas discriminadas, a começar por aquelas que parecem ser visualmente simples, em unidades figurais é o pré-requisito para a entrada no funcionamento próprio da visualização não icônica. Ora, o ponto essencial é que existe ao menos duas maneiras radicalmente diferentes de decompor uma figura de partida em unidades figurais. Para distingui-las, é suficiente tomar como critério a prática, especificamente matemática, na maneira de utilizar uma figura de partida (uma figura dada com um enunciado de um problema ou construtível a partir desse enunciado): a introdução de traços suplementares. Ela é encontrada nos dois modos de visualização não icônico que nós distinguimos, mas ela aí intervém de maneira radicalmente diferente. Em um caso ela é imposta e produzida pelos instrumentos utilizados para construir uma figura. No outro, ao contrário, ela deve ser "imaginada" por aquele que olha porque a escolha do traço suplementar permite ver um procedimento de resolução do problema proposto. Ou ela remete a dois tipos de funcionamentos cognitivos que não possuem nada em comum

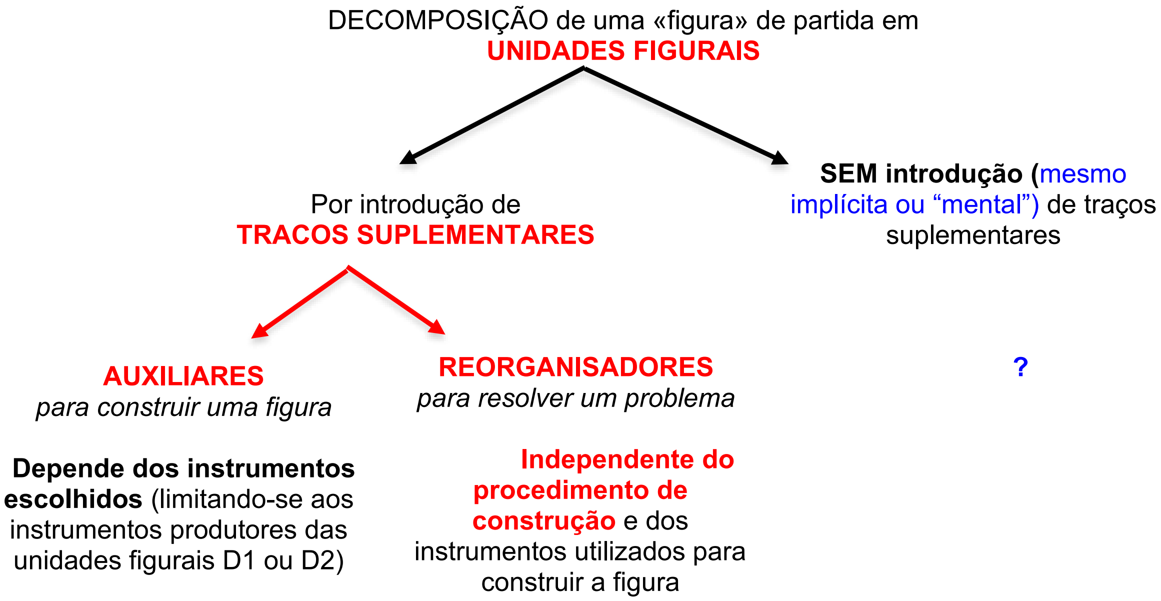


Figura 1: Dois ou três modos de visualização não icônica?
Fonte: O autor

A característica das figuras geométricas, por comparação a todos os outros tipos de figuras é que elas podem ser construídas com a ajuda de instrumentos e principalmente de instrumentos produtores de traços 1D/2D[3]. A produção de cada traço corresponde tanto a

[3] A "denominação" corresponde ao espaço em que as representações são produzidas: - os objetos físicos que se pode manipular fisicamente (nD/3D): modelos de poliedros (3D/3D), folha de papel que pode ser

uma instrução formulável (as “figuras telefonadas) ou formulada (no menu de um software) e à mobilização de uma propriedade geométrica em relação ao instrumento utilizado (compasso, régua não graduada, régua graduada, ...). Dizendo de outra forma, a atividade de construção de figuras, quase sempre a configuração de formas 2D/2D ou 3D/2D, repousa na sua desconstrução em traços 1D/2D e 0D/2D. *Mas nesta atividade de desconstrução toda atenção é centrada na reconstrução, porque a desconstrução das formas 2D/2D é automaticamente feita por instrumento enquanto que a reconstrução exige que se foque sobre a ordem nas instruções a dar* para as operações de traçagem a fazer. Ora, esta atividade conduz à produção de traços que não pertencem à figura construída, seja porque são traços intermediários, seja porque se trata de traços que vão ultrapassar o contorno das formas a traçar: por exemplo, as retas que são os suportes dos lados do quadrado ou do triângulo a construir. *Nós chamaremos os traços intermediários ou estes traços suportes de “traços auxiliares”.* Aliás, em um ambiente papel e lápis, podemos frequentemente observar o hábito desastroso de apagar, uma vez que a figura a construir é obtida.

A situação é totalmente outra quando se parte de uma figura para resolver um problema. O problema de repartir um triângulo com um único corte de tesoura e juntar os dois pedaços para formar um paralelogramo é um exemplo típico. Deve-se transformar um triângulo em um paralelogramo por meio de um traço suplementar. Trata-se portanto da desconstrução de uma forma visual de base para obter uma outra forma visual de base. E a escolha desse traço suplementar vai depender da maneira como as duas partes do triângulo, obtidas por esse traço, vão permitir reagrupá-las sob a forma de um paralelogramo. Essa é evidentemente uma desconstrução que não está relacionada com a desconstrução envolvida na construção das figuras. Porque a escolha desse traço é independente da maneira como o triângulo pode ser construído e não há nada em comum entre esse traço suplementar a encontrar e os traços auxiliares. Nós chamaremos “traços reorganizadores” todos os traços que permitem reorganizar uma figura dada visando fazer ali aparecer as formas não reconhecíveis nesta figura dada. A utilização heurística de uma figura depende evidentemente da capacidade de “ver” os traços reorganizadores possíveis.

---

dobrada ou cortada (2D/3D), cordas que podem tender (1D/3D) como em um geoplano. Vou chamar estes objetos “objetos modelos” para os distinguir dos instrumentos produtores de um traço ou de um caminho; - que uma superfície de projeção (nD/2D) para representar que será produzido por um traço ou por impressões: área, papel, tela eletrônica. Isso permite, portanto, distinguir a atividade geométrica **realizada materialmente** e as atividades que são **realizadas representativamente.** Muitas vezes os objetos modelos são utilizados para uma interpretação icônica das representações gráficas. Isso aparece também nas definições: a reta como uma corda tensa... ela esteriliza a abertura da representação.

Deve-se enfatizar aqui um ponto fundamental para compreender a importância e a especificidade do ato de ver na aprendizagem da geometria: **a visualização não icônica é totalmente independente de toda enunciação explícita ou implícita.** Em outros termos, ela não é em nada subordinada a um conhecimento das propriedades geométricas. Isso parece trivial para as atividades do tipo construção de figuras na medida em que são os instrumentos utilizados que comandam, dirigem ou controlam a decomposição visual das formas. Por outro lado, isto é menos para a utilização heurística das figuras. Aliás, o mais frequente, um papel orientador é concedido ao conhecimento das propriedades para explorar as figuras, como se ver não poderia permitir descobrir antes de saber. Por exemplo, deve-se realmente conhecer o teorema dos pontos médios para resolver o problema da reconfiguração de um triângulo em um paralelogramo ou, ao contrário, uma exploração das reconfigurações não seriam um caminho de resolução? E neste caso da aprendizagem específica para tornar os alunos capazes de “ver” o traço reorganizador não seria somente para esse problema, mas para muitos outros problemas matemáticos diferentes, eles não seriam necessários?

Nós retornaremos a esta questão que afeta o papel heurístico da visualização na resolução de problemas de geometria elementar. Mas nós já podemos fazer as seguintes observações: Se podemos sempre modificar os discursos sobre os objetos, não se pode modificar as formas que são prontamente reconhecidas em uma figura. Porque ao contrário de enunciação e, portanto, da produção de explicações ou de justificações, o reconhecimento visual das formas escapa a todo controle intencional. Existem leis de organização de dados visuais, colocadas em evidência pela *teoria da Gestalt*, que impõem o reconhecimento de certas formas **contra** o reconhecimento de outras formas, mesmo se essas são verbalmente evocadas. Esta resistência, às vezes conduziu certas pesquisas didáticas a lamentar que na resolução de problemas de geometria os alunos observados tenham parado por causa da “percepção” da figura! De fato, uma aprendizagem visando tornar os alunos capazes de “ver” o (ou os) traços reorganizadores a adicionar para encontrar a solução de um problema deve ser feita ao nível do reconhecimento das formas, e não o da identificação dos objetos representados que caso contrário permanecerá puramente verbal.

3. As Aquisições Relativas A Maneira De Ver Elas Ajudam A Entrar Em Outras Maneiras De Ver?

Esta questão de transferência do que foi adquirido em um tipo de atividade proposta em sala de aula a um outro tipo de atividade, é a questão crucial para o ensino da geometria dos anos iniciais e finais do ensino fundamental. Querer privilegiar uma entrada como sendo mais acessível que as outras retorna à supor a transferência mais ou menos espontânea, de uma maneira de ver às outras maneiras de ver.

Ora, passar da visualização icônica, que é comum a todos os domínios do conhecimento, à visualização não icônica, que é específica para a matemática, exige um retorno completo do funcionamento cognitivo do ato de “ver”. Isto equivale a substituir ao circuito espontâneo representado pelas flechas A1-A2 no esquema abaixo (Figura 2) seja o circuito C1-C2 correspondente à exploração reorganizadora das figuras seja o circuito inverso representado pelas flechas B1-B2-B3, considerado como o procedimento “conceitual”.

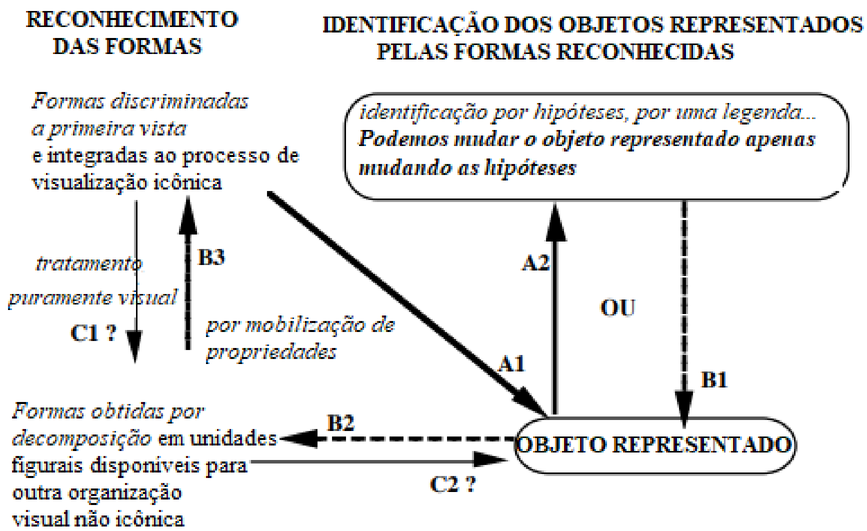


Figura 2: Dois modos do funcionamento cognitivo para identificar os objetos representados
Fonte: O autor

Podemos ensinar a geometria como se a grande maioria dos alunos, nos anos iniciais e finais do ensino fundamental, fosse descobrir e efetuar, eles mesmos, uma tal reversão, não somente para passar de uma visualização icônica à uma visualização não icônica, mas, no interior da visualização não icônica, para passar de uma desconstrução instrumental das formas à uma desconstrução heurística? Assim, podemos considerar que as atividades de construção, que impõem instrumentalmente uma desconstrução das formas visualmente reconhecidas, sejam suficientes para uma transferência para competências heurísticas? Pareceria haver ali uma opinião largamente partilhada, pelo menos se consideramos a importância dada, após uns trinta anos, a tudo que concerne às atividades de construção, mesmo se isso não parece ajudar a maior parte dos alunos a ultrapassar a evidência perceptiva imediata e a desenvolver estratégias de exploração visual das figuras para resolver problemas de geometria.

De fato, para compreender a complexidade cognitiva da passagem da visualização icônica para a visualização não icônica, deve-se esquecer a gama muito rica de todas as atividades propostas aos alunos para estabelecer uma ponte entre o que seria prático e o que seria teórico, ou entre o que seria concreto e o que seria formal, ou entre o que seria espacial e o que seria propriamente geométrico, ou novamente entre o que seria material e o que seria "mental". É preciso colocar a questão que está na frente de todas estas oposições demasiadamente globalizantes: qual é a maneira matemática de ver que requer todo procedimento discursivo em geometria (enunciação de propriedades, definições, teoremas, dedução de outras propriedades etc.)? É uma das quatro maneiras de ver, ou somente um dos dois modos de visualização não icônica ou devemos procurar um outro? Nós reencontramos aqui a questão que havíamos deixado em suspense (*supra* Figura 1): existem duas ou três maneiras não icônicas de decompor as formas? E, se houver uma terceira, qual tipo de atividade pode aí fazer entrar os alunos?

III A MANEIRA DE VER NECESSÁRIA EM GEOMETRIA: A DESCONSTRUÇÃO DIMENSIONAL DAS FORMAS

A maneira matemática de ver figuras consiste em decompô-las não importa qual a forma discriminada, quer dizer reconhecida como uma forma nD/2D, **em unidades figurais de um número de dimensões inferior à esta forma.** Assim a figura de um cubo ou de uma pirâmide (**3D**/2D) é decomposta em uma configuração de quadrados, de triângulos etc. (unidades figurais **2D**/2D). E os polígonos são por sua vez decompostos em segmentos de retas (unidades figurais **1D**/2D). E as retas, ou os segmentos, podem ser decompostos em "pontos" (unidades **0D**/2D) (Figura 18). **Nota-se que com os pontos nós sairemos de toda visualização.** Com efeito, os pontos só são visíveis quando aparecem como intersecção de unidades 1D/2D (traços secantes ou traços formando um canto ("picos", "ângulos", ...)). Em outras palavras, a marcação de um ponto sobre um traço ou fora de um traço (por exemplo, para fixar as extremidades de um segmento ou o seu meio) necessita de uma codificação simbólica. É, aliás, esse código simbólico que associamos geralmente letras!

Para bem colocar em evidência a característica irredutível desta maneira de ver e aquelas que nós analisamos há pouco, e para mostrar que ela constitui o primeiro limiar decisivo para a aprendizagem da geometria, aqui é suficiente comparar a decomposição heurística das formas.

1. A Decomposição Heurística Por Divisão Mereológica Das Formas Reconhecidas

A utilização heurística de uma figura exige frequentemente que a olhemos como se fossem peças de um quebra-cabeça. Mas isso supõe que a **decompomos em unidades figurais com o mesmo número de dimensões que a figura de partida.** Assim, um triângulo (2D/2D) pode ser decomposto em outros triângulos (2D/2D). Mas também, um cubo material (3D/3D) ou qualquer outro sólido pode ser repartido em blocos que serão poliedros (3D/3D). *Esta divisão, que nós chamaremos uma divisão mereológica (divisão de um todo em partes justapostas ou superpostas), é feita sempre para reconstruir, com as partes assim obtidas, uma figura de modo geral muito diferente visualmente*. Esta decomposição faz parte de um processo mais geral de **metamorfose** (para não dizer anamorfose, que é uma transformação por um processo de deformação contínua). A decomposição mereológica das figuras é um dos procedimentos mais antigos da história da geometria (EDWARDS, 1979). Aliás, as primeiras "demonstrações" da relação de Pitágoras basearam-se em operações de decomposições considerando uma reconfiguração mereológica (PADILHA, 1992). Esta decomposição pode ser:

– estritamente *homogênea*: a decomposição é feita em unidades da mesma forma que a figura de partida. Os quadriláteros constituem as figuras de fundo (os "suportes" de representação!) que somente guiam as primeiras operações de decomposição mereológica.

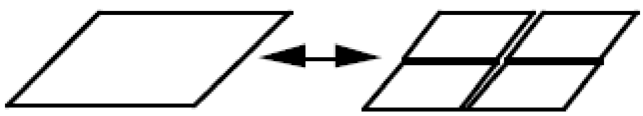


Figura 3
Fonte: O autor

–*homogênea*: a decomposição é feita em unidades figurais diferentes da forma da figura de partida, mas todas da mesma forma:

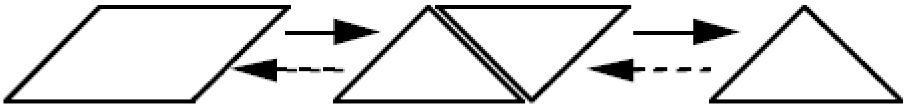


Figura 4
Fonte: O autor

–*heterogênea*: a decomposição é feita em unidades figurais de formas diferentes entre elas. O problema da divisão de um paralelogramo em duas partes para formar um retângulo implica uma decomposição heterogênea deste tipo:

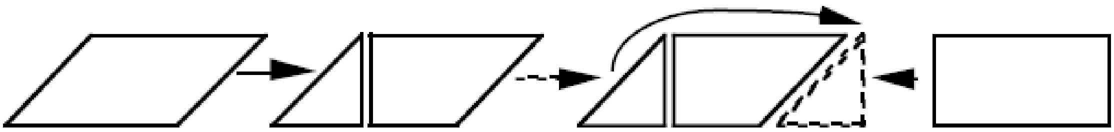


Figura 5
Fonte: O autor

As *decomposições homogêneas* são *transformações* que são *visualmente reversíveis* e que podem ser iniciadas espontaneamente somente de uma vista da figura. Por outro lado, *as decomposições heterogêneas não são visualmente reversíveis*.

Para uma figura de partida determinada por um enunciado de um problema, há evidentemente várias decomposições mereológicas possíveis, mas todas não conduzem à solução do problema. Isso acontece mesmo que às vezes aqueles que conduzem não são diretamente visíveis na figura. Em outras palavras, tem situações em que a figura ajuda a ver e outras onde ela impede de ver. Você pode determinar os fatores que favorecem ou inibem os processos de divisão mereológica e de reorganização das formas reconhecidas (DUVAL, 1995b). E esses fatores podem ser variáveis didáticas para atividades que visam fazer os alunos entrarem na utilização heurística das figuras.

A decomposição mereológica apresenta uma dupla particularidade:

–Ela pode ser operada **materialmente** (por corte e remontagem das peças obtidas como por um quebra-cabeça), **graficamente** (por adição do que nós chamamos mais acima de traços reorganizadores) ou mesmo **simplesmente do olhar** (e não “mentalmente”). Estas três modalidades são quase equivalentes, com um detalhe próximo: quando uma parte deve intervir simultaneamente em duas sub-reconfigurações diferentes, deve-se dispor materialmente de duas peças para esta mesma parte.

–A decomposição por divisão mereológica é feita, com muita frequência, sem fazer a ligação direta com o discurso matemático, e é por isso que ela permite a exploração puramente visual de uma figura de partida para descobrir as propriedades geométricas a utilizar para resolver um problema dado.

2 A Decomposição Por Desconstrução Dimensional Das Formas

A desconstrução dimensional das formas apresenta duas características que não opõem somente a decomposição mereológica, mas também a desconstrução instrumental.

–Ela é feita necessariamente em articulação com uma atividade discursiva. Podemos mesmo dizer que é essencialmente uma ordem discursiva. Para a representar graficamente, deve-se de qualquer modo, transformar as figuras geométricas em diagramas. Assim, apenas a enunciação das propriedades características de um paralelogramo, por exemplo, implica em descontruir dimensionalmente uma figura simples 2D/2D em uma configuração de unidades figurais 1D ou 0D/2D. *Porque as propriedades de um objeto 2D/2D (por exemplo um paralelogramo representado logo abaixo) são as relações entre os objetos representados pelas unidades figurais 1D/2D* (as configurações B e C abaixo) ou 0D/2D.

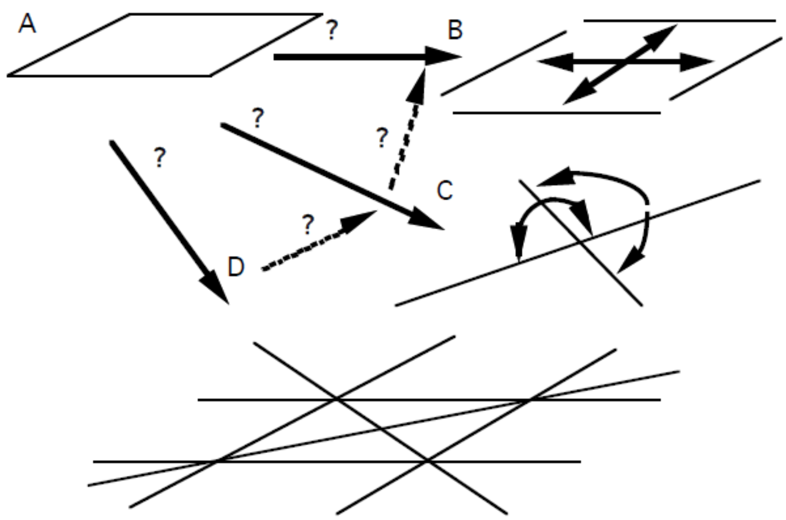


Figura 6: Decomposição em unidades figurais por desconstrução dimensional de uma forma
Fonte: O autor

Esta desconstrução dimensional representa uma revolução cognitiva para o funcionamento espontâneo da visualização icônica ou não icônica. A desconstrução dimensional das formas é um procedimento que vai contra todos os processos de organização e de reconhecimento perceptivo das formas. O que não é o caso da decomposição do tipo quebra-cabeça: porque isso, ao contrário, mobiliza o processo de procurar e a exceder os limites ou as restrições imediatas. E a primeira lei de organização e de reconhecimento perceptivo das formas é a *prioridade imediata e estável das unidades figurais 2D sobre as unidades figurais 1D.* Que quer dizer não somente que se vê numa primeira abordagem um paralelogramo antes de ver quatro lados, mais que quer dizer especialmente que todos os traços que nós percebemos de imediato como formato do contorno da superfície permanece, de uma certa maneira, não destacável deste reconhecimento visual primário. **Os lados de um polígono permanecem as bordas não separáveis da superfície que a delimitam.** E isso torna inconcebível e invisível o processo de desconstrução dimensional das formas. Mesmo nas atividades de construção de figuras, ou ela se impõe *de fato* pelos instrumentos, permanecendo praticamente sem efeito sobre o funcionamento cognitivo que impõe a primazia visual das formas 2D em suas formas 1D ou em unidades 0D. Porque nas atividades de construção de figuras, o foco é justamente a reconstrução de unidades figurais 2D a partir de unidades figurais 1D automaticamente produzidos por instrumentos. É porque a desconstrução dimensional, quer dizer, a passagem da superfície às linhas (as linhas não sendo mais visualmente as bordas), representa uma revolução cognitiva comparado a outros tipos de visualização. É mais difícil ainda aceitar que a passagem dos sólidos às figuras planas que podem ser obtidas com um plano de intersecção.

Então a decomposição mereológica pode ser efetuada ou simulada materialmente com objetos físicos que os separamos e que os reunimos de uma outra maneira, a desconstrução dimensional não pode mais ser materializada. Ela não pode nem mesmo ser mostrada graficamente, ao menos introduzir um par de figuras religadas entre elas *conforme a estrutura proporcional* de uma equivalência ou de uma implicação. Na figura 7 abaixo o esquema funde três proposições que correspondem respectivamente as ligações, $A \to B, A \to C, A \to D$, que não é a maneira habitual de visualizar praticada no ensino e nos manuais, estas aqui permanecendo na maior parte do tempo a maneira de ver do botanista!

Podemos então ver tanto a semelhança e principalmente a oposição entre divisão mereológica das formas 3D ou 2D e a decomposição dimensional das formas nD em formas (n-1)D. Quando a divisão mereológica é feita em vista de uma reconfiguração fazendo aparecer novas formas que estavam não reconhecíveis, na figura de partida, **a desconstrução dimensional é feita por UMA (RE)CONSTRUÇÃO DEDUTIVA DOS OBJETOS REPRESENTANTES.** Em outras palavras, a divisão mereológica permanece puramente visual, enquanto a desconstrução dimensional é inteiramente subordinada a um discurso axiomático ou axiomatizável.

3. A Decomposição Por Desconstrução Dimensional Das Formas Percebidas Corresponde Ao Funcionamento Profundo Da Visualização Em Geometria.

Quando dizemos "funcionamento profundo", nós significamos para esta qualificação que as outras maneiras de ver são maneiras de ver que permanecem na superfície. E isso conduz a modificar a noção de "figura", que entendemos esta palavra em seu sentido clássica ou que entendemos conforme a oposição entre desenho e figura, oposição que é feita disso é aquela entre a característica particular de toda visualização realizada e a característica geral das propriedades do objeto representado. Para que uma figura dê lugar a uma visualização geométrica ela deve emergir do que nós chamamos em outro lugar de um "circuito de visualização" organizado em torno de uma trama de traços 1D/2D, a partir de **uma rede de retas** podemos fazer aparecer uma grande diversidade de formas 2D/2D. A resolução do problema abaixo (Figura 7) da reprodução de uma figura com uma régua não graduada permite colocar bem em evidência desse processo.

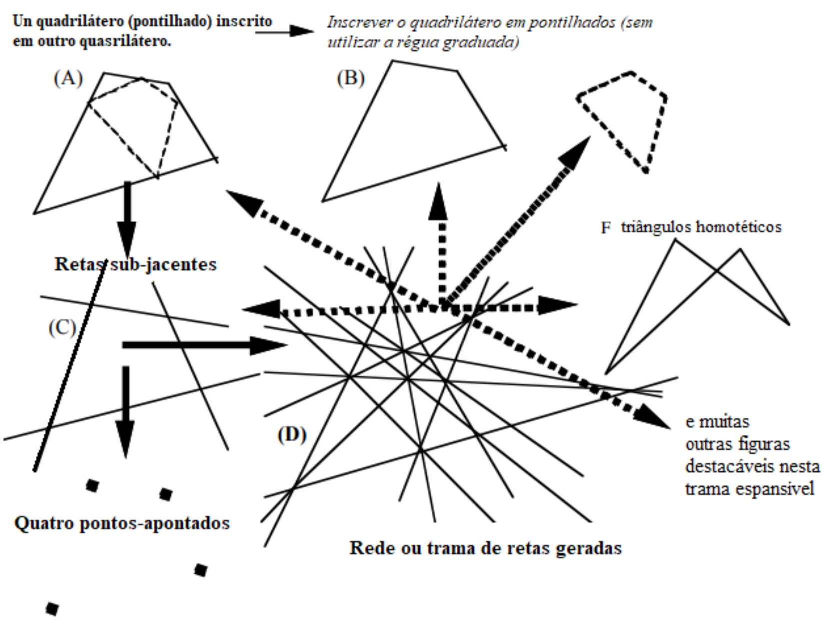


Figura 7: Circuito de visualização organizado a partir de uma trama de retas (D)
Fonte: O autor

Para reproduzir no quadrilátero (B) o quadrilátero pontilhado que está inscrito no quadrilátero A, deve-se começar traçando as retas suportes do quadrilátero (B). Obtemos assim uma primeira rede de retas que pode ser obtida pelo prolongamento para fazer aparecer novos pontos de intersecção e construir assim novas retas passando por esses pontos de intersecção. Na rede de retas (D) assim gerada, podemos ver em destaque uma grande variedade de polígonos em correspondência a configuração inicial (A). Esta trama subjacente, que permita passar de uma figura à outra, e portanto, reproduzir a figura solicitada. Naturalmente, para pensar nesta solução, deve-se ser capaz de reconhecer na rede uma grande variedade de polígonos.

Na visualização icônica toda figura tende a ser uma representação estável ou não modificável porque é imagem ou representação de um objeto. Com a desconstrução dimensional a figura é apenas uma configuração particular e transitória no contexto destacado de uma rede ou de uma organização mais complexa, o desligamento de uma figura particular sendo comandada pelo enunciado do problema. Em outras palavras toda figura, na geometria plana, é uma configuração transformável em outras, *cada uma se destacando numa mesma trama, a critério das propriedades ou dos objetos que nomeamos.*

Dois pontos são essenciais para compreender bem o funcionamento em profundidade da desconstrução dimensional das formas:

–(1) O campo real do trabalho sobre as figuras é constituído pela trama de unidades figurais 1D/2D, e não mais pelas unidades figurais 2D/2D que são somente introduzidas como figuras de base. A partir da rede de retas onde se pode fazer aparecer uma grande diversidade de formas 2D/2D. Mas esta requer assim o reconhecimento das formas não visíveis imediatamente, do tipo que é requerido na decomposição mereológica.

– (2) Esta desconstrução dimensional das formas é o pré-requisito para uma compreensão efetiva de toda enunciação de propriedades geométricas e, portanto, para sua mobilização efetiva pelos alunos na resolução de problemas.

Para ilustrar esses dois pontos, retornamos ao problema de reformatar um triângulo em um paralelogramo. A justificação da solução, mas não a sua descoberta que pode ser obtida ao termo de *n* ensaios de várias reconfigurações, feita usando o teorema do ponto médio e de propriedades do paralelogramo. **Mas, ao contrário, é suficiente conhecer esse teorema para encontrar a solução?** Em outros termos, existe uma estratégia visual para passar da figura de um triângulo à reconfiguração IV (Figura 8 abaixo)? É necessário ver o triângulo integrado na rede de retas que dão suporte aos lados, ou ter o reflexo de gerar esta rede de retas (III) subjacentes à esta figura. Esta rede contém, entre as figuras possíveis, o triângulo a compartilhar e o paralelogramo obtido por reconfiguração. Além disso, porque ele contém a figura de partida e a figura alvo (o paralelogramo) está numa rede que se articula de maneira pertinente e congruente com a justificação matemática.

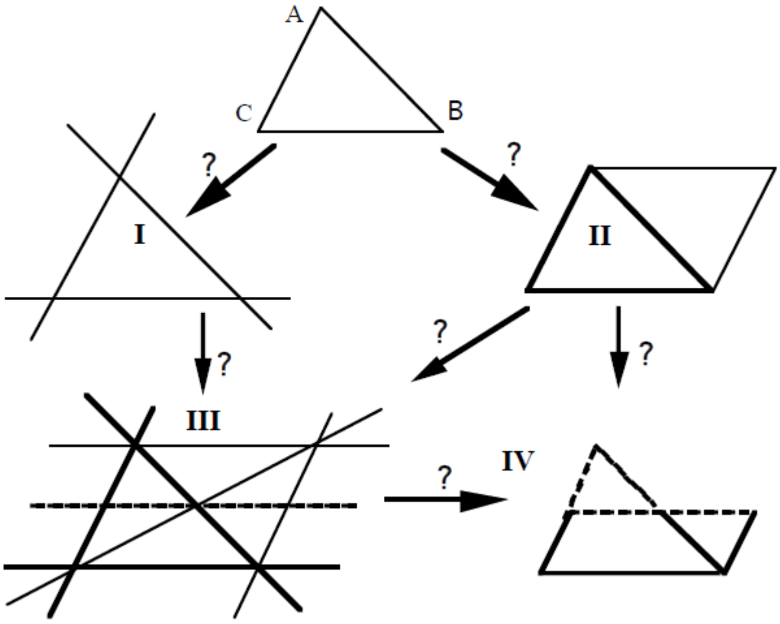


Figura 8: Desconstrução dimensional do triângulo de partida
Fonte: O autor

Uma rede de retas suportes, construída a partir de uma figura de partida, contendo potencialmente uma grande variedade de figuras 2D que podem fazer aparecer a critério de questões que estabelecemos. E uma tal rede permite, portanto, *ver a passagem matemática de umas às outras*, quer dizer, as propriedades que as tornam possíveis. Assim, no exemplo que nós acabamos de examinar, a única figura que permite de ver é a III, todas as outras são apenas sub-figuras visualmente destacadas da configuração III como no exemplo dado anteriormente (Figura 7).

De um ponto de vista cognitivo isto significa dizer que dois tipos de capacidades devem ser desenvolvidos paralelamente nos alunos para fazê-los entrar na maneira matemática de ver as figuras:

– de uma parte a desconstrução dimensional das formas 2D perceptivelmente geradas, incluindo nela as figuras consideradas como sendo as figuras de base, pela construção da rede de retas cujas formas 2D são apenas subfiguras. A aquisição de uma tal capacidade é longa e demanda a organização de sequências de atividades específicas (GODIN, 2004).

–de outra parte o reconhecimento de todas as figuras 2D que potencialmente podem ser reconhecidas em uma rede de retas onde elas não são imediatamente visíveis.

IV. COMO, E ATÉ ONDE, "VER" E DIZER PODEM SE JUNTAR NA GEOMETRIA?

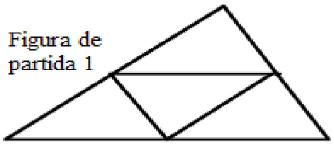
O que chamamos de "figura" na geometria é um todo em que as hipóteses dadas das propriedades são combinadas com uma representação visual. Concretamente, isto se traduz pelo fato de que a codificação (das letras codificando os pontos de intersecção ou de outros pontos, das marcas codificando as propriedades dadas nas hipóteses) faz parte da figura. Ou uma análise em termos de registros de representação conduz a ver ali apenas uma associação de superfície! Na realidade, as figuras geométricas dependem de dois registros de representação que são cognitivamente heterogêneos, porque eles guardam suas próprias possibilidades de tratamento, o que quer dizer que eles funcionam em paralelo e de maneira independente. Para perceber isso é suficiente lembrar a dupla variação seguinte:

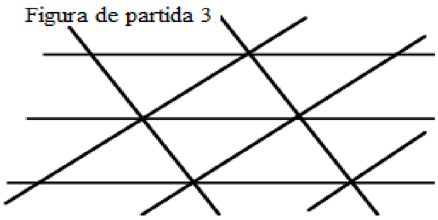
– para uma mesma representação visual, podemos ter vários enunciados diferentes e, portanto, "figuras geométricas" que são diferentes do ponto de vista matemático.

– para um mesmo enunciado, podemos ter diferentes representações visuais possíveis, quer dizer, "imagens" diferentes para delas sustentar um ponto de vista psicodidático do senso comum e ingênuo.

Os problemas específicos da aprendizagem da geometria não têm somente a complexidade da visualização não icônica e à desconstrução dimensional das formas que estão por trás, elas também incluem a maneira como o discurso matemático pode se articular com esta visualização. Porque a atividade geométrica pressupõe sempre a sinergia entre o funcionamento próprio a estes dois registros de representação. Esta articulação é cognitivamente mais complexa que a articulação espontânea entre linguagem e imagem, mesmo se levarmos em conta a diversidade das maneiras de ver que analisamos (Quadro 1).

Para iniciar essa análise nós partiremos de um estudo que pode parecer muito antigo, mas que ainda hoje a rara vantagem de colocar em obra tanto variações de enunciados quanto variações de figuras no estudo de problemas dados aos alunos (DUPUIS, PLUVINAGE, 1978). Na apresentação abaixo, nós evidentemente separamos a figura e sua dupla codificação: a codificação por letras que possui a função de designar na figura os objetos nomeados em enunciados, e o código pelo logotipo e os números que possuem a função de ver/reportar na figura as hipóteses dadas no enunciado.

<table>
<tr>
<td>Registro da visualização:
Um conjunto de reorganizações Visuais de acordo com a forma ou de acordo com o número de dimensões



</td>
<td>ARTICULAÇÃO

Quais elementos os enunciados permitem

uma ancoragem na visualização?

Qual função preenche a figura em

relação ao enunciado e à resolução do problema:
_ilustração?
_heurístico?
_objeto de apoio para as medidas?</td>
<td>Registro do discurso:
cenário do trabalho, em toda formulação, de três tipos de operações discursivas

Enunciado 1. A'C' e AC são paralelos
A'B' e AB são paralelos
B'C' e BC são paralelos

Provar que A é ponto médio de B'C'

Enunciado2
ABED e BCED são dois paralelogramos.
Provar que B é ponto médio de AC

Enunciado 3

....

Enunciar as propriedades a colocar no trabalho...(por exemplo, o teorema do meio)</td>
</tr>
<tr>
<td>QUE VEMOS?
H1 Quais são as possibilidades de transformar a figura tomando como figura de partida as que são visualmente acessíveis?

H2 Quais são as organizações que podem fazer ver o que é procurado?</td>
<td>O duplo código é suficiente para que se tenha comunicação e sinergia de funcionamentos entre os dois registros?</td>
<td>O QUE DEVEMOS VER?
O que correspondem visualmente:
L1 os termos empregados nos enunciados (quando se coloca um problema, quando formulamos uma conjectura, quando damos as instruções...)?
L2 as proposições (definições, teoremas...)?
L3 os raciocínios para justificar, ou provar (dedução ou refutação)?</td>
</tr>
</table>

Figura 9: As duas questões do problema cognitivo de articulação entre visualização e discurso
Fonte: O autor

Nesse exemplo, os dois enunciados do problema são como duas descrições análogas que podem ser feitas de uma das três figuras de partida, porque elas dão as mesmas hipóteses. Portanto, elas não são concordantes da mesma maneira em cada uma dessas três figuras. Os resultados mostram que, de uma página à seguinte os alunos podem não reconhecer o mesmo problema apresentado de segundo duas combinações diferentes, como se, por exemplo, não houvesse absolutamente nada em comum entre a figura de partida 1 e a figura de partida 2 (DUPUIS, PLUVINAGE, 1978, p. 75-79). No entanto, o interesse deste trabalho não está aí. Independentemente da "competência" requisitada para reorganizar visualmente uma figura de partida, mesmo a variação dos dois enunciados permite levantar uma questão muito mais ampla: quais são elementos discursivos que, em um enunciado, permitem passar da formulação das hipóteses à figura e que, portanto, permitem articular os passos discursivos, do pensamento à *mobilização de reorganização visual do que se vê?* Naturalmente, desde que seja questão de linguagem (e pode haver hipóteses sem uma linguagem?), é absolutamente necessário levar em conta pelo menos três níveis de operações discursivas (DUVAL, 1995 a): nomear o que falamos, enunciar alguma coisa, colocar em relação o que dissemos com o que acabou de ser enunciado para completar, explicar, justificar o proposto. Esses três níveis de operações discursivas são subjacentes à produção, oral ou escrita, de toda formulação.

1. **Que Palavras Precisa Dizer Para Poder Discernir Visualmente Sobre Uma Figura?**

A geometria requer a utilização de um vocabulário técnico relativamente pesado. Pode-se notar muito rapidamente no currículo a introdução de no mínimo uns quarenta de termos, e se fizermos a soma do que é introduzido até a quarta série (equivalente ao oitavo ano do nosso ensino fundamental), nós passaríamos muito largamente a centena de termos! No entanto, o mais importante não é isso, está na heterogeneidade semântica desta terminologia. **Toda formulação em geometria recorre a um vocabulário que cobre ao menos quatro tipos de termos denominativos[4].** Para fazê-los aparecer, basta examinar a maneira onde o sentido desses termos pode ser colocado em correspondência com as unidades figurais no registro da visualização. Tal empreendimento não tem nada de arbitrário: ela está no coração das exigências que contribuíram com o desenvolvimento da geometria na história. As 23 definições que abrem os *Elementos*, e que precedem os “pedidos” e as “noções comuns”, constituem o inventário do *corpus* semântico necessário a todo o trabalho de Euclides (EUCLIDE, 1990). Nesse sentido, as definições são todas o máximo tanto das definições semânticas quanto das definições matemáticas. Sua função é de fundar a articulação do discurso matemático com a organização da percepção visual das formas.

[4] Esta classificação pode ser refinada distinguindo em termos de relação entre objetos. Por exemplo, “tangente” é um termo de relação entre um objeto D2 e um objeto D1 ou um objeto D2. “Secante” seria também dessa categoria. Esses termos estão associados às configurações particulares. A relação designada é então visualmente perceptível, mas somente no campo restrito da folha ou da tela. Além daí, no campo perceptivo, isso torna-se indiscernível. Os trilhos da ferrovia não parecem paralelos! A expressão “ponto no infinito” se refere a um tal salto. A contribuição essencial de uma tal classificação é colocar em evidência as maneiras diferentes cujos termos geométricos podem ser colocados em correspondência com as unidades figurais e permitir assim uma ancoragem visual para a descrição verbal de uma situação.

1.Termos analítico-descritivos dando um status de "elemento" a um traço na organização visual de diversos termos. **Diretamente associados a UM TRAÇO VISUAL**	2.Termos denominativos de objetos estudados: **Associados a uma ORGANIZAÇÃO VISUAL de vários traços em UMA FORMA TÍPICA**	3.Termos de propriedade característica permitindo classificar objetos de estudos **Associado com a COMPARAÇÃO DE TRAÇOS COMO ELEMENTOS DA ORGANIZAÇÃO VISUAL de uma forma típica**	4. Termos das relações entre traços (elementos) fora de toda pertinência a uma organização visual **NÃO RECONHECÍVEIS VISUALMENTE**
Elementos D1: lado, diagonal, corda, raio,... **Elementos D2:** vértice, ponto de intersecção, ângulo **Elementos D3:** face, plano de intersecção (?)	**Objetos D1:** *reta, segmento, curva* **Objetos D2:** *triângulo, quadrado, paralelogramo, polígono, círculo, ...* **Objetos D3:** *pirâmide, tetraedro, cubo, prisma, poliedro, esfera, ...*	**Relacionado a um tipo de objetos:** –*Meio, centro* –*Isósceles, equilátero, retângulo, qualquer* –*Regular, convexo*	*Paralelo, Perpendicular, Simétrico, Igual*
(EUCLIDES, Livro I) Definições: 1, 2, 3, 5, 6, 8, 13, 14, 17	Definições: 4, 7, 9, 15, 16, 18, 19, 22	Definições: 11, 12, 20, 21	Definições: 10, 23

Figura 10: Classificação dos termos geométricos em função do seu valor descritivo de um dado visual
Fonte: O autor

Nos exemplos, nós levamos em conta o vocabulário concernente **às formas em função da variação dimensional,** e não concernente **às grandezas** (comprimento, área, perímetro, ...). Porque as grandezas escapam em grande parte da visualização, porque elas impõem limiares estreitos de estimativa e que elas só podem ser apreendidas por operações de medidas e de números. Recordamos aliás, que Poincaré as separava na sua descrição de intuição geométrica.

A importância, na análise do vocabulário utilizado na geometria, não é a quantidade dos termos técnicos, mas a extensão do espectro semântico que ela recobre. De fato, para descrever o que deve ser visto, a matemática recorre a duas categorias de termos que não são encontrados no vocabulário comum empregado fora da matemática para descrever o que se vê: os termos analítico-descritivos e os termos de relações entre traços considerados independentes de sua pertinência à organização visual da forma de um objeto (colunas 1 e 4). E este fato deve ser colocado mais perto da característica da visualização geométrica, a desconstrução dimensional das formas. Podemos aliás, notar que 6 das 23 definições de Euclides são unicamente explicações da desconstrução dimensional das formas (definições 1, 2, 3, 5, 13, 14). A desconstrução dimensional das formas deve ser a etapa intermediária necessária entre o reconhecimento perceptivo imediato das formas e a identificação dos objetos matemáticos correspondentes, como mostra o simples exame das definições que podem ser dadas nos objetos de estudo (coluna 2) ou das propriedades características (coluna 3). Em outras palavras, a aplicação de um termo de denominação do objeto (coluna 2) de uma figura, ou de uma subfigura, implica levar em conta os termos analítico-descritivo e os termos de relações entre elementos.

Mas o problema para a aprendizagem é que estas categorias de termos específicos para a matemática entram em concorrência com um vocabulário não matemático que, não implica nenhuma desconstrução dimensional das formas: traço, linha, vertical, horizontal, cruzamento, ... Este vocabulário corrente, essencialmente ligado a uma prática gráfica e a uma prática de deslocamento sobre espaços de jogo (tabuleiro de xadrez) ou em planos desenhados, tem um valor descritivo mais imediato na medida em que correspondem ao que é produzido por uma ação de traçagem (traço, linha....), seja para as referências físicas do sujeito (horizontal, vertical,...), seja ainda às relações diretamente percebidas e exprimíveis por oposições qualitativas (se cortar/ não se cortar, se tocar/ não se tocar).

Consideraremos agora os termos denominativos de objetos (coluna 2). Um certo número apresenta a vantagem aparente de pertencer tanto ao vocabulário matemático quanto ao vocabulário corrente para nomear ou descrever objetos ou formas (arquiteturais por exemplo) do ambiente. A escolha e a compreensão destes termos vão depender da maneira de ver, icônica ou não icônica, de quem olha os objetos do ambiente ou sua representação (supra II). Para um assunto funciona em modo icônico de visualização, os termos analítico-descritivos e aqueles cuja relação não têm nenhuma utilidade, e mesmo nenhum sentido, para dizer o que vê. Eles se tornam ao contrário essenciais para funcionar em modo não icônico de visualização.

2. Como As Proposições Podem Ser Colocadas Em Correspondência Com Uma Figura Ou Ser Convertida Em Uma Figura?

O papel da linguagem não é “colocar em palavras” o que já seria claramente pensamento ou experiência, mas de colocar em proposições para construir o pensamento dos objetos do conhecimento, pelo menos no domínio das ciências e das matemáticas. O que as proposições enunciam constituem um sentido que é irredutível àquele das palavras que elas articulam. Esta irredutibilidade aparece com os problemas específicos que aumentam tão bem a produção, oral e sobretudo escrita, que a compreensão das proposições, entendidas ou lidas: por exemplo, a distinção entre uma proposição e sua recíproca embora utilizem as mesmas palavras, ou a modificação de sentido relacionado à quantificação e à negação, ou ainda a mudança de sentido de uma proposição em função do estatuto que lhe é dado no desenvolvimento de um discurso. A questão de articulação entre visualização e discurso se coloca então de uma maneira mais precisa. Trata-se de saber que esta articulação se limita à âncora que os termos empregados permitem estabelecer na representação visual ou se, ao contrário, elas não mobilizam as interações mais complexas.

A articulação cognitiva entre o registro da visualização e o da linguagem não é feito ao nível das palavras, mas das proposições. De fato, a produção de uma representação não é mais a mesma conforme o que ela se faz, ou o que ela não faz, *em função da produção prévia de uma representação em um outro registro.* Assim, uma figura pode ser produzida para ilustrar um enunciado, mas inversamente um enunciado pode ser produzido para descrever ou para explicar uma figura. **Estas duas situações são cognitivamente totalmente diferentes e não conduzem necessariamente as mesmas produções.** Retornaremos ao exemplo acima (Figura 9) e consideraremos o enunciado 1. A partir deste enunciado 1 pode-se construir a figura 3, em seguida a figura 1 apagando-se os traços que excedem para obter o contorno fechado. Não construímos a figura 2: esta aqui supõe uma reorganização visual das formas reconhecidas nas figuras 1 ou 3. Esta reorganização visual é a condição para ver a figura 2 como uma subfigura da figura 1. Tomemos agora a figura 1. O enunciado 1 pode ser visto como uma descrição da figura 1, mas não do enunciado 2, a menos que sejamos capazes de fazer espontaneamente a reorganização visual requerida e que pensemos no teorema a encontrar para resolver o problema. Ou isso é o ponto de vista do redator do enunciado do problema e não aquele de um aluno para o qual a articulação cognitiva entre visualização e linguagem não está ainda colocada no lugar.

Podemos assim verificar que uma figura e um enunciado (linguístico ou simbólico) não preenchem uma com relação à outra as mesmas funções e não possuem o mesmo estatuto. Isto porque quando duas representações são simultaneamente mobilizadas em dois registros diferentes, torna-se essencial distinguir os estatutos de representação autossuficiente para uma e de representação auxiliar para outra (Séminaire IUFM, 1999). Assim ao nível das proposições a articulação entre figuras e proposições é subordinada à função daquilo que é produzido como representação auxiliar, preenchido com relação que é considerado como representação principal. *A formulação de um enunciado e a escolha de uma figura dependem da função que aquele que, em um contexto dado, é considerado* *como representação auxiliar que deve preencher com relação àquilo que é matematicamente considerado como representação autossuficiente.* A figura abaixo dá uma primeira ideia disso.

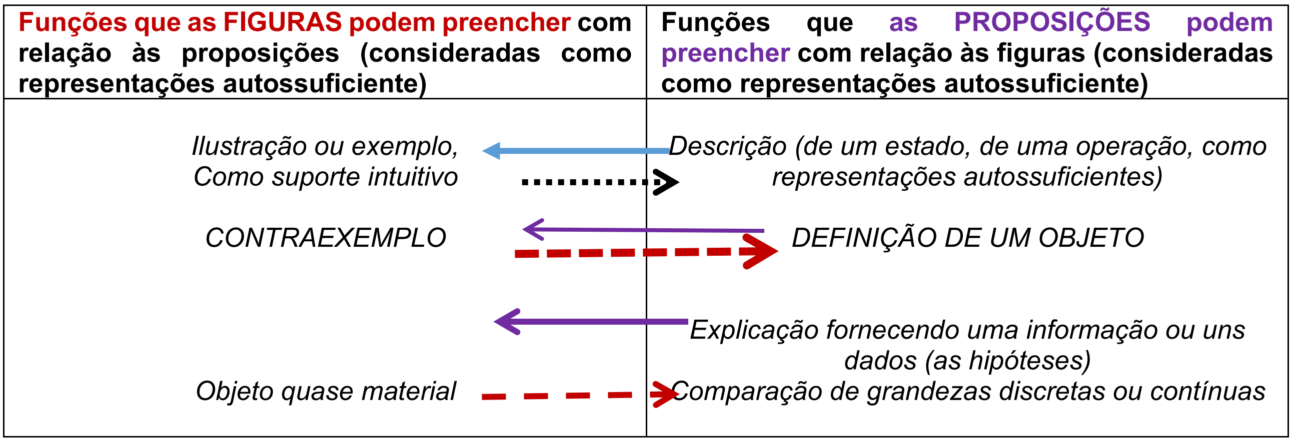


Figura 11: Análise funcional da relação entre uma proposição enunciada e uma figura
Fonte: O autor

É suficiente mudar o estatuto ou a função de um enunciado para mudar seu tipo de formulação. Vejamos agora, a título de exemplo, duas consequências desta análise funcional de articulação entre figura e enunciado, quer dizer a articulação entre visualização e linguagem ao nível das proposições enunciadas: a produção de uma figura que seja um contraexemplo, e as diferentes definições possíveis de uma reta.

a. A Produção De Uma Figura Como Contraexemplo De Uma Proposição Apresentada Como Conjectura

De um ponto de vista matemático, a produção de um contraexemplo constitui a situação em que a articulação entre visualização e formulação é a mais significativa, porque a figura é então um exemplo que toma o valor matemático de prova. *Mas talvez não tenhamos prestado atenção suficiente ao fato que, de um ponto de vista cognitivo, esta articulação se faz ao nível de uma proposição enunciada e não com o raciocínio.* Uma figura toma o valor matemático de prova quando ela é um exemplo que refuta uma proposição apresentada como conjectura. A capacidade, nos alunos, de produzir um contraexemplo pressupõe tanto o desenvolvimento de "competências" concernentes à quarta maneira de ver, aquela de inventor "faz-tudo" e uma coordenação já forte entre o registro da visualização e aquele dos diferentes níveis de operações discursivas. O estudo de caso feito sobre a relação entre área e perímetro (BALACHEFF, 1988) ilustra bem esse funcionamento cognitivo complexo que está subjacente à produção de uma figura como contraexemplo. Trata-se aqui de discutir a proposição “dois retângulos que têm a mesma área têm o mesmo perímetro”. Para rejeitar esta proposição “o esquema seguinte abaixo “mostra” bem esta transformação que mostra a invariância de área por recorte e recolagem:

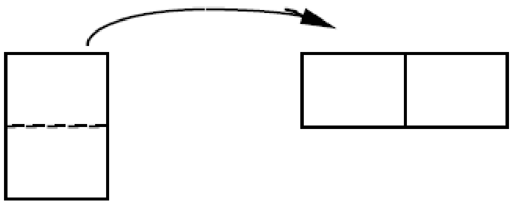


Figura 12
Fonte: O autor

A área (ou o produto) é trivialmente conservado, quanto ao perímetro o seu aumento resulta da desigualdade...” (BALACHEFF 1988, p. 289). Ou a produção deste contraexemplo, que depende da operação visual de reconfiguração, não parece ser vista “ao alcance dos alunos”, ou então a produção parece ter tomado totalmente o tempo que ela perdeu todo o efeito de contradição para que o valor epistêmico relacionado com a compreensão imediata desta proposição, porque está associada a uma evocação visual icônica, que poderia ser colocada em causa (*Ibid*, p. 299). De uma maneira mais geral poderíamos mostrar que a capacidade de produzir uma figura como contraexemplo requer uma prática espontânea desta maneira de ver própria do inventor faz-tudo. Correlativamente, poderíamos mostrar que a visualização mais congruente com as proposições (enunciados de teoremas ou de definições) é uma sequência de duas figuras.

b. Figura e Definição: O Caso Da Reta

Pode parecer absurdo tomar o caso da reta para analisar a articulação entre figura e definição, tanto a visualização de uma reta parece primitiva e evidente: seria o traço “reta” feito com a ajuda de um instrumento que é uma régua. Por outro lado, de um ponto de vista matemático, não é *uma* reta que é interessante, mas a relação entre duas retas, as quais podem ser paralelas, secantes, ortogonais, coplanares ou não coplanares etc. Mas retornemos a estes traços que devem servir de suporte imediatamente visual para os termos dessas diferentes relações matemáticas. Como explicar o que eles representam, ou como explicar o significado de “reta” seja para poder distinguir um traço “reta” e um traço "curva" ou, mais sutilmente, uma reta e um segmento (não orientado)? Em resumo, como não confundir a reta e não importa qual linha ou não importa qual traço gráfico? O mais frequente, quando não se limita ao uso empírico da régua, ou se contenta com um dos quatro tipos de definições, ou de descrição, seguintes:

(a) "Fazemos uma ideia clara dela observando

– um fio muito fino, curto (?) e **bem esticado**

– um raio de sol penetrando por um buraco muito pequeno em um quarto escuro.

(b) A linha reta é o caminho mais curto de um ponto a um outro. Este caminho mais curto é chamado de distância de dois pontos..." (LEPOIVRE E POIRSON, 1920, p. 2)

(c) "nós não podemos pensar uma linha (reta) sem a traçar no pensamento... o traço desta linha é um movimento" (KANT, 1976, p. 167).

(d) "Dois pontos distintos A e B são elementos de uma reta e de uma unicamente. Dizemos "A reta AB" (IREM, 1979, p. 164).

A primeira formulação (a) é icônica. Ela evoca um objeto físico que serve como padrão em qualquer tipo para o que chamaremos de "reta". A segunda formulação (b) é métrica. Mas esta formulação é visualmente cega. Porque não é necessário sobretudo associá-la a uma imagem da formulação (a) ou ainda o uso da régua, porque então somos conduzidos a um paradoxo uma vez que estamos sobre a esfera onde as retas se tornam círculos. Na realidade esta formulação métrica implica, sem precisar, o tipo de superfície sobre a qual definimos o "caminho mais curto". A terceira formulação (c) é dinâmica e icônica. Ela se refere ao movimento que a produz, *movimento que lhe confere ao menos duas propriedades: o fato que a reta pode sempre ser prolongada para além de seu traço* e o fato que ela é continua. A quarta formulação (d) é afim. Ela se opõe radicalmente às três precedentes, porque, conforme o princípio da pesquisa de economia máxima que rege a formulação das definições matemáticas, ela caracteriza uma reta por apenas dois pontos sem mesmo recorrer a qualquer coisa que seja como nas formulações (b) ou (c). Contudo a dificuldade desta formulação não se sustenta diante da supressão do valor visual do traço, porque os dois pontos servem necessariamente de apoio para traçar uma reta. Ela suporta o fato de que os pontos escapam de toda visualização. Um ponto não tem existência visual própria, quer dizer não pode constituir uma unidade figural identificável. **Um ponto é sempre um efeito de marcação, quer dizer de codificação, seja por uma letra, seja por um número (graduação de uma reta) para fixar uma extremidade ou uma separação a título de seus discursos unicamente.** A visualização para nos traços de segmentos que são as unidades figurais menores, ou, se preferir uma formulação mais física, que são os pixels de toda representação geométrica. Há naturalmente os pontos "notáveis" que aparecem com duas retas secantes, ou com os vértices dos polígonos ou dos poliedros. Mas visualmente a unidade figural é uma configuração de dois traços, prolongados ou não, e como tal, são intrinsecamente ligados a elementos visuais D2 que é um ângulo (Figura coluna 1). Além disso, esses pontos notáveis podem ser apenas muito poucos...

O que reter da análise desses quatro tipos de formulação? As três primeiras definições são de qualquer modo as descrições de uma característica ótica imediata (a), ou de um procedimento de medida física de uma distância entre duas marcações fixadas materialmente (b), ou de um gesto utilizando ou não um instrumento de traçagem (c). *Estas definições-descrições são representações auxiliares com relação às representações visuais,* ou "perceptivo-gestual" para retomar a expressão proposta por G. Vergnaud, que elas são aqui as representações autossuficientes. E elas constituem um obstáculo intuitivo para a quarta definição que, ela, se faz em ruptura com toda visualização. Como se admirar então que os alunos fiquem estranhamente desconcertados diante de todos os problemas que solicitam ou demandam mostrar o alinhamento de três pontos, sendo que na figura eles aparecem sobre o mesmo traço? De maneira mais geral, as três primeiras definições são as definições pragmáticas e, como tal, elas se opõem radicalmente às definições matemáticas. A menos que nos limitemos ao funcionamento cognitivo que é subjacente à produção e à compreensão destas definições. Duas exigências, com efeito, conduzem a uma reversão desses passos cognitivos quando passamos das definições pragmáticas às definições matemáticas:

– **Levando em conta os casos possíveis** e não somente aqueles dos dados observáveis. Todas as definições pragmáticas são feitas a partir de um *corpus* de dados observáveis e mesmo, o mais frequente, a partir dos dados mais frequentemente observáveis. Mas, em matemática, para aceitar ou para refutar uma proposição dada como conjectura ou mesmo somente como definição, um indivíduo não pode, portanto, se limitar à base de conhecimentos que ele dispõe ou que lhe fornece por experiência concreta lhe fornece, ele deve explorar diferentes casos possíveis. É por isso que a produção de um contraexemplo pode parecer resultado de uma "invenção" ao olhar dos conhecimentos que um indivíduo dispunha.

–**A pesquisa de uma economia máxima.** Quando se trata de definir os objetos cujo conhecimento depende da observação e resulta em uma visualização icônica, é uma exigência inversa, aquela da exaustividade, que se impõe na definição de um objeto. Trata-se de enumerar todas as propriedades como enumeramos todos os detalhes importantes.

As definições matemáticas resultam ao contrário de um processo de redução para obter a descrição minimal: dentre uma lista de propriedades que podem ser atribuídas a um objeto, trata-se de reter unicamente aquelas que serão suficientes para encontrar, por dedução, todas as outras. Naturalmente isso abre caminho a várias definições possíveis de um mesmo objeto. Assim podemos ter ao menos três definições diferentes de um paralelogramo.

3. QUAIS RECOBRIMENTOS ENTRE A VISUALIZAÇÃO E RACIOCÍNIO PARA JUSTIFICAR OU PARA PROVAR?

Ninguém, é claro, confunde a enunciação de proposições e os processos discursivos pelos quais se conduz e desenvolve um raciocínio. Mas as coisas se tornam mais delicadas para distinguir, quando se trata de explicar em que um raciocínio se distingue de uma descrição ou de uma explicação e, sobretudo, em que um raciocínio que justifica, como por exemplo, num quadro de um debate para uma decisão a tomar ou sobre uma questão da sociedade, é diferente de um raciocínio de prova como na matemática.

Invocar a lógica, ou a "derivabilidade lógica", é evidentemente ingênuo, quando se trata dos raciocínios que são feitos em língua natural e com seus recursos. Uma vez que isso não permite compreender o porquê que as deduções válidas não têm nenhuma força de prova aos olhos dos alunos e como se inscrevem na linguagem corrente. Inútil lembrar esta parede invisível na qual se encontra o ensino da geometria a partir do colégio. A utilização de definições e de teoremas para demostrar a veracidade de novas proposições não gera nenhuma **consciência de necessidade** no espírito dos alunos. Com efeito, para que se possa produzir esta consciência de necessidade deve primeiro ter compreendido o mecanismo discursivo, mais específico, em que uma nova proposição é dedutivamente produzida como conclusão de outras proposições (hipóteses e teoremas). E é somente com base nesta compreensão que a **transferência do grau de convicção** que é ligada a uma proposição (seu valor epistêmico[5]) pode se fazer para uma outra proposição, ao menos para que se efetue a operação discursiva do passo de dedução. Porque os teoremas não são utilizados e não funcionam nem um pouco como argumentos. Os teoremas mobilizam

[5] Lembremos que não são unívocas as proposições enunciadas. Ela comporta três dimensões, conforme o seu conteúdo é considerado, de seu valor em comparação a uma base de conhecimentos, ao seu papel na organização de um discurso ou em um ato de comunicação (Duval, 2001, p. 198). Todo raciocínio exige a tomada simultânea em conta dessas três dimensões, o que não é o caso para as histórias, as descrições ou as explicações.

um mecanismo de expansão discursiva que consiste em uma substituição de proposições umas por outras, enquanto os argumentos procedem por composição acumulativa de proposições umas com as outras, como cada vez que se trata de convencer, esse mecanismo sendo aliás comum a todas as outras formas de discurso e à toda prática de fala (DUVAL, 1995, p. 123-131, 255-266). E deve-se lembrá-lo? Ninguém fala funcionando sobre o mecanismo discursivo de substituição, nem mesmo o matemático fora da matemática! O mecanismo de expansão discursiva por substituição é mais apropriado aos registros simbólicos que o da língua natural, mas é no registro da língua natural que os alunos podem melhor tomar consciência da especificidade tão particular e de sua força, não somente de prova, mas de invenção.

Vemos então que não se deve confundir o raciocínio argumentativo que vem em apoio a uma proposição dada como escolha, como hipótese (fora da matemática), ou como conjectura.... e os raciocínios válidos que permitem demonstrá-la. Não pode ter transferência da aprendizagem de um a outro porque seus funcionamentos respectivos são de qualquer modo opostos e que a prática de uns é comumente dissipada enquanto a prática dos outros é excepcional, se encontrando quase reduzida ao campo da matemática. Vemos igualmente que de um ponto de vista didático, não se deve confundir raciocínio e prova. Porque os contraexemplos não mobilizam nem um pouco as mesmas operações discursivas que as deduções válidas ou o raciocínio por absurdo. Aliás, as possibilidades e a escolha desses processos de prova não são os mesmos dependendo da conjectura que pode ser verdadeira ou falsa. Isso que a *priori* não podemos saber.

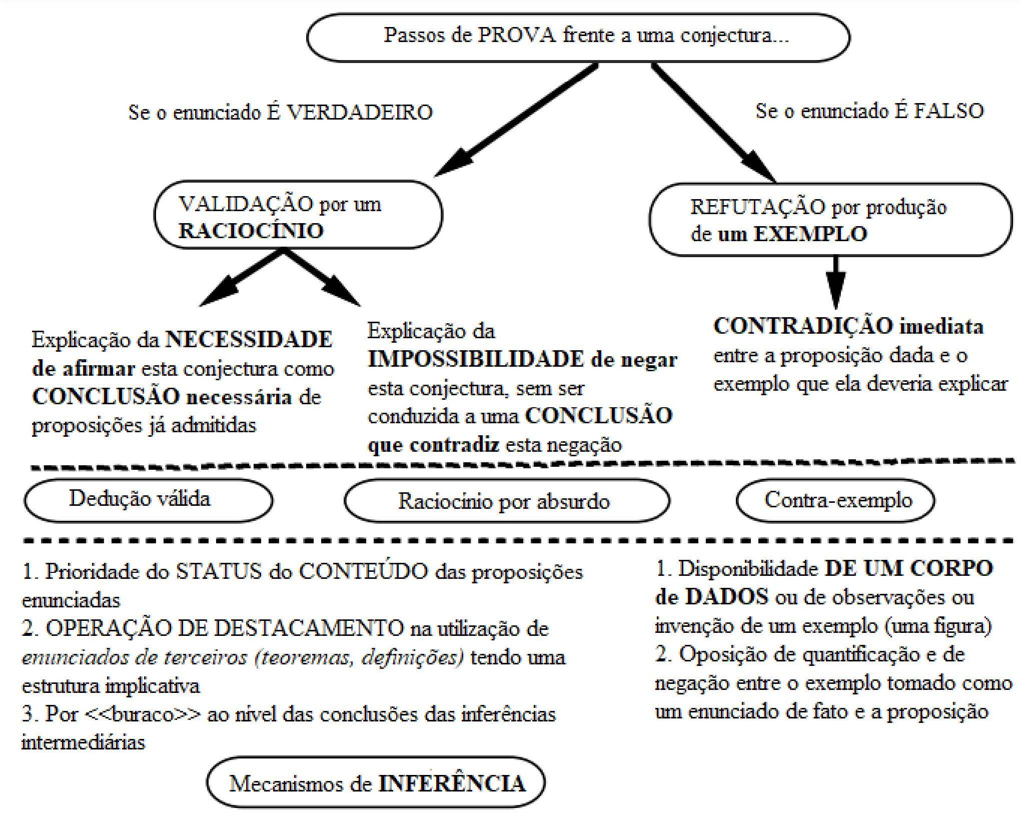


Figura 13: Classificação dos passos de prova em função dos processos cognitivos mobilizados
Fonte: O autor

Estes lembretes foram indispensáveis para colocar bem a questão das relações entre visualização e raciocínio (e não globalmente a prova): qual tipo de visualização pode corresponder a uma abordagem de raciocínio e preencher tanto a função heurística que é habitualmente devolvida às figuras para a resolução de problemas seja com a função de justificação própria da argumentação? Para responder a esta questão nós devemos distinguir três situações muito diferentes. Existe, de fato, raciocínios que seguem a visualização, existem aqueles que vêm compensar a falta de visualização, como por exemplo, se trata de um problema de geometria no espaço e não mais problemas de geometria plana, e existem aqueles que ao contrário, são livres de toda visualização.

3.1 Os Raciocínios Que Seguem A Visualização, Ou A Visualização Como Argumento Que Justifica

Nós nos limitaremos aqui ao exemplo aclamado (se nós desconsideramos o número vezes onde ele é citado ou definido antes): a visualização que justifica o teorema de Pitágoras. Geralmente nos limitamos a uma sequência de duas figuras, uma dada em estado inicial e a outra em estado final da reconfiguração interna de um quadrado em um outro quadrado.

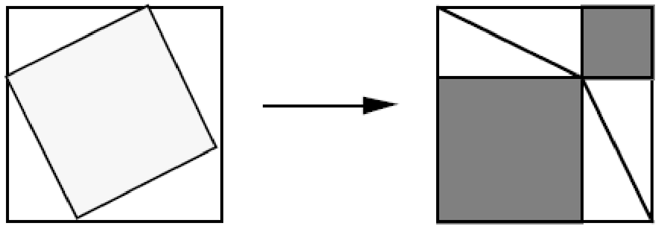
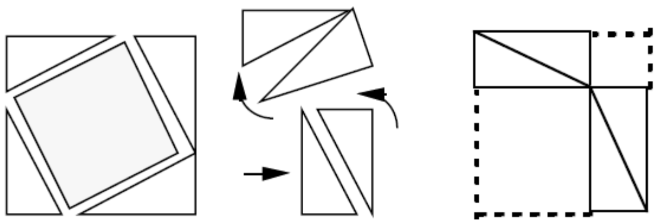


Figura 14: Estado inicial e estado final da reconfiguração global justificando a relação de Pitágoras
Fonte: O autor

Evidentemente, trata-se de uma visualização truncada que não mostra grande coisa e não pode, portanto ter tal poder de provar. Em primeiro lugar, é suposto ver que o quadrado apresentado em estado inicial representa o quadrado de hipotenusa e que os dois quadrados menores sombreados em estado final representam a soma dos quadrados dos dois outros lados. Esta suposição não retorna à articulação do nível precedente, entre uma proposição (aqui uma conjectura) e uma figura. Mas aqui a questão se coloca em outro nível: como ver, ou fazer ver, igualdades que se quer provar, sendo dado que a parte pontilhada e as partes sombreadas não são superpostas? *A visualização é feita na transformação representada pela flecha.* É necessário então a efetuar de uma maneira ou de outra para ver.



I II

Figura 15: Transformação combinando duas reconfigurações
Fonte: O autor

Os quatro triângulos devem ser reconfigurados em dois retângulos e em seguida eles devem ser dispostos no quadrado inicial de modo a fazer aparecer dois quadrados. A invariância desta transformação é assegurada pelo fato de que as unidades figurais que são deslocadas ao curso destas duas reconfigurações permanecem as mesmas (argumento característico das operações concretas para justificar uma conservação, no modelo piagetiano do desenvolvimento intelectual). Esta invariância vai permitir efetuar um cálculo qualitativo. Com efeito para colocar em evidência esta igualdade que não podemos ver porque as partes consideradas não são superpostas, é preciso um cálculo que explicite esta conservação nestas duas reconfigurações (Figura 16). Naturalmente, ao invés de efetuar o cálculo, podemos nos contentar com uma descrição verbal que tenha em seguida valor de argumento ou de explicação.

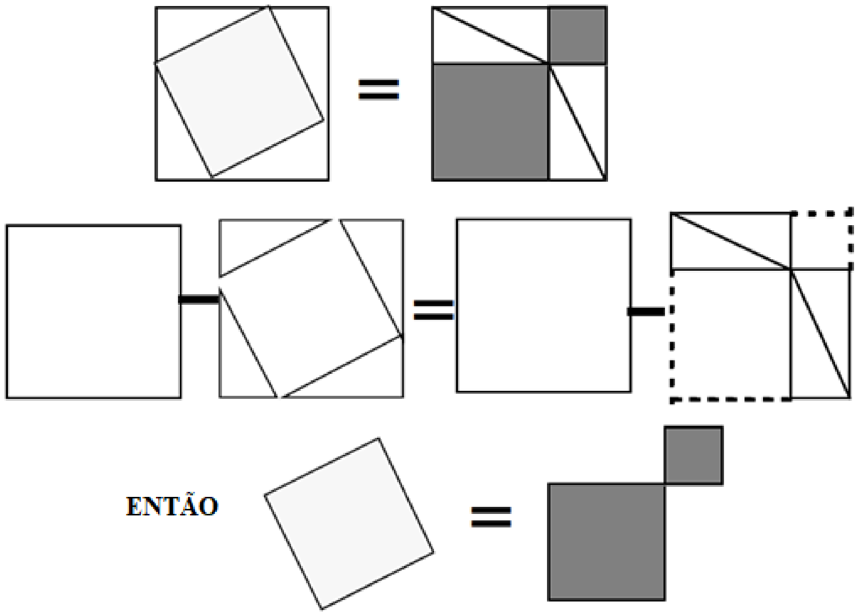


Figura 16: Colocar em evidência de igualdade entre as áreas para um cálculo qualitativo
Fonte: O autor

Podemos fazer três observações que permitem generalizar esta análise:

- (1) No nível de articulação entre visualização e raciocínio, a visualização não consiste em uma figura, mas **uma sequência de ao menos três figuras.** E esta sequência deve corresponder às operações visuais efetuadas em unidades figurais 2D[6], ou se for de geometria no espaço, em unidades figurais 3D/2D. **Mas esta visualização exclui as operações em unidades figurais 1D** (e especialmente a referência aos pontos).

- (2) A sequência de figuras constitui uma representação autossuficiente. A explicação verbal ou simbólica das operações constitui uma representação auxiliar.

- (3) Nenhum teorema, nenhum conhecimento de propriedades matemáticas, é mobilizado nesta sequência e, se aí existe um raciocínio, este não se distingue de uma

[6] Estas operações podem ser feitas por uma simples varredura do olhar (e que é feito muito rapidamente poderíamos ser tentados a falar de atividade mental!) ou por manipulação das peças de um quebra-cabeça (o que supõe que possamos dispor de várias peças para cada unidade figural a considerar, mas também introduzir clandestinamente um problema de representação semiótica no que poderá se tornar uma manipulação puramente material).

simples abordagem descritiva. Pode também representar esta descrição sob a forma de um silogismo, mas uma tal apresentação não acrescentará nada a mais pois ele não ultrapassa a descrição de operações que podemos efetuar por uma varredura visual ou mesmo colocar em cena materialmente como peças de um quebra-cabeças. De todas as maneiras aqui, independentemente da forma de explicitação adotada, simbólica, descritiva ou silogística, ela aparece secundária com relação à sequência visual e cai também sob o golpe do ditado “um diagrama vale dez mil palavras”!

Para melhor compreender a importância destas observações, olhemos uma outra demonstração do Teorema de Pitágoras, aquela de Euclides (EUCLIDES 1990, p. 282-284; IREM de Strasbourg 1986, p. 245-247), que parece também se apoiar em uma visualização. De um ponto de vista cognitivo, ela funciona completamente ao inverso do exemplo que nós acabamos de analisar. Com relação à nossa observação (1) ela implica levar em conta as operações figurais com unidades 1D e se limita a uma única figura. Com relação à observação (2) há uma inversão de estatuto: é o discurso que constitui a representação autossuficiente enquanto a figura é uma representação auxiliar que preenche duas funções diferentes, suporte descritivo para certas partes do discurso e suporte ilustrativo para ajudar a não confundir os objetos de âncora de diferentes proposições. Com relação à observação (3), ela supõe a mobilização e utilização de teoremas. As observações (2) e (3) mostram que, para ser compreendido, o raciocínio de Euclides supõe a compreensão do mecanismo discursivo de substituição sem o qual a aplicação de um teorema, quer dizer um passo na dedução válida[7], não poderia gerar a consciência de necessidade para a conclusão assim obtida. Também poderíamos mostrar que no caso da demonstração de Euclides, a ligação com a figura não se faz ao nível do raciocínio, mas ao das operações discursivas inferiores: de uma parte o vocabulário para ancorar sobre certas unidades figurais e de outra parte para as proposições enunciadas para focalizar na relação existente entre duas unidades figurais assim identificadas. Ao nível do raciocínio (portanto da organização permitindo derivar as proposições umas das outras) não existe nenhuma correspondência com a figura.

[7] Lembremos aqui que não se deve confundir a validade de um passo dedução, que é baseada no mecanismo de substituição, e a validade de um encadeamento de passos válidos a qual repousa sobre fato de que não há “buraco” no encadeamento dos passos (que não está no encadeamento de proposições) porque cada conclusão intermediária é transformada em premissa de um novo passo. Estes dois níveis de organização discursiva são raramente distinguidos nos trabalhos didáticos consagrados/dedicados à iniciação às provas que validam um resultado por um raciocínio válido! Os alunos suspeitam somente este duplo jogo tão estranho à toda prática da fala, mesmo nos debates?

3.2 Os Raciocínios Que Perpassam Toda Visualização

Um raciocínio funcionando com a utilização de definições e de teoremas (estes são chamados às vezes, de maneira imprópria, mas menos teórica, de "propriedade") é independente de toda visualização e pode mesmo se fazer contra toda visualização. E lá a razão que já indicamos: esse tipo de raciocínio, a diferença de argumentação, depende de um mecanismo discursivo de substituição de proposições de umas às outras, e não pelo mecanismo geral e espontâneo de composição acumulativa de proposições.

Certamente, podemos sempre propor os problemas em que as figuras constituem o campo aparente do trabalho de pesquisa e que vão servir de apoio para os raciocínios. Mas, neste caso, mantém-se o tipo de situação que nós acabamos de analisar, aquele da demonstração de Euclides onde a figura pode ser apenas uma representação auxiliar, e onde as correspondências não são feitas ao nível do raciocínio, mas ao dos termos designando as unidades figurais e ao das proposições. Isto tem como consequência que a questão da prova, como ela foi colocada em didática entre os anos de 1980 e 1990, permanece inteira: "*como fazer para que a demonstração funcione como prova para os estudantes, quer dizer, para que os alunos sejam convencidos por um resultado matemático?".* Esta questão foi realmente pouco entendida porque muitas vezes a reduziram à esta outra questão, entretanto totalmente diferente: "quais propriedades ou quais teoremas utilizar para demonstrar tal conjectura?" Fazer encontrar os teoremas certos para um problema, um problema estando sempre ligado a um conteúdo particular, não é suficiente para despertar esta consciência dinâmica de necessidade que se desenvolve com a utilização discursiva, se definições e teoremas. E sem esta consciência dinâmica de necessidade não pode ter experiência de provas matemáticas.

Para provar uma resposta didática para a questão das demonstrações, a grande maioria dos caminhos explorados não são retomados na visualização ou na argumentação, deixando em aberta a questão da entrada na compreensão e da produção de raciocínios válidos. Estes também são frequentemente desqualificados pelo uso do adjetivo "formal" cujas conotações são evidentemente muito negativas de um ponto de vista educativo. Nós vamos, ao contrário, tentar descobrir como e PORQUE a utilização de um teorema TORNARIA NECESSÁRIO a afirmação da proposição que obtemos como conclusão, e como uma prova poderia se construir e se impor a partir de várias utilizações sucessivas de teoremas. Para isso nós precisaríamos ter que fazer o desvio por uma visualização, que não tinha mais nada de geométrico, mas que permitiria aos alunos explorar eles mesmos os dois níveis de organização dedutiva que constituem os raciocínios válidos (DUVAL e EGRET, 1989). Esse tipo de visualização não geométrica foi então apresentado aos alunos como representação autossuficiente, pois em um segundo momento os alunos estavam convidados a descrever livremente. O discurso foi inicialmente introduzido como uma representação auxiliar com relação à visualização da organização dedutiva que eles tinham descoberto. Pudemos então observar rapidamente esta evolução: a transformação rápida e radical dos discursos produzidos com relação aos procedimentos matemáticos esperados. A tomada de consciência do acesso a um novo campo de operações discursivas era produzida pelos alunos nos alunos, dando-lhes ao mesmo tempo a iniciativa e controle na utilização dos teoremas e na condução dos raciocínios.

Não importa aqui os resultados obtidos ou não obtidos até o presente, em cada uma das vias exploradas, para responder a questão: “como fazer para que a demonstração matemática funcione verdadeiramente como uma prova para os alunos?”. Sua diversidade permite chamar a atenção para uma observação trivial, mas muito pouco levada em conta. *Existem várias fontes de convicção para cada indivíduo e os tipos de controle possíveis para cada um não são os mesmos.* Nós já pudemos mostrar sobre as diferentes maneiras de ver (Quadro 2). Mas este dado essencial para toda análise das provas não se limita às diferentes maneiras de ver. Há igualmente uma fonte de certeza que vem do consenso que se estabelece num grupo ao termo de discussões. E há assim uma convicção que vem de um raciocínio válido, efetuado no contexto de um corpo de conhecimentos já provados, corpo que deve também ser bem assimilado para que se efetue o raciocínio válido. O *tipo de resposta didática que damos a esta questão da compreensão das provas em matemática sempre retorna para privilegiar uma dessas fontes de convicção em relação às outras.* Descartar a entrada da compreensão do funcionamento dos raciocínios válidos, independentemente de toda visualização ou de toda argumentação, é finalmente fechar todo acesso aos procedimentos de prova nas situações em que a visualização pode ser falha (o que chega rápido em geometria plana), ou se revela insuficiente como a geometria no espaço, assim como nas situações em que é necessário tomar distância com relação ao consenso que os debates impõem num grupo. Esta escolha pode parecer legítima do ponto de vista de uma educação matemática comum, mas é uma escolha prejudicial para a formação geral dos indivíduos.

4. O CORAÇÃO DA ARTICULAÇÃO ENTRE VISUALIZAÇÃO E DISCURSO (DEFINIÇÃO, TEOREMA, PROVA, EXPLICAÇÃO) EM GEOMETRIA: O HIATO DIMENSIONAL

Nós acabamos de varrer o espectro muito largo das operações discursivas que são mobilizadas em toda formulação feita em língua natural, quer se trate de contar, de descrever, de explicar, de argumentar em um debate, raciocinar de maneira válida... A complexidade da linguagem não é de início aquela do vocabulário, mas aquela da diversidade de todas as operações discursivas que são mobilizadas na expressão. E, em geometria, como aliás em todos os domínios científicos, a expressão não consiste em colocar em palavras, na maneira que podemos aprender a colocar palavras em suas emoções e em suas "vivências", mas para articular proposições, cuja riqueza de significados é irredutível para essas palavras empregadas.

Nós temos visto igualmente que, conforme o nível das operações discursivas que se encontra privilegiado, a relação entre dizer e "ver" varia consideravelmente. Atrás desta variação, cuja complexidade é maior em geometria que em todos os outros domínios, existe um fenômeno cognitivo fundamental: o hiato entre o número de dimensões considerados para identificar uma unidade figural no que é visualizado e o número de dimensões levadas em conta para nomear os objetos e as relações que identificamos. Nós já tínhamos mencionado esse fenômeno da mudança do número de dimensões para efetuar, no sentido do aumento quando nós passamos do dizer ao ver e no sentido da redução quando nós passamos do ver ao dizer (DUVAL, 1995, p. 192). No quadro abaixo apresentamos uma análise mais detalhada. Nós podemos ver nisso que a articulação entre a visualização e o discurso representado pelas setas duplas vermelhas. Mas, também podemos ver aí que esta articulação pressupõe a capacidade de efetuar a desconstrução dimensional das formas no que diz respeito à visualização (flechas azuis pontilhadas).

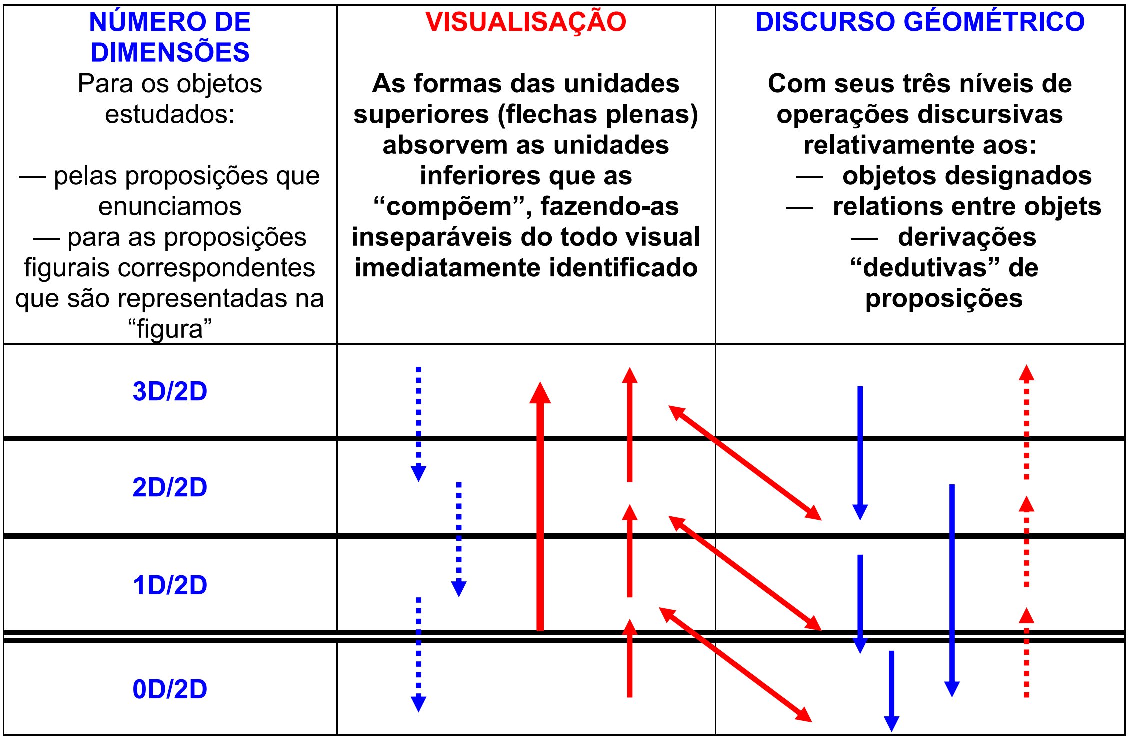


Figura 17: A articulação entre visualização e discurso em geometria
Fonte: O autor

Observaremos de uma parte a oposição entre as flechas ascendentes e descendentes em cada um dos dois dos registros de representação e de outra parte a existência de flechas oblíquas correspondendo à articulação das representações produzidas em cada um dos dois registros.

Vamos olhar primeiro as flechas com linhas plenas em cada um dos dois registros. As flechas azuis ascendentes representam o movimento espontâneo da visualização que tende a fundir *as unidades figurais de classificação inferior* EM UMA ÚNICA UNIDADE FIGURAL DE CLASSIFICAÇÃO SUPERIOR. É isso aliás que faz a potência cognitiva da visualização. As flechas pretas descendentes representam os passos da análise do raciocínio próprio à geometria para estabelecer as definições e para estabelecer os teoremas. A articulação entre a visualização e o discurso geométrico supõe que nós vamos contra o movimento ascendente da visualização, quer dizer, contra esta prioridade visual das unidades figurais de dimensão superior sobre as unidades figurais de dimensão inferior.

Vamos olhar agora as flechas pontilhadas. As flechas descendentes representam a desconstrução dimensional das formas, nas quais vimos que ela constitui o buraco negro didático de todas as atividades feitas com ou à partir de figuras. As flechas pretas ascendentes representam ao contrário **a ordem didática de exposição na introdução**

escolar dos conhecimentos. Todas as progressões do conhecimento parecem organizadas conforme a mesma ordem “conceitual”:

((((pontos → retas) → segmentos de reta) → polígono) → poliedros)

Porque o conhecimento das propriedades relativas às diferentes configurações possíveis que podemos formar a partir das relações entre retas e das propriedades relativas na comparação de dois segmentos devem fornecer os blocos elementares com os quais podemos construir os conhecimentos relativos aos polígonos e à toda geometria plana toda (integrando bem o uso do compasso e da figura do círculo). **Isso vai na direção contrária do longo e necessário trabalho de desconstrução dimensional para obter a compreensão dos conhecimentos geométricos**. Privilegiar essa ordem é fazer como se a desconstrução dimensional fosse evidente, sendo que é contrária ao funcionamento normal e intuitivo da visualização (flechas azuis ascendentes). É essa contradição cognitivamente paralisante que nós tentamos representar no quadro abaixo.

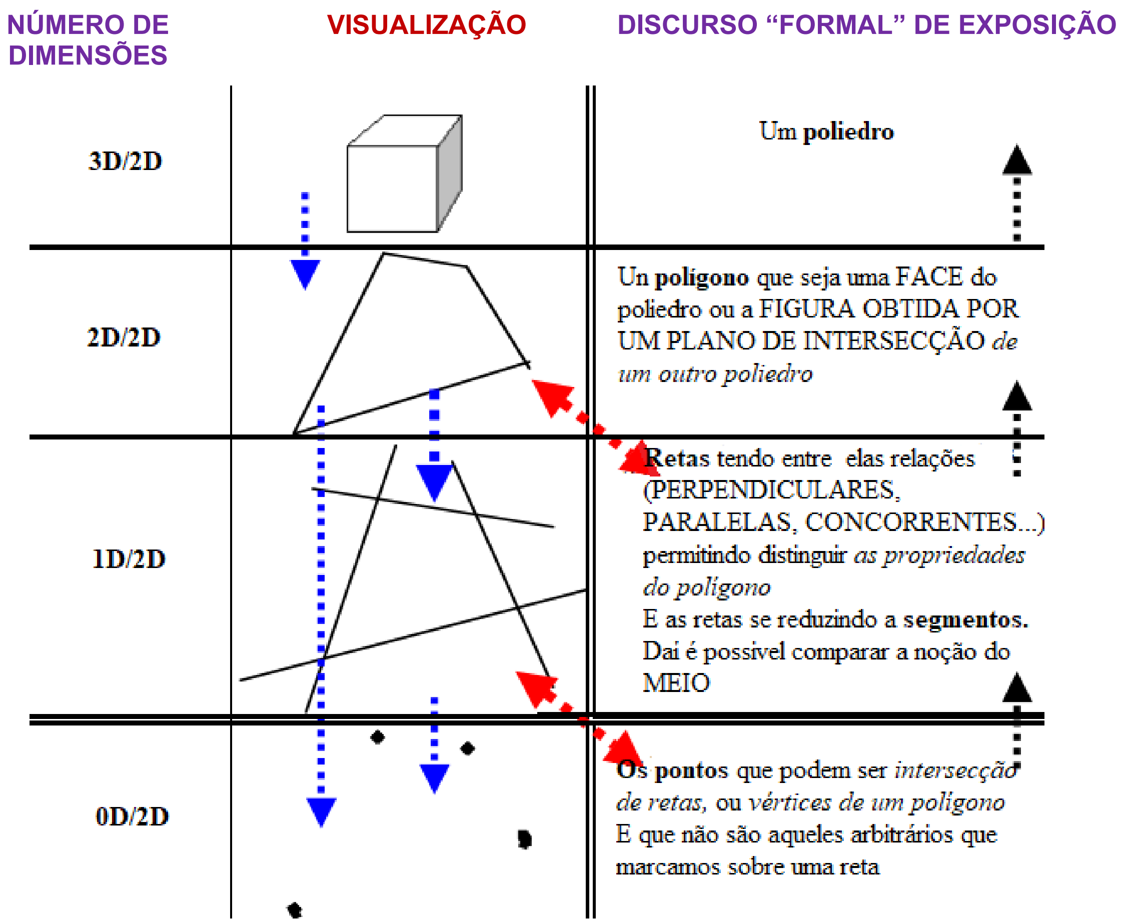


Figura 18: Contradição cognitiva subjacente à introdução dos conhecimentos geométricos
Fonte: O autor

Em nenhuma parte, fora da geometria, não encontramos hiato dimensional parecido entre imagem e linguagem, entre visualização e verbalização. E esse hiato dimensional assume, no ensino da geometria, duas formas que são de qualquer modo inversas: o hiato dimensional que é intrínseco aos procedimentos geométricos e o hiato dimensional didático resultante da organização da aquisição de conhecimentos, tal como nós podemos observar nos manuais ou nos programas.

As razões profundas da segunda forma do hiato dimensional são de uma parte a desconstrução dimensional das formas, que acreditamos assegurada pelo único uso dos instrumentos que produzem traços retos, e de outra parte a orientação do discurso geométrico, e portanto a polarização de todas as operações discursivas para a produção de provas envolvendo os raciocínios válidos, mas retendo da linguagem apenas o primeiro nível das operações discursivas, o que é empregado para traduzir os termos para designar os objetos. Os funcionamentos cognitivos essenciais para construir são ingenuamente ignorados ou são deliberadamente rejeitados. Como se surpreender com a relutância que o ensino da geometria suscita em muitos alunos, às vezes em certos professores, e consequentemente com a marginalização da geometria?

CONCLUSÃO

Visualização e discurso constituem dois tipos de funcionamento cognitivo que muitas vezes têm sido opostos, tanto do ponto de vista pedagógico, psicológico e matemático. No entanto sua articulação é absolutamente decisiva para a aprendizagem da geometria. Porque a atividade geométrica é baseada na sinergia cognitiva desses dois registros de representação. O problema particular e recorrente, que todo ensino da geometria se confronta, se deve ao fato que a articulação entre visualização e discurso é mais complexa que nos outros domínios do conhecimento, em razão do hiato dimensional inerente à abordagem dimensional matemática em si mesma. Como analisar o mecanismo cognitivo?

Dois pontos de vista devem ser levados em conta: o ponto de vista funcional e o ponto de vista estrutural. Considerando que a articulação entre ver e dizer mobiliza simultaneamente duas representações, é necessário observar qual função a representação considera como representação auxiliar para poder cumprir a relação de representação considerando como uma representação autossuficiente do ponto de vista matemático. E isso pode ser, dependendo do caso, a representação visual ou o que está enunciado. Mas como essa articulação implica que as correspondências de conteúdos podem ser estabelecidas entre duas representações, independentemente de seu estatuto de representação auxiliar ou autossuficiente, devemos assim observar a maneira onde as unidades de sentido e as unidades figurais podem ser discernidas e organizadas em cada uma das representações colocadas em sinergia cognitiva. Aqui, a análise deve ser mais precisa na medida em que o discurso emprega três níveis de operações discursivas: é em cada um desses níveis que a análise estrutural colocada em correspondência deve ser conduzida. Aparece então uma grande variação, tanto funcional quanto estrutural, dependendo do nível ao qual nos colocamos:

1. A âncora cognitiva de um enunciado sobre uma figura é feita, ao nível da designação das unidades figurais, por emprego de termos que implicam a desconstrução dimensional das formas visualmente reconhecidas.

2. A interação cognitiva entre visualização e discurso realmente não começa no nível das proposições que são enunciadas, qualquer que seja seu estatuto (observação, definição, conjectura) no discurso produzido. Porque neste nível somente uma figura pode preencher uma função (ilustração, contraexemplo, ...) em relação a um enunciado e reciprocamente. De um ponto de vista estrutural, isso se traduz pelo fato que a visualização requer uma articulação de duas figuras que podem ser subfiguras da figura de partida, ou a articulação da figura de partida e de uma de suas transformações visuais. O fato que a conversão visual de um teorema conduz a um encadeamento de duas figuras tem sido, aliás, destacado há muito tempo.

3. Uma articulação cognitivamente produtiva entre visualização e discurso só começa ao nível das transformações das representações que podem ser conduzidas, de maneira independente, em cada um dos dois registros.

Mas aqui tudo vai depender do registro que vamos privilegiar para as demandas de justificação ou de prova:

– Ou privilegiamos a visualização com os invariantes das operações (mereológicas ou outras) que são colocadas em funcionamento, e então o raciocínio que pode ser assimilado a uma explicação descritiva dessas transformações visuais realmente feitas ou verbalmente evocadas. A fonte da convicção vem então da visualização, que não se baseia em uma figura, mas em uma sequência de pelo menos três figuras nas quais as operações se baseiam necessariamente nas unidades figurais 2D ou 3D.

– Ou privilegiamos o discurso com seus próprios mecanismos de dedução válida e então a visualização cumpre sua função heurística para “encontrar” os teoremas a serem empregados, o que implica que o olhar se concentre essencialmente nas unidades figurais 1D. A fonte da convicção não vem mais da visualização, mas da compreensão e do controle dos raciocínios dedutivos desenvolvidos.

Contudo essas duas vias não podem ser colocadas no mesmo plano. A primeira é de fato limitada. Porque há muitas situações em que os raciocínios devem compensar a falta de visualização ou devem se fazer contra a visualização. As únicas situações em que visualização e discurso se juntam, em uma demanda de prova, é a produção de um contraexemplo (desde que sua invenção não demande meses ou anos de trabalho!). Mas daí nós temos que descer do nível dos raciocínios para o das proposições enunciadas e este tipo de produção depende principalmente das capacidades dos alunos em efetuar as transformações visuais de figuras. Dizendo de outro modo, dependendo do tipo de prova que pedimos aos alunos, pode haver uma convergência local ou uma divergência radical entre os processos da visualização e os processos do raciocínio.

É no campo desta atividade cognitiva ao mesmo tempo muito diversificada, mas também complexa, que os conhecimentos geométricos podem se construir. A simplicidade dos conteúdos matemáticos que escolhemos e introduzimos como as bases do ensino da geometria pressupõe de fato as maneiras de ver e os modos de raciocínio que se afastam daqueles que são praticados fora da matemática ou que às vezes se opõem a isso. Definir as progressões para a aquisição dos “saberes” em geometria, sem levar em conta as variáveis correspondentes aos diferentes funcionamentos cognitivos que acabamos de analisar só podem conduzir, a médio ou a longo prazo, a um impasse. A simplicidade das abordagens geométricas está nessas diferentes tomadas de consciência que os alunos devem fazer tanto para a visualização quanto para a produção e compreensão do discurso geométrico.

Não podemos então esperar que os alunos não somente tomem consciência desses funcionamentos cognitivos específicos, mas também coloquem no lugar as coordenadas complexas necessárias para sua sinergia, só porque os faríamos trabalhar com os conteúdos matemáticos. E aqui é suficiente para lembrar um fato importante. Se solicitamos uma produção discursiva aos alunos obtemos textos radicalmente diferentes de acordo com o tipo de representação visual que lhes serve de apoio. Nós não podemos esperar que os alunos, que permanecem muito legitimamente aos funcionamentos cognitivos próprios da visualização icônica, possam entrar na compreensão de enunciados e de abordagens discursivas que se apoiam numa visualização não icônica e que requerem a reflexão ótica da desconstrução dimensional das formas. Daí a importância de um trabalho longo e específico para fazer entrar nessas maneiras tão particulares de ver que são próprias da geometria. Mas, não podemos esperar que os alunos que fossem essencialmente treinados nessas maneiras de ver do construtor ou do inventor faz-tudo, quer dizer a uma construção instrumentada das figuras ou às justificações por meio de transformações figurais, possam entrar na compreensão do funcionamento das deduções válidas sem as quais não pode haver provas baseadas em definições ou teoremas. Porque o funcionamento discursivo dos raciocínios matemáticos é, se nós ousamos dizer, um funcionamento "anti-palavra".

A ignorância da complexidade cognitiva implicada em toda abordagem da geometria, não é somente prejudicial para o ensino, ela é igualmente para as pesquisas sobre a aprendizagem da geometria. Assim nós podemos questionar a metodologia utilizada na análise das produções "de linguagens" dos alunos, quando esta é conduzida essencialmente, senão exclusivamente, em função dos conteúdos matemáticos. A complexidade do funcionamento discursivo sendo ignorada, a interpretação do discurso dos alunos não recai então sob um comentário livre, próprio à cada pesquisador, em vez de colocar em evidência controlável (e, portanto, comparável a outros *corpus* de produções "linguísticas") observações ou conclusões que são tiradas a partir delas? Nós poderíamos também, da mesma maneira, questionar a análise das tarefas propostas em relação com a visualização, que estas sejam feitas como parte de um manual, de uma ficha ou de um software. Um grande progresso será feito para o ensino da geometria, para lhe dar um lugar eminente na formação geral do indivíduo quando os conteúdos matemáticos forem analisados em relação à atividade cognitiva que lhes solicitam e que o desenvolvimento desta atividade se tornará um objetivo indissociável dos objetivos matemáticos.

REFERENCIAS

BALACHEF, N. **Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège.** Thèse Université Grenoble 1. Grenoble, 1988.

BERTHELOT, R.; SALIN, M. H. **L'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire.** Grand N, 53, p. 39 – 56, 1994.

BERTHELOT, R.; SALIN, M. H. **L'enseignement de l'espace à l'école élémentaire.** Grand N, 65, p. 37 – 59, 2000.

COREN, S.; PORAC, C.; WARD, L. M. **Sensation and Perception.** New York: Academic Press, 1979.

DUPUIS, C.; DUVAL, R.; PLUVINAGE, F. Étude sur la géométrie en fin de troisième, in **Géométrie au Premier Cycle.** Tome II, APMEP, p. 65 – 101, 1978.

DUVAL, R.; EGRET, M. A. L'organisation déductive du discours: interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la demonstration, **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, 2, p. 41 – 65, 1989.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Bern: Peter Lang, 1995a.

DUVAL, R. Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processings. In: **Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematic Education** (Ed. R. Sutherland & J. Mason), Springer, p. 142- 157, 1995b.

DUVAL, R. Costruire, vedere e ragionare in geometria: quali rapporti? **Bolletino dei docenti di matemática**, 41, p. 9 – 24, Bellinzona, 2000.

DUVAL, R. Ecriture et compréhension, dans **Produire et lire des textes de démonstration.** Ed. Barin &alii, p. 183 – 205, Ellipses, 2001.

EDWARDS, C. H. **The historical Development of Calculus**, Springer, 1979.

EUCLIDE. **Les Eléments**, volume 1 Livres I à IV, Tr. B. Vitrac. Paris: PUF, 1990.

GODIN, M. De trois regards possibles sur une figure au regard "géométrique", à paraître dans le **Actes du séminaire national de didactique**, 2004.

IREM de Strasbourg, **Mathématiques $4^{ème}$.** Istra, 1979.

IREM de Strasbourg, **Mathématiques 2^{e}.** Istra, 1986.

KANIZA, G. **La grammaire du voir** (tr. A. Chambolle). Paris: Diderot éditeur, 1998.

KANT, E. **Critique de la raison pure** (tr. Barni). Paris: G. F., 1976.

LABORDE, C. Enseigner la géométrie: permanences et révolutions. **Bulletin APMEP**, 396, p. 523 – 548, 1994.

LEPOIVRE, G. et POIRSON, A. **Cours de Géométrie théorique et pratique**, I. Lille: Janny, 1920.

PADILHA, V. **L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques**, Thèse U. L. P.: StrasbourG, 1992.

PEIRCE, C. S. **Ecrits sur le signe** (Choix de textes, tr. G. Deledalle). Paris: Seuil, 1978.

POINCARÉ, H. "Pourquoi l'espace a trois dimensions" dans **Dernières pensées**. Paris: Flammarion, 1963.

PIAGET, J. **La representation de l'espace chez l'enfant**. Paris: P. U. F. 1972.

SÉMINAIRE IUFM. **Conversion et articulation des representations analogiques**. Ed. R. Duval. IUFM Nord Pas de Calais, 1999.