Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MODELAGEM DE LOGOTIPOS FIGURAIS NO GEOGEBRA: UMA ANÁLISE DO PROCESSO E DOS CONCEITOS E HABILIDADES REQUERIDOS

Modeling Figure Logos In Geogebra: An Analysis Of The Process And Required Concepts And Skills

Odalea Aparecida **VIANA**
Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasill
odaleaviana@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4782-6718

Giselle Alves de Freitas **GABRIEL**
Professora da rede pública estadual de Ituiutaba, MG, Brasil
gisellealvesdefreitas@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0085-4140

Fernanda da Silva **TEIXEIRA**
Licencianda em Matemática/UFABC
fernandateixeira.prof@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2338-1953

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Este trabalho descreve a experiência obtida em um curso oferecido a professores e estudantes de matemática na forma de uma ação de extensão de uma universidade federal em que se pretendia tratar de aspectos teóricos e práticos da aprendizagem em geometria e da utilização do software GeoGebra. Tem-se como objetivo analisar a atividade de modelagem de logotipos figurais que foi aplicada no mencionado curso, identificando: (a) as fases do processo; (b) os níveis de formação conceitual exigidos e (c) as habilidades geométricas requeridas. A coleta de dados baseou-se nas construções e nos protocolos arquivados no GeoGebra e nas ações e exposições verbais da ministrante do curso – identificáveis nas videoaulas gravadas. Foram identificadas as fases de interação, de matematização e de modelo matemático, os níveis 2 e 3 de formação conceitual e as habilidades visual, verbal, lógica e gráfica. Considerou-se que a modelagem de logotipos figurais com a utilização do GeoGebra pode ser uma prática que auxilie os alunos no desenvolvimento do pensamento e das habilidades geométricas no ensino fundamental e médio.

Palavras-chave: GeoGebra, Níveis de formação conceitual, Habilidades geométricas, Modelagem matemática

ABSTRACT

This paper describes the experience obtained in a course offered to mathematics teachers and students as an extension action of a federal university in which the intention was to deal with theoretical and practical aspects of learning in geometry and the use of GeoGebra software. The aim is to analyze the activity of modeling figural logos that was applied in the mentioned course, identifying: (a) the phases of the process; (b) the levels of conceptual formation required and (c) the geometric skills required. Data collection was based on constructions and protocols filed in GeoGebra and on actions and verbal presentations of the course teacher – identifiable in the recorded video classes. Interaction, mathematization and mathematical model phases were identified, as well as level three of conceptual formation and visual, verbal, logical and graphic skills. It was considered that the modeling of figural logos using GeoGebra can be a practice that helps students in the development of thinking and geometric skills in elementary and high school.

Keywords: GeoGebra, Conceptual Training Levels, Geometric Skills, Mathematical Modeling

1 INTRODUÇÃO

Ao menos duas justificativas podem ser dadas para a elaboração de um curso de extensão direcionado a professores de matemática com os temas geometria, modelagem matemática e GeoGebra[1]: a intenção de colaborar nas ações empregadas para melhoria do processo de ensino e aprendizagem da geometria e o enfrentamento ao desafio de usar recursos tecnológicos em tempo de pandemia. A primeira justificativa surge da constatação, feita ao longo de nossa trajetória na formação continuada de professores, do pouco entendimento que se tem acerca do desenvolvimento do raciocínio geométrico e das habilidades básicas envolvidas na aprendizagem dessa área da matemática. A segunda, não menos importante e, talvez, mais imediata, se ampara na necessidade dos professores de dominar tecnologias digitais que os auxiliem nas suas aulas remotas de modo a garantir que os alunos aprendam conceitos e procedimentos de forma mais autônoma. Ações nesse sentido podem ser vistas em inúmeras publicações na área de formação continuada de professores (Leite, Lima & Carvalho, 2020; Menezes, Ferro, Rocha & Silva, 2021).

Entende-se a modelagem matemática como o processo de obtenção de um modelo, isto é, de um conjunto de conceitos, relações e símbolos matemáticos que representam, de certa forma, um aspecto da realidade (Biembengut & Hein, 2007). O processo de modelagem requer algumas fases, como: interação, matematização e modelo matemático. Pode-se considerar também a modelagem matemática como um ambiente de aprendizagem (Barbosa, 2007) em que conceitos e procedimentos podem ser aprendidos e habilidades podem ser desenvolvidas a partir de investigações de situações advindas da realidade do aluno. Na literatura da área de Educação Matemática podem ser vistas várias aplicações da modelagem matemática como um recurso metodológico[2] para a

[1] O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra; é gratuito, pode ser acessado no computador e no celular pelo site oficial ou pelo aplicativo baixado pela internet e tem sido objeto de análise por vários especialistas da área. Convém esclarecer que o objetivo do curso relatado neste texto não foi capacitar os cursistas quanto ao domínio técnico do software – posto que as autoras são meras usuárias –, mas fornecer alguns elementos para que os professores possam utilizá-lo como ferramenta auxiliar no processo de ensino e aprendizagem da geometria básica.
[2] Biembengut & Hein (2007) definem que o método que utiliza a essência da modelagem para o ensino em cursos regulares é denominado modelação matemática, cuja implementação requer uma série de cinco

aprendizagem de conteúdos na sala de aula (Almeida, Gomes & Madruga, 2020; Braga, 2020; Silva, 2018; Soares, Notare & Moraes, 2020).

Com base nas perspectivas mencionadas, considera-se que a ação de modelar um logotipo figural[3] – ou seja, uma figura que representa uma marca conhecida – implica em reconhecer as figuras geométricas envolvidas, perceber a lógica de construção e escolher e aplicar os comandos do GeoGebra, definindo os elementos identificáveis, suas medidas e suas relações. Apesar de haver várias pesquisas que mostram diversas aplicações do GeoGebra e da modelagem matemática no ensino básico, bem como na formação de professores (Amorim, 2019; Marmitt & Bonotto, 2020), foi encontrado apenas um trabalho nacional que descreve o processo de modelar os logotipos figurais (Boiago, 2015).

Neste cenário, o curso de modelagem matemática de logotipos figurais surgiu como possibilidade de atuação do professor em duas frentes: como cursista, aprendendo a modelar figuras geométricas utilizando o software GeoGebra; e como docente, compreendendo como se dá a formação conceitual segundo o modelo de Van Hiele (1986) – que é descrita por cinco níveis hierárquicos: visual, análise, dedução informal, dedução formal e rigor – e como são desenvolvidas as habilidades em geometria (visual, verbal, desenho, lógica e aplicações) de acordo com Hoffer (1981). As duas concepções teóricas mencionadas pertencem à área de pesquisa Psicologia da Educação Matemática[4] e podem ser encontradas em vários trabalhos que descrevem ações pedagógicas para o ensino e aprendizagem da geometria (Gonçalves, Ferreira, Ferreira & Menegais, 2020; Silva, 2018).

O curso foi ministrado pela primeira autora deste trabalho na forma de Extensão Universitária na Universidade Federal do ABC e pretende-se, neste texto, analisar a parte referente ao processo de modelagem, sem deixar de contextualizar como este se insere nos aspectos teóricos e práticos apresentados durante a ação. Assim, o objetivo deste trabalho é analisar a atividade de modelagem de logotipos figurais que foi aplicada no mencionado curso de extensão a professores, identificando: (a) as fases do processo; (b) os níveis de formação conceitual exigidos e (c) as habilidades geométricas requeridas.

---

passos: diagnóstico, escolha do modelo matemático, desenvolvimento do conteúdo programático, orientação da modelagem e avaliação do processo. Esse método não será plenamente seguido neste trabalho.

[3] A expressão logotipo figural foi definida pela ministrante do curso para servir de base ao processo de escolha dos cursistas com vistas à identificação de formas geométricas.

[4] A Psicologia da Educação Matemática é uma área que integra o conhecimento acerca da estrutura da matemática e o conhecimento de como os indivíduos pensam, raciocinam e utilizam suas capacidades intelectuais (Brito, 2001).

2 A MODELAGEM MATEMÁTICA DE LOGOTIPOS FIGURAIS

A modelagem matemática pode ser entendida como o processo de obtenção de um modelo (Biembengut & Hein, 2007) e compreende algumas fases: (a) interação; (b) matematização e (c) modelo matemático.

Na primeira fase é feito o reconhecimento da situação-problema: algumas informações devem ser buscadas, algumas de forma direta – a partir de uma experiência de campo ou advindo de dados obtidos por especialistas da área – e outras de modo indireto por meio de pesquisa em livros, em revistas, na internet etc. A fase seguinte, matematização, é subdividida em formulação e resolução do problema; ou seja, nesta etapa, vista pelos autores como a mais complexa e desafiante de todo processo de modelagem, o modelador deve traduzir a situação problema para a linguagem matemática. É necessário identificar os fatos envolvidos e selecionar os relevantes; estabelecer hipóteses, decidir quais são os fatores a serem perseguidos, selecionar variáveis relevantes e constantes envolvidas, selecionar símbolos apropriados para essas variáveis e descrever essas relações em termos matemáticos. Dessa forma, chega-se "a um conjunto de expressões aritméticas ou fórmulas, ou equações algébricas, ou gráficos, ou representações, ou programa computacional, que levem à solução ou permitam a dedução de uma solução" (Biembengut & Hein, 2007, p. 14). Tendo obtido a formulação do problema, o modelador passa a resolvê-lo em termos do modelo, utilizando para isso seu conhecimento matemático e contando com o apoio de ferramentas auxiliares – computador, por exemplo. Finalmente, a última etapa refere-se à conclusão do processo: faz-se necessária uma avaliação para verificar em que nível o modelo se aproxima da situação real e o grau de confiabilidade na sua utilização.

O processo descrito pode ser retomado com ajustes de hipóteses, variáveis ou procedimentos, caso o modelo não resolva o problema e não se atenda à situação inicial pretendida. Na conclusão do processo de modelagem é importante que se faça um relatório em que sejam registrados todos os procedimentos desenvolvidos, de modo a propiciar seu uso de forma adequada.

No caso da modelagem de um logotipo, a interação é a percepção global da figura e a identificação, ainda de modo bem inicial, do possível reconhecimento de figuras geométricas. Alguns logotipos são de imediato descartados para investigação de figuras geométricas: em geral, aqueles em que se notam contornos formados por muitas curvas e disposições de formas pouco identificáveis ou que exigiriam muito trabalho para defini-las utilizando-se de conceitos básicos de geometria plana – como é o caso de logotipos formados por letras. Em boa parte dos logotipos é possível identificar de imediato ao menos uma figura geométrica plana. A Figura 1 mostra a classificação de alguns logotipos adequados e não adequados para a modelagem.

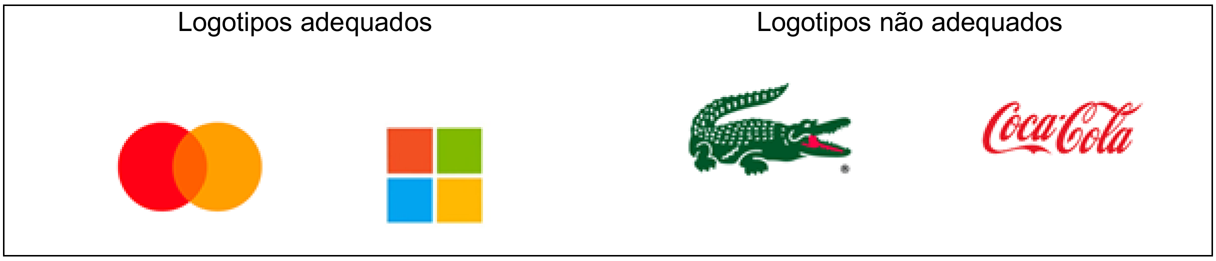


Figura 1: Logotipos para modelagem
Fonte: Elaboração das autoras

Nas fases seguintes, o processo compreende a identificação das figuras geométricas, de suas medidas e posições, bem como da sequência lógica de construção no GeoGebra; o Quadro 1 ilustra as fases estabelecidas por Boiago (2015) na comparação com aquelas apontadas por Biembengut & Hein (2007).

Quadro 1: Comparação entre as fases da Modelagem Matemática e a Modelagem de logotipos

Fases da Modelagem Matemática (Biembengut&Hein, 2007)	**Fases da Modelagem de logotipos (Boiago, 2015)**
1) reconhecimento da situação-problema	1) reconhecimento do logotipo enquanto uma combinação de figuras geométricas
2) familiarização com o assunto a ser modelado	2) familiarização com as figuras geométricas
3) formulação de um modelo	3) sequência lógica de construção no GeoGebra
4) validação do modelo	4) verificação final da forma obtida e comparação com o logotipo original

Fonte: Elaboração das autoras com base em Boiago (2015)

Nota-se que a validação do modelo se refere à verificação da construção obtida na tela do software; por vezes, nem todos os elementos verificados podem ser construídos e cabe ao modelador encerrar o processo ou reiniciar as fases mencionadas. Na Figura 2 são apresentados o logotipo original e o modelo construído no GeoGebra, considerado como validado.

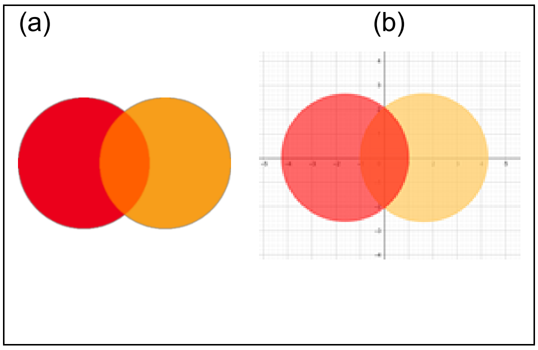


Figura 2: Logotipo original (a) e o modelo construído no GeoGebra (b)
Fonte: Elaboração das autoras

Neste texto são detalhados os procedimentos realizados nas fases de construção das figuras que fizeram parte do curso de extensão mencionado.

3 OS NÍVEIS DE FORMAÇÃO CONCEITUAL E AS HABILIDADES GEOMÉTRICAS

Van Hiele (1986) apresentou um modelo teórico que visa explicar o chamado pensamento geométrico[5] dos alunos em seu processo de aprendizagem de conceitos geométricos. Segundo o autor, a formação de conceitos pode ser entendida por meio de cinco níveis hierárquicos: visual, análise, dedução informal, dedução formal e rigor.

No primeiro nível, chamado de estágio inicial ou de nível básico, visual ou de reconhecimento, o aluno percebe os conceitos geométricos como entidades totais não vê componentes ou atributos, já que a aparência física é determinante para o reconhecimento das formas. No Nível 2, o aluno consegue analisar algumas propriedades das figuras; por exemplo, reconheceria que o quadrado possui quatro lados, que esses lados são congruentes e que os ângulos são retos. No entanto, não consegue relacionar as propriedades das figuras: é apenas no Nível 3 que o aluno consegue organizar propriedades, classificar figuras e realizar deduções informais por meio da experimentação. A compreensão do significado da dedução como maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático é característica do Nível 4, em que é possível, por exemplo, a dedução de teoremas. Finalmente, no Nível 5 o aluno – em geral de cursos do ensino superior – é capaz de compreender geometrias não euclidianas e comparar diferentes sistemas.

[5]Encontram-se nas definições da teoria as expressões: pensamento geométrico, raciocínio geométrico e níveis de formação conceitual.

Van Hiele (1986) esclarece que os níveis formam uma hierarquia, o que significa que um aluno não consegue passar de um nível para outro sem dominar as operações do nível anterior; além disso, o avanço nos níveis depende dos conteúdos e das metodologias empregadas pelo professor. Sendo assim, o conhecimento acerca da hierarquia conceitual pode ajudar o professor a elaborar seu plano de trabalho, organizando atividades que levem ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

Além da formação de conceitos, a aprendizagem da geometria básica está ligada ao desenvolvimento de certas habilidades que foram descritas por Hoffer (1981) como: visual, verbal, gráfica e aplicação.

A habilidade visual permite ao aluno reconhecer informações na forma de desenhos e de construções e está relacionada à capacidade de formar imagens mentais para inspecioná-las, movimentá-las, estendê-las etc. A capacidade de utilizar as palavras para descrever conceitos e relações é denominada de habilidade verbal; a gráfica (ou habilidade de desenho) é demonstrada nas construções geométricas – que podem ser realizadas com régua e compasso ou com softwares próprios. Finalmente, a habilidade de aplicação é avaliada quando se tem competência para utilizar os conhecimentos geométricos em situações do cotidiano ou nas soluções de problemas práticos advindos de atuação profissional.

Conforme apontam Passos, Buriasco e Soares (2019), na prática de sala de aula nem sempre se dá importância aos níveis em geometria: muitas vezes o professor inicia um conceito a partir de um nível de pensamento que ainda não foi atingido por todos os alunos. Nesse caso, eles tendem a reproduzir o conteúdo e não conseguem aplicar seus conhecimentos em uma situação concreta. Pode-se exemplificar essa situação com o conteúdo semelhança de triângulos que, para real compreensão, requer o estabelecimento de relações entre lados e ângulos de triângulos, a formulação de hipóteses acerca de condições necessárias e suficientes etc., características do Nível 3 de pensamento geométrico.

Considera-se, também, que questões avaliativas são formuladas sem se levar em conta as habilidades requeridas para solucioná-las. Como exemplo, questões que solicitam a identificação de uma planificação correta de um poliedro podem requerer habilidade visual para formar uma imagem e manipulá-la mentalmente e não apenas conhecer as propriedades da figura geométrica apresentada (Heck, 2020; Viana, 2015).

Algumas características dos níveis de formação conceitual bem como das habilidades geométricas puderam ser evidenciadas nas atividades de modelagem matemática de logotipos realizadas no Curso de Extensão e elas compõem a análise que pretende ser realizada neste trabalho.

4 O CURSO

Elaborado e ministrado pela primeira autora deste trabalho, professora visitante da UFABC, o curso teve, como participantes da equipe executora, uma discente de graduação da UFABC e outra da Pós-Graduação da UFU: estas são as outras autoras.

O curso, que teve como público-alvo professores que ensinam matemática da rede pública e estudantes da Licenciatura em Matemática e da Pós-Graduação da UFXXXX interessados na área de ensino de matemática, foi realizado totalmente on-line, em 2021, em um total de 30 horas, sendo 15 horas na forma de atividades síncronas (aulas e oficinas) e outras 15 horas na forma de atividades assíncronas (realização da modelagem). Foram oferecidas 30 vagas.

Como objetivo geral, o curso pretendeu fornecer elementos teóricos e práticos para a aprendizagem da geometria utilizando a Modelagem Matemática e o software GeoGebra. Especificamente objetivou-se: a) discutir elementos teóricos da aprendizagem da geometria básica: níveis de formação conceitual, aprendizagem significativa de conceitos e de procedimentos; b) discutir metodologias e recursos pedagógicos: modelagem matemática e o software GeoGebra; c) realizar a modelagem de logotipos figurais.

Foram planejadas, como formas de avaliação, a frequência nas atividades síncronas, a execução de tarefas que visavam a exploração dos comandos do GeoGebra e a revisão de conceitos e procedimentos em geometria e a entrega da modelagem de um logotipo figural escolhido pelo participante.

Como resultados esperados, considerou-se que o curso contribuiria na formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática, apresentando possibilidades de metodologias e de utilização de recursos tecnológicos nas suas práticas pedagógicas e ampliando o conhecimento de construtos teóricos que embasam o processo de ensino e aprendizagem da geometria.

As atividades foram organizadas em três módulos conforme o planejamento mostrado no Quadro 2, em que constam os objetivos, o conteúdo programático, a metodologia e os procedimentos utilizados.

Quadro 2: Módulos do Curso de Extensão

Módulo	Data e Atividade	Objetivos	Conteúdo	Metodologia
I	24/02 Síncrona 03/03 Síncrona 10/03 Síncrona	-Apresentar e discutir os elementos teóricos da aprendizagem em geometria, articulando com exemplos advindos da prática docente. -Apresentar o software GeoGebra.	-Introdução. -As questões do ENEM. -Os conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais. -Níveis de formação conceitual, habilidades geométricas e aprendizagem significativa da geometria. -O software GeoGebra.	Foram apresentados slides com animação, contendo uma introdução aos conteúdos e exemplos advindos da prática educativa, utilizando ou não o GeoGebra, de modo a favorecer a interação entre o ministrante e os cursistas.
II	17/03 Síncrona	-Conceituar Modelagem matemática no ensino. -Modelar logotipos no GeoGebra.	Modelagem matemática no ensino e a modelagem de logotipos figurais.	Foram apresentados slides com animação, telas do software GeoGebra, e a confecção dos logotipos como uma forma de modelagem matemática no ensino.
III	24/03 Assíncrona	-Elaborar modelagem de logotipos pelo cursista	Modelagem de logotipos pelo cursista	Foram realizadas orientações individuais para elaboração no GeoGebra dos logotipos escolhidos pelos cursistas.

Fonte: Elaboração das autoras

As atividades síncronas foram organizadas na forma de encontros semanais por meio da plataforma Google Meet de reuniões online. A professora compartilhava a tela com apresentações de slides do Powerpoint ou com as janelas do software GeoGebra. O chat permanecia aberto para possibilitar interações com os cursistas. As cinco videoaulas foram gravadas e disponibilizadas no Classroom – nesse sistema também foram postadas tarefas, materiais do GeoGebra, textos, questionário avaliativo e as modelagens realizadas pelos cursistas.

Conforme mencionado, este trabalho descreve o processo de modelagem referente aos logotipos figurais – que aconteceu no segundo e no terceiro módulo do curso. Os dados colhidos para análise basearam-se nas construções e nos protocolos arquivados no GeoGebra e nas ações e exposições verbais da ministrante do curso – identificáveis nas videoaulas gravadas, já que ela tecia comentários acerca dos comandos do software durante o processo de modelagem. Seguem, assim, a descrição das ações realizadas, bem como a análise de: (a) as fases, (b) os níveis de formação conceitual exigidos e (c) as habilidades geométricas requeridas no processo de modelagem de logotipos figurais.

5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO PROCESSO DE MODELAGEM DE LOGOTIPOS FIGURAIS

No início da aula planejada para a realização das modelagens, a ministrante apresentou os logotipos (Figura 3) e informou que iria modelar, a título de exemplo e como forma de explorar conceitos e habilidades, apenas os cinco primeiros logotipos.

Figura 3: Logotipos figurais apresentados pela ministrante
Fonte: Elaboração das autoras

Nota-se que a ministrante mostrou logotipos que poderiam ser reconhecidos como situações-problema no contexto dos logotipos, o que caracterizaria a "interação" como primeira fase da modelagem matemática de acordo com Biembengut e Hein (2007).

Ao escolher o Logotipo 1 da Figura 3 para iniciar a apresentação, a ministrante optou por uma situação em que a matematização – segunda fase do processo – iria requerer conceitos e procedimentos de construção menos complexos. Nessa fase, o modelador estabelece uma linguagem matemática por meio da construção que é realizada com os comandos do software. A escolha dos comandos pode depender do nível de formação conceitual do modelador, assim como de suas habilidades geométricas.

A ministrante copiou e colou o logotipo escolhido na área geométrica do GeoGebra, aumentou a transparência da figura para que ficassem visíveis o eixo e a malha quadriculada e informou que faria a modelagem de duas maneiras. Assim, na primeira sequência (Figura 4a), uma parte foi construída com a utilização do comando polígono – procedimentos baseados no reconhecimento de pontos e segmentos. Já na segunda sequência utilizada (Figura 4b), foram identificadas as medidas, as retas paralelas e perpendiculares (que foram construídas com apoio nos eixos horizontal vertical), os pontos de intersecção entre as retas (que deram origem aos vértices do polígono). Considera-se que ambas as sequências estavam condizentes com o Nível 2 de formação conceitual, em que acontece o estabelecimento de relações entre propriedades das figuras. Note-se que o modelo encontrado na Figura 4b não tinha a forma exata do logotipo: a professora informou que, nessa fase, é possível o aluno validar o modelo, ou seja, verificar se as representações estão adequadas para concluir o processo – o que caracteriza a terceira fase do processo de modelagem segundo Biembengut e Hein (2007). No caso do desenho mostrado (https://www.geogebra.org/m/ymdykx9b), pode-se sugerir que a reta perpendicular deva passar no ponto (5.2,0) e não no ponto (5,0).

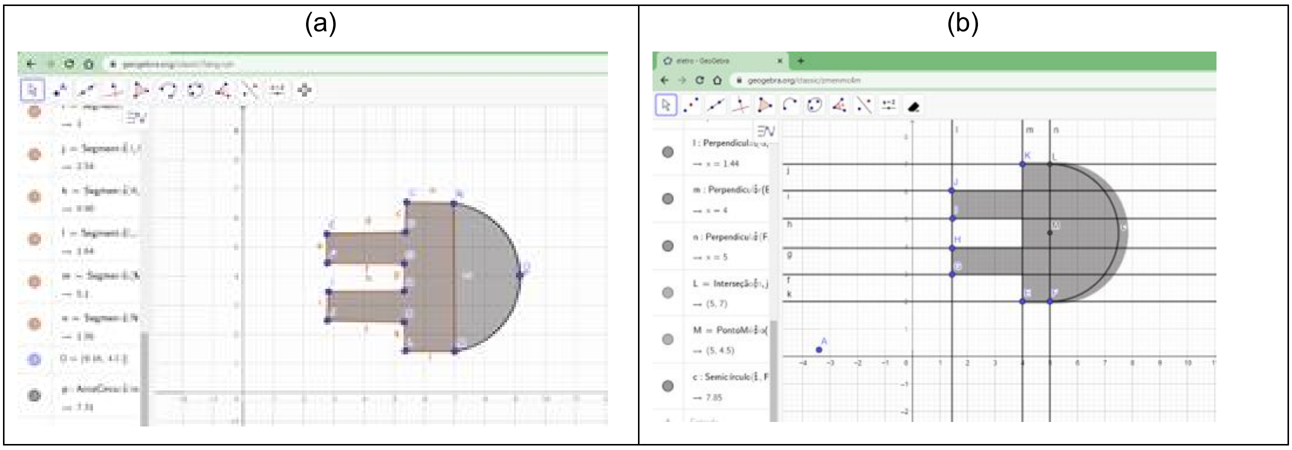


Figura 4: Duas sequências possíveis para a construção do Logotipo 1
Fonte: Elaboração das autoras

É possível perceber o avanço nos níveis de pensamento geométrico requeridos para a sequência de modelagens adotada pela ministrante. O Logotipo 2 requereu uma sequência lógica de construção (Figura 5) que caracteriza a habilidade gráfica e um avanço no Nível 2 de formação conceitual, já que não bastava ao aluno reconhecer as figuras e suas propriedades (por exemplo, a figura é formada por três paralelogramos), mas era necessário identificar as posições dos paralelogramos, o eixo vertical de simetria, o triângulo equilátero (obtido pela intersecção dos paralelogramos) e assim planejar a sequência lógica de construção.

Evidentemente, outros caminhos poderiam ter sido tomados; no entanto, nesse processo de matematização, a professora optou por construir o triângulo tendo o eixo y como eixo de simetria. Mesmo sem a identificação de ângulos de 60°, a obtenção do ponto F pela reflexão do ponto E em relação ao eixo y, a construção de várias paralelas e a obtenção dos pontos de intersecção entre as retas garantiram a identificação dos vértices e a posterior construção dos paralelogramos (https://www.geogebra.org/m/wj4c4sbk).

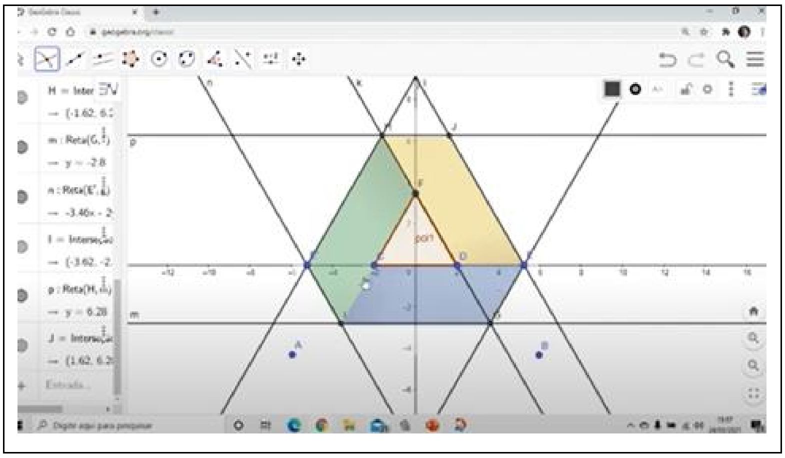


Figura 5: Passos da construção do Logotipo 2
Fonte: Elaboração das autoras

Com base em Biembengut e Hein (2007), considera-se que, na fase de interação da modelagem de logotipos, é necessária a percepção da figura geométrica – o que requer a habilidade visual, conforme descrita por Hoffer (1981). Reconhecer as propriedades rotuladas em uma figura, formar imagens mentais e manipulá-las mentalmente são as características principais dessa habilidade visual. É o que parece requer o Logotipo 3: a identificação do círculo e das de três partes é essencial para o início da modelagem (Figura 6). Apesar de identificar o círculo dividido em três partes iguais, a professora optou por não iniciar a construção a partir dessa percepção; afirmou que havia “enxergado” um triângulo equilátero “invertido” e que iniciaria a sequência lógica de passos a partir dessa figura: construção do triângulo equilátero, construção das mediatrizes, determinação da intersecção das mediatrizes (centro do triângulo ou centro da circunferência circunscrita) e construção da circunferência. A Figura 6 mostra o traçado das mediatrizes que dividiu a circunferência em seis partes iguais; utilizando apenas três dessas partes, foram determinados os pontos que a dividiram em três partes – esses pontos foram os vértices dos três triângulos que formaram a parte interna do círculo (https://www.geogebra.org/m/cw9yx5fz) .

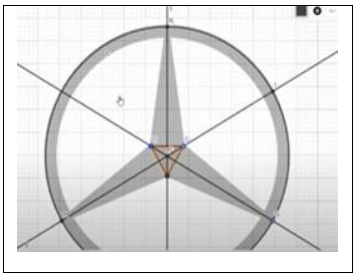


Figura 6: Passos da construção do Logotipo 3
Fonte: Elaboração das autoras

Estratégia diferente foi empregada no Logotipo 4 (Figura 7): a divisão da circunferência deu-se com a construção de um ângulo central de 120°. A professora se valeu de um desenho auxiliar, um rascunho, apenas para mostrar que ela havia identificado os três pontos de tangência e que por eles seriam traçadas as retas tangentes ao círculo. O primeiro ponto na circunferência foi encontrado por meio da construção do ângulo e o segundo por meio da reflexão em torno do eixo y. A Figura 7 mostra dois detalhes da tela em que a professora explicou sua estratégia e o modelo ainda em construção (https://www.geogebra.org/classic/p3s9tmfn).

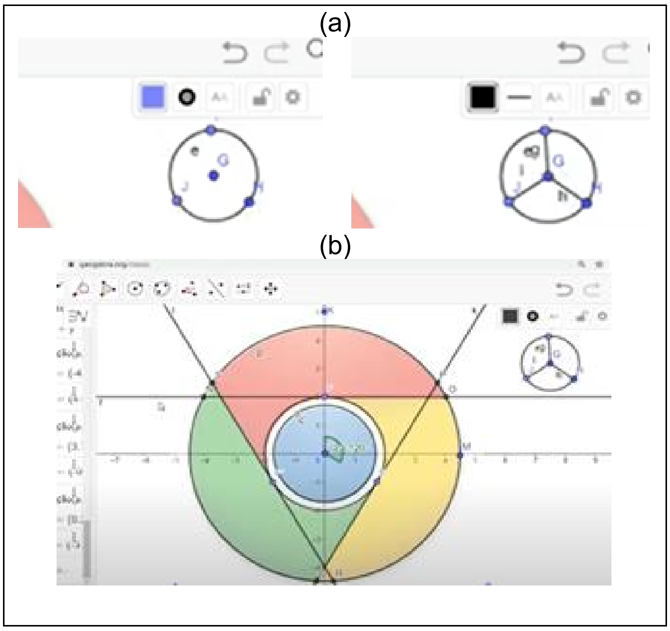


Figura 7: Logotipo 4: (a) Esboços mostrando a divisão da circunferência e (b) logotipo em construção
Fonte: Elaboração das autoras

Evidentemente, o colorido do desenho ajudou na percepção da coroa circular dividida em três partes iguais; já a identificação das retas tangentes é característica do Nível 2 de formação conceitual.

Nível mais elevado é necessário para a construção do modelo do Logotipo 5. A identificação das elipses constantes na figura não requer decomposição de formas, mas a construção delas exige uma sequência lógica de procedimentos amparados no conceito de elipse. Em aula anterior, a professora havia explorado a elipse como o lugar geométrico dos pontos P do plano para os quais é constante a soma das distâncias a dois pontos fixos $F1$ e $F2$ desse plano. Para mostrar a relação $d\,(PF1) + d\,(PF2) = 2a$, foram traçadas duas circunferências de raios a e $1 - a$ e de centros $F1 = (-5{,}0)$ e $F2 = (5{,}0)$, respectivamente; determinou o ponto P de intersecção entre elas e fez variar o valor de *a* por meio do controle deslizante (em que foi indicado um intervalo de 0 a 10); assim, o rastro deixado pelo ponto P descreve a elipse com os elementos: eixo maior *2a*, eixo menor *2b* e distância focal *2c*. Para planejar a sequência de construção, a ministrante utilizou os eixos *x* e *y* para determinar os centros e os pontos que indicariam os eixos maior e menor de cada elipse e então calculou as equações de seis elipses, classificadas como externas (E_1, E_2 e E_3) e internas (I_1, I_2 e I_3) conforme mostra o Quadro 3.

Quadro 3: Elipses utilizadas na modelagem do Logotipo 5

	Elipses externas	
E_1 Centro O = (0,0), A_1 = (-7,0), A_2 = (7,0), B_1 = (0, 4.46), B_2 = (0, -4.46) equação do eixo maior y=0 equação do eixo menor x=0 a=semi-eixo maior=7 b=semi-eixo menor=4.46 $a^2 = b^2 + c^2$ ® $7^2 = 4{,}46^2 + c^2$ c =5.39 assim, F_1 = (-5.39, 0) e F_2 = (5.39,0)	E_2 Centro O = (0, 2.23), A_1= (-5.32, 2.23), A_2 = (5.32, 2.23), B_1 = (0, 0), B_2 = (0, 4.46) equação do eixo maior y=2.23 equação do eixo menor x=0 a=semi-eixo maior=5.32 b=semi-eixo menor=2,23 $a^2= b^2 + c^2 \Rightarrow 5.32^2 = 2.23^2 + c^2$ $\Rightarrow c = 4.83$ assim, F_1 = (-4.83, 2.23) e F_2 = (4.83, 2.23)	E_3 Centro O = (0, 0), A_1 = (0, -4.02), A_2 = (0, 4.02), B_1 = (-1.78, 0), B_2= (1.78, 0) equação do eixo maior y=0 equação do eixo menor x=0 a=semi-eixo maior=4.02 b=semi-eixo menor=1.78 $a^2= b^2 + c^2 \Rightarrow 4.02^2 = 1.78^2 + c^2$ $\Rightarrow c = 3{,}6$ assim, F_1= (0, -3.6) e F_2= (0, 3.6)
	Elipses internas	
I_1 Centro O= (0,0), A_1= (-6,0), A_2= (6,0), B_1= (0, 4), B_2= (0, -4) equação do eixo maior y=0 equação do eixo menor x=0 a=semi-eixo maior=6 b=semi-eixo menor=4 $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 6^2= 4^2+c^2 \Rightarrow c=4.47$ assim, F_1 = (-4.47, 0) e F_2 = (4.47,0)	I_2 Centro O= (0, 2.52), A_1= (-4, 2.52), A_2= (4, 2.52), B_1= (0, 1.07), B_2= (0, 3.96) equação do eixo maior y=2.52 equação do eixo menor x=0 a=semi-eixo maior=4 b=semi-eixo menor=1.44 $a^2= b^2 + c^2 \Rightarrow 4^2 = 1.44^2 + c^2 \Rightarrow c = 3.73$ assim, F_1= (-3.73, 2.52) e F_2= (3.73, 2.52)	I_3 Centro O= (0, 0.31), A_1= (0, -2.48), A_2= (0, 3.1), B_1= (-1, 0.31), B_2= (1, 0.31) equação do eixo maior y=0.31 equação do eixo menor x=0 a=semi-eixo maior=2.79 b=semi-eixo menor=1 $a^2= b^2 + c^2 \Rightarrow 2.79^2 = 1^2 + c^2 \Rightarrow c = 2{,}6$ assim, F_1= (0, -2.91) e F_2= (0, 2.91)

Fonte: Elaboração das autoras

A partir da identificação dos focos, as elipses foram então traçadas de modo a modelar o Logotipo 5 (https://www.geogebra.org/m/jfuwt5n5), mostrado na Figura 8.

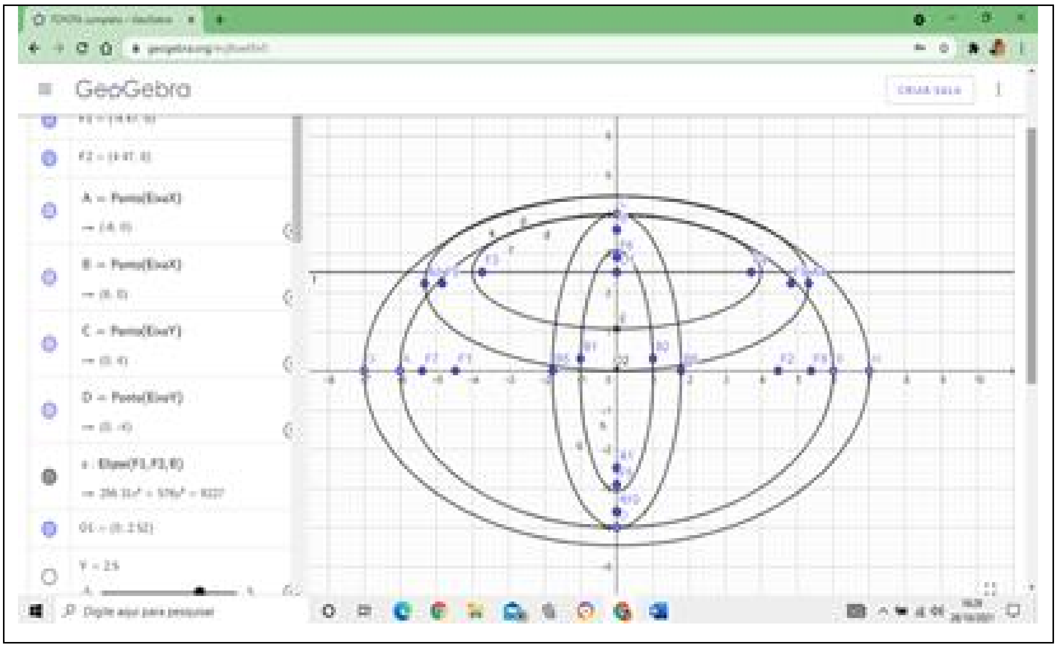


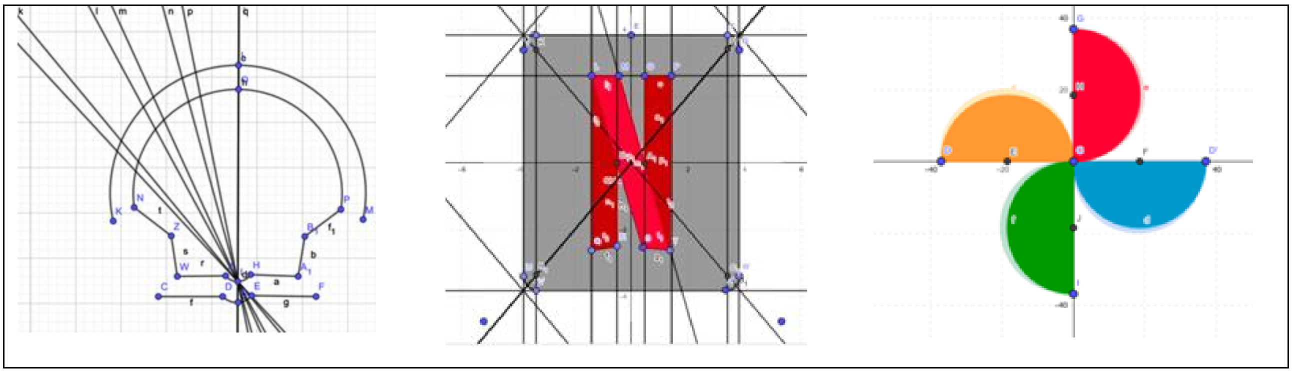
Figura 8: Modelagem do Logotipo 5
Fonte: Elaboração das autoras

Não há dúvidas de que para construir as elipses foi necessário determinar suas equações, o que requer conhecimentos relativos à geometria analítica – que não estão no escopo do modelo teórico de Van Hiele e nem descritos por Alan Hoffer. No entanto, a busca pelos conceitos e procedimentos envolvidos caracteriza a fase de matematização e de validação do modelo, etapas do processo de modelagem que foram identificadas no processo. Convém esclarecer que o modelo mostrado na Figura 8 ainda não se encontra em sua aparência final, já que necessita ter o preenchimento com as cores adequadas.

Após realizar a modelagem dos cinco logotipos apresentados, a ministrante informou que cada cursista deveria escolher um logotipo qualquer – desde que fosse adequado ao processo – e que deveria iniciar o processo; agendou orientações individuais que foram realizadas no Google Meet. A Figura 9 ilustra alguns logotipos que foram modelados por cursistas[6] em estágios diferentes de elaboração.

[6] Não serão descritos neste texto os processos de obtenção dos modelos pelos cursistas.

Figura 9: Modelos dos cursistas



Fonte: Elaboração das autoras

6 DISCUSSÃO

Considerar a modelagem matemática como um ambiente de aprendizagem, conforme concebe Barbosa (2007), parece ser uma opção adequada para explicar as tomadas de decisão ocorridas durante a realização do curso de extensão direcionado a professores e estudantes de matemática. Cada logotipo modelado requereu conhecimento de conceitos e de procedimentos em geometria num contexto aparentemente motivador de aprendizagem.

Observando as fases de elaboração do modelo conforme definidas por Biembengut e Hein (2007), não há como negar a importância da primeira etapa da modelagem: a escolha do logotipo em que se reconhece a situação-problema, seja a de solução mais simples (como o Logotipo 1), seja aquela em que a solução dependia da geometria analítica (Logotipo 5). Considera-se que a escolha do logotipo pode estar ligada, entre outros fatores, ao nível de formação conceitual do professor; entre os cursistas, alguns eram professores dos anos iniciais do ensino fundamental e outros do ensino superior, o que resultou em diversos tipos de logotipos.

A fase da matematização é considerada por Biembengut e Hein (2007) como a mais complexa e desafiante de todo processo de modelagem. Após a identificação das figuras geométricas que compõem o logotipo, é necessário avançar na leitura das propriedades e das relações; por exemplo, relacionar o centro do desenho com o centro da circunferência e com o centro de um triângulo equilátero (Figura 6). É necessário, também, tomar várias decisões: o caminho da construção, os comandos mais adequados do GeoGebra, as medidas de lados e de ângulos, as figuras auxiliares e os rótulos que devem ser ocultados no desenho etc. Assim, o modelador apresenta como solução uma composição de figuras geométricas – que podem ser complementadas com colorido – que permitem representar, da melhor maneira possível, o logotipo escolhido.

Considera-se que todas as situações aqui descritas requereram habilidades visuais (para reconhecer as simetrias e as figuras compostas), verbais (para a escolha daqueles comandos do GeoGebra dados em palavras), gráficas (para a elaboração do desenho) e lógicas (para sequenciar os passos da construção geométrica). Todas as ações realizadas foram embasadas no Nível 2 e no Nível 3 de formação conceitual – já que havia necessidade de relacionar propriedades das figuras geométricas que compunham os desenhos.

Evidentemente, ao se reconhecer o logotipo como um problema a ser resolvido, já se antecipa, de certo modo, a dificuldade para a formulação, ou seja, para a identificação das figuras e das relações entre elas, bem como para o estabelecimento de hipóteses acerca da sequência de passos a serem empregados na construção do modelo. Ao se esboçar o modelo, o problema passa a ser resolvido com a construção em si, o que exige não apenas o conhecimento matemático, mas também o domínio dos comandos do software GeoGebra. A verificação do quanto o modelo se aproxima da situação real e a reprodução da sequência de construção seguindo os protocolos gravados no software contemplam o processo de validação do tipo de modelagem aqui apresentado.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme mencionado, a primeira justificativa para a elaboração do curso de extensão surgiu da nossa experiência com formação de professores: considera-se que estes devem dominar os conceitos e procedimentos referentes à geometria básica, mas também conhecer certos aspectos acerca da aprendizagem do tema. Assim, amparados na Psicologia da Educação Matemática, vários assuntos foram tratados durante o curso, como alguns pressupostos da aprendizagem significativa[7], a classificação dos conteúdos escolares em conceituais, procedimentais e atitudinais[8] e alguns elementos da construção do espaço representativo da criança[9]. Foi dado destaque aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico e às habilidades geométricas nas perspectivas de Van Hiele e de Alan Hoffer e optou-se por organizar o curso de modo que o professor se colocasse ora como aluno – realizando as tarefas propostas e modelando o logotipo –, ora como docente

[7] Com base em Ausubel (2000).
[8] Com base em Pozo (1998).
[9] Com base em Piaget & Inhelder (1993).

– refletindo acerca do desenvolvimento do pensamento geométrico e sobre metodologias adequadas para o ensino da geometria.

Ao ser desafiado na tarefa de modelagem matemática proposta pelo curso, o professor pode autoavaliar seus conhecimentos e identificar graus distintos de formação conceitual e tipos de habilidades mais requeridos para cada logotipo escolhido. Pode também avaliar suas aulas de geometria no que tange à sequência de conteúdos e à forma de abordá-los levando em consideração o desenvolvimento dos alunos quanto aos níveis de pensamento geométrico e quanto às habilidades quem em geral são necessárias para o desempenho em tarefas escolares.

Uma segunda justificativa amparou-se na necessidade de os professores dominarem alguns recursos metodológicos para o ensino da geometria. A modelagem matemática, na perspectiva adotada neste trabalho, pode se constituir em um recurso altamente motivador para a aprendizagem da geometria, já que permite aos alunos problematizar, formular matematicamente e resolver as situações, além de validar e divulgar seus modelos. Já a apresentação das potencialidades do GeoGebra para o ensino de geometria básica, tanto plana como espacial, pode ter incentivado os professores a utilizar esse recurso em aulas remotas ou presenciais.

O relato exposto neste trabalho limitou-se a descrever e analisar a atividade de modelagem de logotipos figurais nos itens propostos e espera-se que possa incentivar os professores a conhecerem com mais profundidade os temas teóricos envolvidos, as metodologias adotadas e os recursos tecnológicos para o ensino de geometria.

REFERÊNCIAS

Almeida, C. G., Gomes, L. P. S. & Madruga, Z. E. F. (2020). Modelagem Matemática e Resolução de Problemas na Educação: um panorama de pesquisas recentes. *Educação Matemática Debate*, v. 4, 1-18. Recuperado de https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/2070/2847 .

Amorim, L.P. (2019). *Proposta de formação continuada para professores de matemática na perspectiva da educação matemática: investigação com o GeoGebra nas aulas de matemática.* (Dissertação de Mestrado em Educação para a Ciência e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Ausubel, D.P. (2000). *The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Barbosa, J. C. (2007). A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework. In: Barbosa, J. C., Caldeira, A. D.& Araújo, J. L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. (pp.161-174), Recife: SBEM, 2007.

Biembengut, M. S.; Hein, N. (2007). *Modelagem Matemática no Ensino.* 4ª. ed. São Paulo: Contexto.

Boiago, C. E. P. (2015). *Área de figuras planas: uma proposta de ensino com Modelagem Matemática.* (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal de Uberlândia.

Braga, R. M. (2020). Atividade de modelagem matemática com o uso do GeoGebra para o ensino de curva senoidal. *Rematec,* v. 15 (35), 63-78. Recuperado de http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/286

Brito, M. R. F. (2001). Contribuições da Psicologia Educacional à Educação Matemática. In Brito, M. R. F. (org). *Psicologia da educação Matemática*. *Teoria e Pesquisa.* (pp.49-67). Florianópolis: Insular

Gonçalves, T. C., Ferreira, C. C., Ferreira, V. L. D. & Menegais, D. A. F. N. (2020). Identificação de lacunas no processo de aprendizagem dos conteúdos de geometria no ensino médio pelo método de Van Hiele. *REVEMAT*, v. 15 (2), 1-20. Recuperado de https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/74525 .

Heck, M.F. (2020). Ensino e Aprendizagem de Geometria na Educação Básica: análise dos artigos publicados nos anais do V, VI e VII SIPEM. *Ensino da Matemática em Debate,* v. 7, (3), 123-143. Recuperado de https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/48734

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher,* v.74 (1), 11-18.

Leite, N. M., Lima, E. G. O. & Carvalho, A. B. G. (2020). Os professores e o uso de tecnologias digitais nas aulas remotas emergenciais, no contexto da pandemia da Covid-19 em Pernambuco. *EM TEIA*, v. 11 (2), 1-15. Recuperado de https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/viewFile/248154/pdf .

Marmitt, R. K. R. & Bonotto, D. L. (2020). Modelagem Matemática na Educação Matemática e Formação Continuada de Professores: caminhos para o desenvolvimento profissional. *Educação Matemática Debate*, v. 4, 1-24. Recuperado de https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/2025/2706

Menezes, A. S., Ferro, D. & Rocha, J. S., Silva, E. (2021). Formação do professor no ensino da Matemática em tempos de isolamento social no ensino híbrido: uma revisão sistemática. *Research, Society and Development,* v. 10 (5). 1-12.

Passos, A. Q., Buriasco, R. L. & Soares, M. T. C. (2019). Ideias de Van Hiele e Educação Matemática Realística: algumas aproximações. *Bolema,* v. 33 (65), 1533-1548. Recuperado de https://www.scielo.br/j/bolema/a/xRVzV6XspdxbpLwj5sGVKJD/?format=pdf&lang=pt

Piaget, J. & Inhelder B. (1993). *A representação do espaço na criança.* Tradução de Albuquerque.B.M., Porto Alegre: Artes Médicas.

Pozo, J.I. (1998). Aprendizagem e o ensino de conceitos. Em: Coll, C.; Pozo, J.I; Sarabia, B.; Valls, E. *Os conteúdos na Reforma*. Ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes. (Neves, B. A., Trad.). (pp. 17-72). Porto Alegre: Artes Médicas.

Silva, L. R. P. (2018). *Congruência de triângulos no GeoGebra: uma proposta didática para o ensino fundamental*. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal de Uberlândia.

Soares, D. S. Notare, M. R. & Moraes, M. F. (2020). Explorando uma colmeia: uma proposta de modelagem com o GeoGebra 3D. *RENOTE*, 18(2), 151–160. Recuperado de https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/110213

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education.* New York: Academic Press, 1986.

Viana, O. A. (2015). Avaliação dos desenhos de planificação de figuras geométricas no ensino básico. *Est. Aval. Educ*., São Paulo, v. 26, n. 63, p. 838-871. Recuperado de Dialnet-AvaliacaoDosDesenhosDePlanificacaoDeFigurasGeometr-5619750.pdf.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Modelagem de Logotipos Figurais no Geogebra: Uma Análise do Processo e Dos Conceitos e Habilidades Requeridos

Odalea Aparecida Viana
Doutorado em Educação
Professora visitante da Universidade Federal do ABC e aposentada e voluntária da Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Uberlândia, MG, Brasill
odaleaviana@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4782-6718

Giselle Alves de Freitas Gabriel
Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática/UFU
Professora da rede pública estadual de Ituiutaba, MG, Brasil
gisellealvesdefreitas@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0085-4140

Fernanda da Silva Teixeira
Licencianda em Matemática/UFABC
fernandateixeira.prof@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2338-1953

Endereço de correspondência do principal autor
Rua B, n º 10, Vila Silvia, CEP 12460-000, Campos do Jordão, SP, Brasil

AGRADECIMENTOS
Nada consta

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: O.A. Viana, G.A.F. Gabriel, F. S. Teixeira
Coleta de dados: G.A.F. Gabriel
Análise de dados: O.A. Viana,
Discussão dos resultados: O.A. Viana
Revisão e aprovação: O.A. Viana

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 12-04-2022 – Aprovado em: 10-07-2022