Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ASPECTOS DA PARÁBOLA E DA CATENÁRIA: UM ESTUDO À LUZ DA GEOMETRIA DINÂMICA

Aspects Of Parabola And Catenary: A Study In The Light Of Dynamic Geometry

Renata Teófilo de **SOUSA**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, Brasil
rtsnaty@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5507-2691

Francisco Régis Vieira **ALVES**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, Brasil
fregis@ifce.edu.br
http://orcid.org/0000-0003-3710-1561

Maria José Araújo **SOUZA**
Universidade Estadual Vale do Acaraú, Sobral, Brasil
mazesobral@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0001-5507-2691

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Os estudos sobre a parábola nos livros-texto é algo corriqueiro, diferente da curva catenária, mesmo ambas tendo certas similaridades. A catenária foi alvo de grandes discussões dentro da História da Matemática e da evolução do Cálculo Diferencial, mas a discussão sobre ela ainda é limitada nos livros-texto utilizados nas licenciaturas e raramente é mencionada no decorrer da educação básica. O objetivo deste trabalho é realizar um estudo destas curvas, apresentando suas similaridades e diferenças com o aporte do software GeoGebra para sua visualização, manipulação e compreensão matemática. Para tal, utilizamos como metodologia a Engenharia Didática (ED) em suas duas primeiras fases, análises preliminares e análise a priori, em que buscamos fazer um levantamento histórico, epistemológico e didático sobre estas curvas, bem como apresentar uma construção no GeoGebra como proposta didática, visando subsidiar a metodologia docente ao versar sobre este tema com amparo da tecnologia digital.

Palavras-chave: Parábola, Catenária, Engenharia Didática, GeoGebra

ABSTRACT

The studies on the parabola in textbooks is something common, different from the catenary curve, even though both have certain similarities. The catenary was the subject of great discussions within the History of Mathematics and the evolution of Differential Calculus, but the discussion about it is still limited in textbooks used in teaching degrees and is rarely mentioned in the course of basic education. The objective of this work is to carry out a study of these curves, presenting their similarities and differences with the contribution of the GeoGebra software for its visualization, manipulation, and mathematical comprehension. To this end, we used Didactic Engineering (DE) as a methodology in its first two phases, preliminary analysis and a priori analysis, in which we seek to carry out a historical, epistemological, and didactic survey on these curves, as well as to present a construction in GeoGebra as a didactic proposal, aiming to subsidize the teaching methodology when dealing with this theme with the support of digital technology.

Keywords: Parabola, Catenary, Didactical Engineering, GeoGebra

1 INTRODUÇÃO

A parábola e a catenária, apesar de sua semelhança gráfica até certo ponto, são conceitos matemáticos distintos e ambas as curvas possuem representações matemáticas distintas, oriundas de diferentes tipos de expressões algébricas. Entretanto, à parábola é concedida uma atenção maior pelos livros didáticos. No contexto das funções, na Educação Básica especialmente, a definição de parábola é apontada em grande parte das obras como o gráfico da função quadrática.

Contudo, esse também é o contexto em que a parábola é mais explorada, pouco levando em conta que esta curva é uma secção cônica ou mesmo abordando-a do ponto de vista analítico (Siqueira & Silva, 2019). Neste nível de ensino, raramente os livros mencionam a diferença entre uma parábola e uma catenária (Louzada, 2013; Cerqueira, 2015; Sousa *et al*., 2022). Além disso, a própria catenária, embora seja uma curva com diversas aplicações na engenharia, arquitetura e telecomunicações, pouco (ou nunca) é estudada, nem mesmo nos cursos de Licenciatura em Matemática no contexto brasileiro, possivelmente devido à sua equação analítica (Barbosa, 2013).

Entretanto, ambas as curvas têm suas particularidades e importância. A parábola, com sua propriedade refletora, é capaz de irradiar a luz ou o som, o que permite seu uso em telescópios, antenas parabólicas, faróis e refletores, além de possibilitar ao campo da Arquitetura a concepção de ambientes com características acústicas apropriadas para auditórios, teatros ou igrejas (Eves, 2011; Talavera, 2008). Já a catenária e sua respectiva equação, segundo Talavera (2008), pode ser considerada como uma das mais importantes soluções dentre os problemas desafiadores da história do Cálculo. A equação gerada pela curva catenária juntamente do desenvolvimento do Cálculo Diferencial, teve uma forte influência para o desenvolvimento das funções hiperbólicas.

Como apontam Maioli, Seifert, Brandt e Rodrigues (2012), apesar da presença marcante da matemática em nosso cotidiano, por vezes é difícil mostrar aos estudantes de maneira clara as aplicações reais e interessantes dos assuntos estudados na escola, ou mesmo apresentar situações que envolvam visualizações geométricas bi e tridimensionais sem um aporte tecnológico. Com base nisso, trazemos como sugestão para a compreensão das particularidades e das diferenças entre estas curvas sua exploração com auxílio do *software* GeoGebra.

O *software* GeoGebra é um ambiente de Geometria Dinâmica que permite a criação, visualização e manipulação de representações de conceitos matemáticos, sendo um ambiente que trata a Geometria, a Álgebra e o Cálculo de forma interligada, entre outras possibilidades. Assim, o *software* pode propiciar a descoberta de relações entre os objetos que compõem uma construção geométrica. Segundo Alves (2019), dado o potencial do *software* GeoGebra para a resolução de problemas, manipulação, visualização e compreensão de conceitos, o professor pode estimular o envolvimento do aluno em uma exploração dinâmica de propriedades numéricas, algébricas e geométricas, desenvolvendo a visualização, percepção e intuição, essenciais para a evolução da sua aprendizagem.

Outro ponto balizador deste estudo é que a parábola e a catenária são tópicos necessários na graduação no campo das ciências exatas, em disciplinas como Cálculo I (Alhadas, 2013). Desta maneira, ao ter um conhecimento prévio sobre o tema, os alunos possivelmente enfrentariam menos dificuldades ao se depararem com estes assuntos e suas expressões algébricas, ao levar conhecimentos prévios das mesmas.

Assim, considerando a importância deste tema e visando a possibilidade de uma abordagem que articule estas curvas, o objetivo deste trabalho é realizar um estudo da parábola e da catenária, apresentando suas similaridades e diferenças com o aporte do *software* GeoGebra.

Para isso, adotamos como metodologia para este trabalho a Engenharia Didática (ED), em suas duas primeiras fases – análises preliminares e análise *a priori* – em que buscamos construir uma proposta de abordagem didática que sirva de subsídio metodológico ao docente para tratar deste tema em sala de aula. A ED foi escolhida por ser uma metodologia de pesquisa que viabiliza o surgimento de fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica. Esta metodologia foi concebida para a sistematização e organização de pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de conteúdos em Matemática (Artigue,1988; Almouloud & Coutinho, 2008).

Desta maneira, nas próximas seções abordamos, via Engenharia Didática, as análises preliminares, onde buscamos levantar aspectos históricos, epistemológicos e didáticos com relação à estas curvas, e a análise *a priori*, em que desenvolvemos uma construção que possibilita explorar as similaridades e diferenças entre a parábola e a catenária em sala de aula, sendo suporte ao docente de matemática.

2 ANÁLISE PRELIMINAR

Segundo Almouloud e Coutinho (2008), as análises preliminares de uma ED podem versar sobre um estudo que engloba vertentes como a epistemologia dos conteúdos visados, seu ensino usual e efeitos, as concepções, dificuldades dos alunos e obstáculos que permeiam a sua evolução, o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho, entre outros detalhes pormenorizados que dizem respeito especificamente ao objetivo de cada pesquisa.

No caso deste trabalho, buscamos elencar os aspectos históricos, epistemológicos e didáticos da parábola e da catenária, apontando suas características de ordem matemática e didática, bem como justificando como a tecnologia (GeoGebra) poderia facilitar a compreensão das duas curvas, compreendendo suas distinções de forma gráfica/geométrica.

2.1 A parábola

Menaecmus, (350 a.C.), foi o primeiro a tratar das secções cônicas, seccionando cones com planos perpendiculares à geratriz. Já Apolônio de Perga (225 a.C.), trouxe o estudo das curvas das secções cônicas a partir de superfícies cônicas duplas e retas, como utilizamos nos dias atuais. Apesar das cônicas serem conhecidas desde a antiguidade, seu estudo obteve notável relevância no século XVII, a partir dos trabalhos de Gérard Desargues (1593-1661), Blaise Pascal (1623-1662), Johannes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642) (Boyer, 2012; Eves, 2011).

As aplicações mais famosas das cônicas devem-se a Galileu (1564-1642), que chegou à conclusão de que a trajetória da bala de um canhão descreve uma parábola, bem como Kepler (1571-1630) e Newton (1643-1727), que constataram por meio de suas pesquisas que as órbitas dos planetas são elípticas. As teorias de Galileu foram confirmadas anos depois por Newton (1643-1727), a partir da Lei da Gravitação Universal. De acordo com Boyer (2012) tais descobertas possibilitaram conjecturar uma relação entre as cônicas e a natureza, como é o caso da órbita dos planetas e de alguns cometas no sistema solar, o que fez com que o estudo dessas curvas fossem além da Matemática, passando a interessar a outras ciências, como a Astronomia e a Física.

No caso da parábola, sua definição é apontada em Lima (2014, p. 115), que diz “sejam d uma reta e F um ponto fora dela. No plano determinado por d e F, chama-se parábola de foco F e diretriz d ao conjunto dos pontos equidistantes de d e F”. Tal definição pode ser representada pela Figura 1:

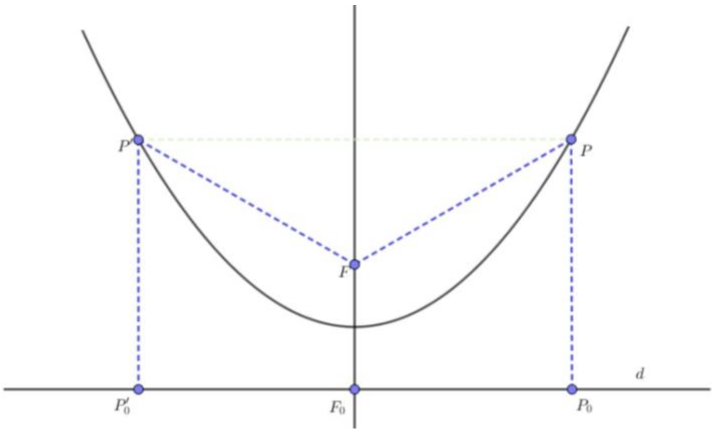

Figura 1: A parábola, segundo Lima (2014) - construção no GeoGebra
Fonte: Elaboração dos autores (2022)

Lima (2014) explica que o ponto P pertence à parábola de foco F e de diretriz d, pois a distância do ponto P à F é a mesma distância entre o ponto P e P_0. Ou seja, a $d(P, F) = d(P, P_0)$, com o segmento PP_0 perpendicular à diretriz d e a perpendicular FF_0 baixada do foco sobre a diretriz configura-se em um eixo de simetria. Os elementos essenciais de uma parábola são o foco (F), a diretriz (d), o vértice (V), o parâmetro (p), que representa a distância do foco à diretriz e a reta VF, que é o seu eixo de simetria.

A dedução da equação de uma parábola de foco F e diretriz d, com $p > 0$ representando a distância de F a d é demonstrada em Lima (2014) a partir do esquema mostrado na Figura 2:

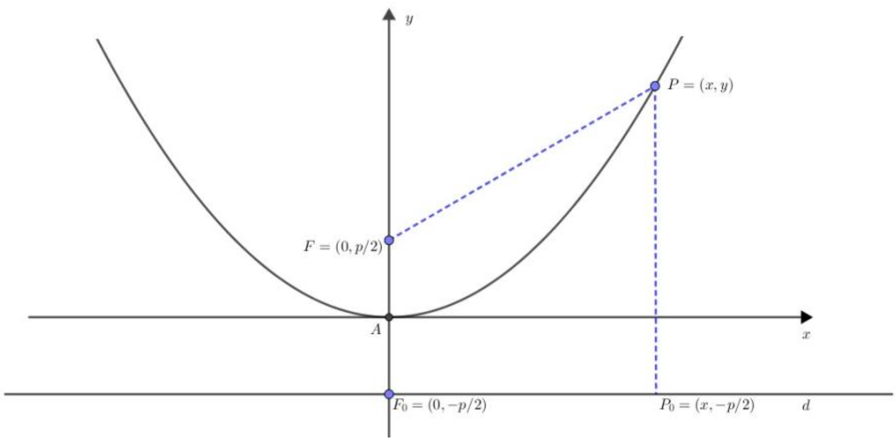

Figura 2: Dedução da equação da parábola
Fonte: Elaboração dos autores (2022)

Na dedução de Lima (2014) toma-se um sistema de eixos em que o vértice da parábola é a origem do sistema e o eixo vertical é a reta FF_0, eixo de simetria da parábola. Observe que o ponto F tem coordenadas $F = (0,\ \frac{p}{2})$ e a equação da diretriz d é $y = -\frac{p}{2}$. Se o ponto $P = (x, y)$ pertence à parábola, logo temos que $y \geq 0$. Sendo o eixo vertical o eixo de simetria e tendo $P = (x, y)$ pertencente à parábola, então $P' = (x, y)$ também pertence. Deste modo, sendo $P = (x, y)$ um ponto genérico da parábola. Temos que a distância de P à diretriz d é igual a $y + p/2$, enquanto a distância de P ao foco F é $\sqrt{x^2 + (y - p/2)^2}$. E como P é um ponto pertencente à parábola, temos que:

$$y\ +\ p/2 = \sqrt{x^2 + (y - p/2)^2}$$

em que, elevando ambos os membros ao quadrado e desenvolvendo a expressão, temos:

$$(y + \tfrac{p}{2})^2 = x^2 + (y - p/2)^2$$

$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}$$

e ao reduzir os termos semelhantes, obtemos a expressão:

$$x^2\ = 2\mathrm{py}\ \text{ou}\ \mathrm{y} = \frac{x^2}{2p}$$

que é a equação canônica da parábola com vértice na origem e eixo de simetria FF_0.

A parábola também pode ser representada como o gráfico de uma função quadrática, com equação explícita $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, ou escrita em função das coordenadas de seu vértice – a forma canônica – que a traz por meio da expressão $f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k$, com $a \neq 0$. Existem outras formas de representar a parábola, mas vamos nos restringir a estas representações, dada a limitação da extensão deste trabalho.

Do ponto de vista didático, a parábola é um tópico abordado de modo abreviado, em uma visão por um viés algébrico, como apontam as pesquisas de Cerqueira (2015), Macedo (2015) e Siqueira (2016). Ainda conforme os autores, raramente a parábola é tratada pelo prisma analítico na Educação Básica, pois não é um conteúdo priorizado no currículo. Também pouco se exploram seus aspectos e possibilidades geométricas ou abordam-na com uso da tecnologia, o que reverbera em dificuldades para os alunos que se deparam com este tópico no ensino superior (Siqueira & Silva, 2019).

Contudo, dada a relevância deste tópico de estudos, ressaltamos juntamente a importância de se oferecer possibilidades didáticas aos docentes para o trabalho com este tema. Nesse sentido, o uso de *softwares* ou aplicativos, no intuito de viabilizar o planejamento do docente e o dinamismo em suas aulas, incentiva a criação de um ambiente favorável ao desenvolvimento do aluno.

A tecnologia utilizada durante o estudo da matemática, em geral, tem enorme potencial para corroborar no processo de ensino e aprendizagem (Guedes, 2015; Abar, 2020). Assim, ambientes de Geometria Dinâmica como o GeoGebra, como sugerido neste trabalho, fornecem recursos valiosos para construir, visualizar, manipular e interpretar diversos assuntos da matemática – inclusive as parábolas –, auxiliando os processos mentais que ocorrem em sua aprendizagem.

2.1 A catenária

Catenária (do latim, *catena*) é a denominação da curva formada por um fio/corrente flexível, de densidade constante em todo seu comprimento, que é suspenso unicamente por seus dois extremos, sendo submetida apenas à força da gravidade (Yates, 1974; Maor, 2004; Lima & Miranda, 2021). Assim, a catenária, em um sentido estrito, não é uma curva, mas sim uma família de curvas, em que cada uma delas é determinada pelas coordenadas de seus extremos (x_0, y_0), (x_1, y_1) e por seu comprimento L.

Os primeiros estudos sobre a catenária iniciaram com Galileu Galilei, que tentou descrevê-la de forma analítica. Contudo, Galileu conjecturou, de modo equivocado, que a catenária seria a aproximação de uma parábola, em analogia à trajetória de um projétil (Yates, 1974; Talavera, 2008; Mendes, 2017; Lima & Miranda, 2021).

Entretanto, o fato de a parábola ter a forma de corda inextensível, submetida a carregamento vertical uniformemente distribuído, já era uma conclusão conhecida por Beeckman no ano de 1615 e, após o equívoco de Galileu, reencontrado por Huygens em 1646 (Pauletti, 2002). Huygens investigou a geometria da catenária, considerando-a uma curva assumida por uma corrente perfeitamente flexível e inextensível, com densidade linear uniforme, pendurada em dois ganchos não situados na mesma vertical, provando com argumentos da Física que a conjectura de Galileu estava errada, sem mostrar, no entanto, a expressão analítica da curva (Eves, 2011).

Ainda conforme Pauletti (2002), no ano de 1690, Jakob Bernoulli propôs um desafio para os cientistas da época, convidando-os a um concurso em busca da forma da catenária. Após um ano, Johann Bernoulli, Leibniz e Huygens resolveram o problema. Havia grande rivalidade entre os participantes do concurso, tornando difícil atribuir, de fato, a autoria da descoberta. Enquanto a solução de Huygens tomava por base alguns axiomas e teoremas da Geometria, Leibniz e Johann Bernoulli utilizaram o Cálculo, que na época era uma criação recente, como aponta a Figura 3:

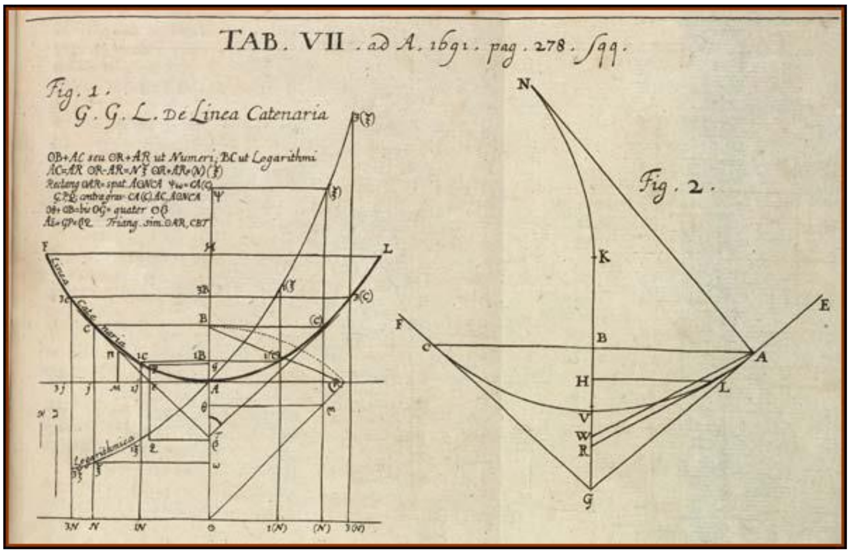

Figura 3: Solução de Leibniz e Johann Bernoulli (1691)
Fonte: Mata (2003, p. 3)

Sobre tal descoberta, na obra de Maor (2004), o autor explica que a catenária é uma curva tal que sua equação na notação moderna é $y = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}$, em que a é uma constante e depende dos parâmetros físicos da corrente, que são sua densidade linear e a tensão com a qual ela é segura, como mostra a obra de Simmons (1996, p. 378):

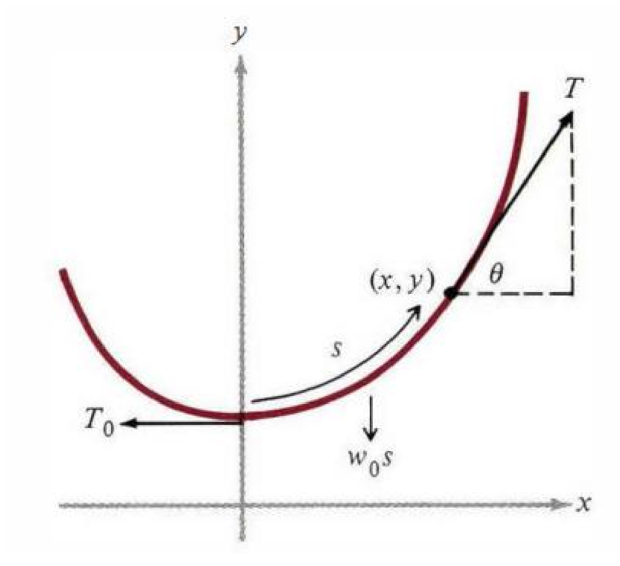

Figura 4: A catenária, segundo a obra de Simmons
Fonte: Simmons (1996, p. 378)

Porém, a equação hiperbólica que fornece a definição da curva catenária foi criada anos depois, em 1757, pelo matemático italiano Vincenzo Riccati (1707 – 1775). Jesuíta e professor de Matemática, Ricatti dedicou-se ao desenvolvimento das equações diferenciais, séries infinitas, quadraturas e funções hiperbólicas (Eves, 2011). De modo breve, podemos observar essa curva em fios de eletricidade pendurados em postes, em obras arquitetônicas entre outras situações.

Vista como função do cosseno hiperbólico, a catenária pode ser definida por uma curva gerada a partir de um cabo flexível, de densidade constante, pendurada entre dois extremos, sob a ação de seu próprio peso (gravidade), em que seu ponto mínimo é $(0, a)$ com $a > 0$, de equação igual a:

$$y = a.\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

e sua representação gráfica é similar ao esboço apresentado na Figura 5:

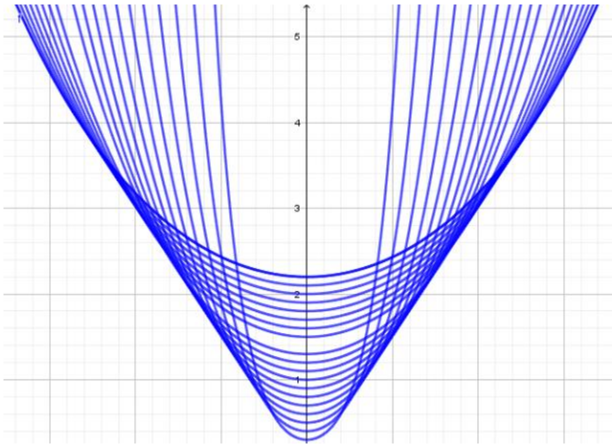

Figura 5: Curva catenária a partir da função do cosseno hiperbólico
Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Visualmente, a forma mais explícita de se diferenciar uma catenária de uma parábola é por meio de suas respectivas equações (Barbosa, 2013). No caso da catenária, sua equação é dada pela função hiperbólica e sua equivalente exponencial, ou seja,

$$f(x) = a.cosx\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2}.\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

em que onde a é uma constante determinada a partir da gravidade e do material da corda. Podemos alcançar a diferenciação da catenária quando a parte da curva entre seu ponto mais baixo e um ponto (x, y) encontra-se sob a ação de três forças, que são a tensão no ponto mais baixo, a tensão variável T_0 no ponto (x, y), agindo na direção da tangente, dada a flexibilidade do fio e uma força peso apontada para baixo, equivalente ao peso do fio entre o ponto mais baixo e um dado ponto (x, y).

Com base na obra de Simmons (1987) e amparadas por outras leituras, como Swokowski (1994) e Leithold (1994), podemos chegar à equação da catenária observando novamente a Figura 4 e a seguinte demonstração: Dados s como o comprimento de um arco entre um dado ponto e um ponto variável (x, y) e a medida W_0 a densidade linear do fio. Ao igualarmos o membro horizontal $T = T_0$ e T vertical ao peso do fio, temos que:

$$Tcos\theta = T_0 \text{ e } Tsen\theta = W_0 s$$

A tangente de θ pode ser obtida a partir do quociente das duas expressões, em que também se elimina a variável T:

$$tg\theta = \frac{W_0 s}{T_0}$$

ou, equivalentemente, $\frac{dy}{dx} = as$ em que $a = \frac{W_0}{T_0}$.

Derivando a expressão com relação à x e eliminando a variável s, obtemos a expressão (I):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{ds}{dx} - a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

que é a equação diferencial da catenária. A partir de um processo de integrações sucessivas e de uma variável auxiliar $v = \frac{dy}{dx}$, podemos determinar a equação diferencial da catenária. Ao substituirmos *v* na expressão (I), temos:

$$\frac{dv}{dx} = a\sqrt{1 + v^2}$$

e ao separar as variáveis e integrar ambos os membros, encontramos a expressão (II):

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \int a\, dx$$

que resulta em:

$$\left(\sqrt{1 + v^2} + v\right) = ax + c_1$$

Com $x = 0$, implica que $v = 0$ e $c_1 = 0$. Logo, a expressão pode ser reescrita como:

$$\left(\sqrt{1 + v^2} + v\right) = ax$$

Ao resolvermos a equação em v, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = v = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})$$

Integrando ambos os lados da igualdade:

$$y = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax}) + c_2$$

A constante c_2 pode ser igualada a zero, a depender da posição do eixo y. Assim, considerando a definição de cosseno hiperbólico, podemos reescrever a expressão como:

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right), a > 0$$

Esta demonstração algébrica é importante para a compreensão da curva catenária e de suas peculiaridades, servindo como base para estudos sobre este tópico. Inclusive, Yates (1974), sobre a função do cosseno hiperbólico, explica que ela desempenha um papel dominante nos circuitos de comunicação elétrica. “Por exemplo, o engenheiro prefere a forma hiperbólica conveniente à forma exponencial das soluções de certos tipos de problemas na transmissão" (p. 117).

Contudo, ressaltamos que, no início desta discussão comentamos sobre o equívoco de Galileu em sua tentativa de provar a identificação da catenária com a parábola. A partir desta expressão analítica, tal comparação torna-se mais viável. Observando a fórmula explícita da catenária, podemos refletir sobre o equívoco de Galileu e até que ponto é razoável confundir estas curvas. Inclusive, ressaltamos que Galileu tinha seus motivos para identificar a catenária com a parábola, pois, desenvolvendo $cosh(x)$ em série de Taylor, encontramos:

$$\begin{cases} e^{x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} \dots \\ e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} \dots \end{cases}$$

em que o cosseno hiperbólico é:

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + O(i)$$

que nos mostra que a equação da catenária corresponde à de uma parábola acrescida de um termo de quarta ordem, ou seja, o erro entre a parábola e a catenária da ordem de $\left(\frac{1}{2}\right)^4$. Portanto, próximo da origem, ambas as equações serão muito semelhantes.

3 ANÁLISE A PRIORI

Artigue, Douady e Moreno (1995) explicam que uma análise *a priori* procura especificar as possibilidades selecionadas (dentre as situações que se colocam em jogo no processo experimental), os valores das variáveis didáticas (microdidáticas ou macrodidáticas) que são produzidas a partir dessa seleção e o significado que os comportamentos esperados podem ter, levando em conta esses valores. Em complementaridade, Almouloud e Silva (2012, p. 27), explicam que nesta etapa da ED devem ser considerados os seguintes aspectos:

> - Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as características da situação adidática desenvolvida;
> - Analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o aluno, em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação;
> - Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem. (Almouloud & Silva, 2012).

Nesta etapa da ED, apresentamos uma proposta didática para a diferenciação entre a parábola e a catenária com uso do *software* GeoGebra, a partir do uso de seus recursos visuais e manipuláveis, onde assumimos a premissa de que a exploração visual e a manipulação algébrica/geométrica desta construção desenha-se como um elemento norteador na mediação didática do docente ao trabalhar com o referido tema. Segundo autor (ano, p.) “o professor poderá valorizar o papel da visualização, mediante a exploração do *software* GeoGebra, tendo em vista a aquisição de uma cultura matemática e o delineamento de hábitos intelectuais aplicáveis em outras situações”.

3.1 Construção das curvas no GeoGebra

Para a construção da parábola a partir de uma equação quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, criamos três controles deslizantes a, b e c que representam os parâmetros da função. Ao digitarmos na barra de entrada a expressão $y = a * x^2 + b * x + c$, obtivemos uma parábola, como mostra a Figura 6:

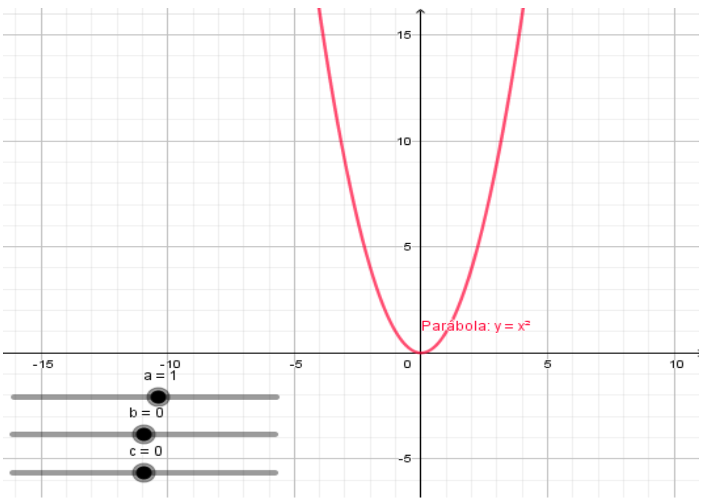

Figura 6: Construção da parábola
Fonte: Elaboração dos autores (2022)

Ao manipularmos os controles deslizantes a, b e c podemos observar o comportamento da parábola, como a posição e a abertura de sua concavidade, sua translação no eixo y, entre outros pormenores.

Para a construção da catenária, realizamos um processo similar ao da parábola, inserindo a equação $y = a.\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, que na janela de entrada deve ser digitada na forma $g(x) = a * cosh((x - b)/a)$. Ao digitarmos o parâmetro a nesta equação, automaticamente estamos adotando o mesmo controle deslizante a usado para a parábola. Após inserir a expressão, devemos nos deparar com o gráfico como na Figura 7:

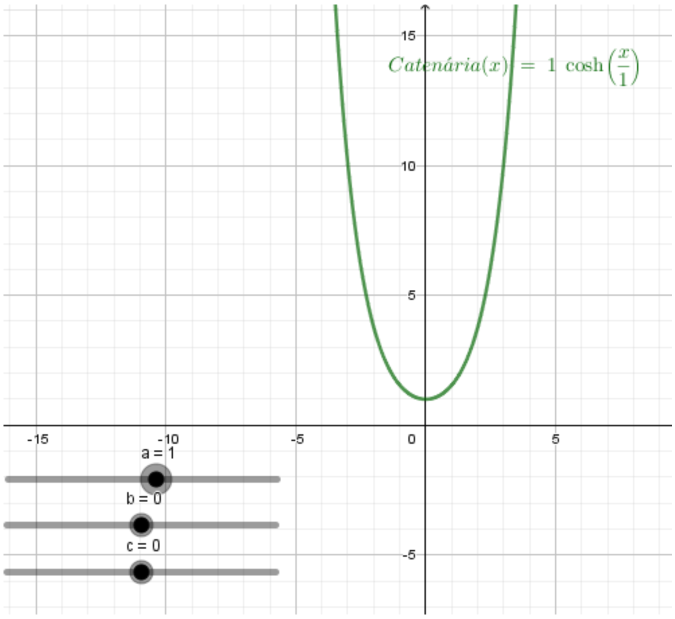

Figura 7: Construção da catenária no GeoGebra
Fonte: Elaboração dos autores (2022)

Ao manipularmos os controles deslizantes a e b temos, respectivamente, uma alteração na abertura da curva catenária e sua translação horizontal.

3.2 Comparativo entre as curvas

Se observarmos ambas as curvas juntas, com os mesmos valores para os parâmetros a e b e o parâmetro $c = 0$ (pois este só tem relação com a parábola), podemos ver que as curvas, apesar de pontos em comum, são diferentes, como mostra a Figura 8:

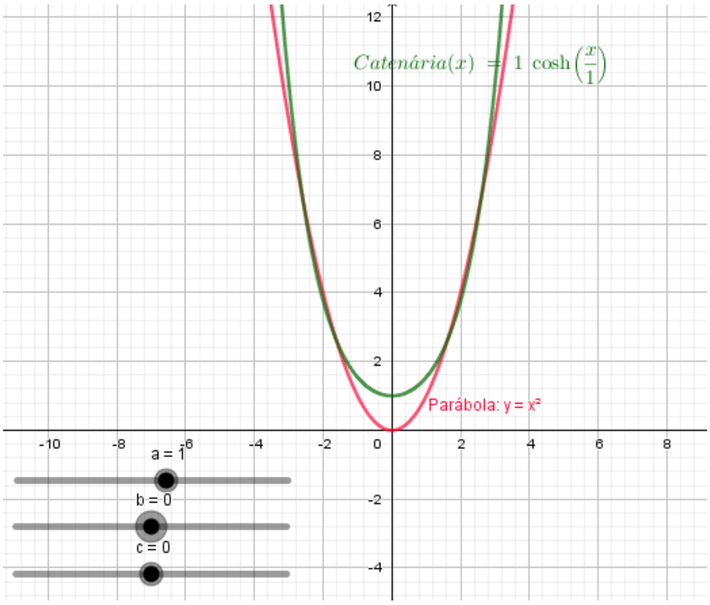

Figura 8: Comparativo entre a parábola e a catenária
Fonte: Elaboração dos autores (2022).

Podemos, a partir do movimento do parâmetro a, observar as famílias de parábolas e de catenárias, evidenciando as principais diferenças entre estas curvas. Para isso, utilizamos a função "Exibir rastro" no GeoGebra, como ilustrado nas Figuras 9 e 10:

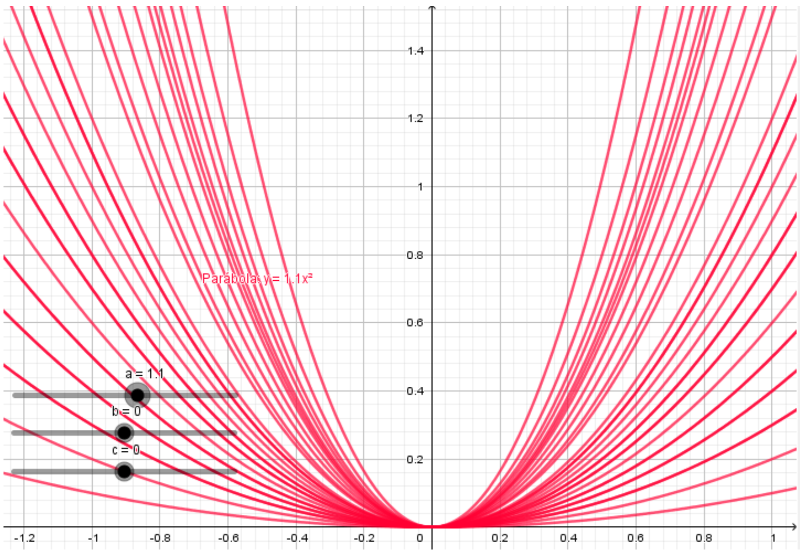

Figura 9: Famílias de parábolas construídas no GeoGebra
Fonte: Elaboração dos autores (2022)

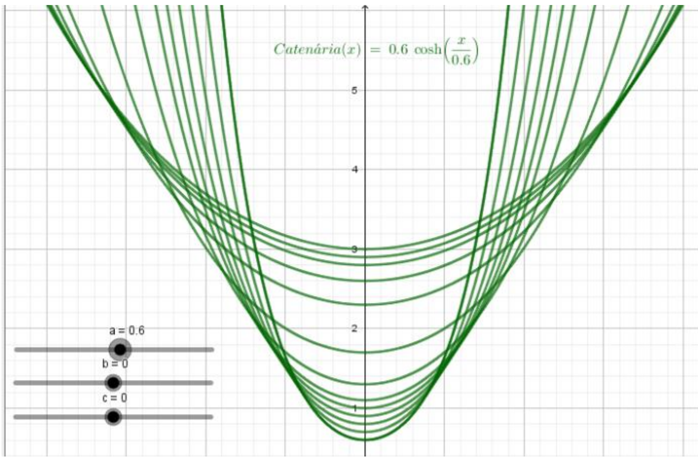

Figura 10: Famílias de catenárias construídas no GeoGebra
Fonte: Elaboração dos autores (2022)

Ao analisarmos os gráficos da parábola e da catenária de forma sobreposta, podemos supor as razões pelas quais os antigos matemáticos, a princípio, apontaram que a parábola era a curva que se deformava sob seu próprio peso (Mata, 2003). Em ambas as construções, podemos observar certa proximidade entre seus vértices em alguns pontos, o que pode ter sido a causa do equívoco de matemáticos no passado, como Galileu (Talavera, 2008). Entretanto, o uso do GeoGebra neste caso, nos auxilia a visualizar as diferenças e semelhanças entre ambas as curvas.

Ainda podemos observar as diferenças entre as curvas no plano 3D, a partir da parametrização de suas equações e projeção no plano tridimensional.

Com relação a parametrização da parábola, temos que na curva λ de equação cartesiana $(x - a)^2 = k(y - b)$, que implica em $y = \frac{1}{k}(x - a)^2 + b$, com vértice no ponto $V(a, b)$ e reta-focal paralela ao eixo y. Ao estabelecermos uma variável independente t como sendo $x - a$, a variável y pode ser expressa por:

$$y = \frac{1}{k}t^2 + b$$

Assim, a parábola λ tem equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = t + a \\ y = \frac{1}{k}t^2 + b \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{R}$. No GeoGebra, podemos fazer a sua parametrização e construção da superfície parabólica, criando primeiramente um controle deslizante $\alpha = 360°$, que define o ângulo de rotação da curva. E em seguida, a partir do comando *Superfície(<Curva>, <Ângulo>, <Reta>)*, inserimos no campo de entrada, respectivamente, a curva parábola previamente construída, como nas etapas predecessoras, o ângulo e o eixo de referência para a rotação.

Utilizamos para esta construção o comando na seguinte estrutura:

$$Superfície(Parábola, \alpha, EixoY)$$

digitado na barra de entrada, o que nos gerou a superfície ilustrada na Figura 11:

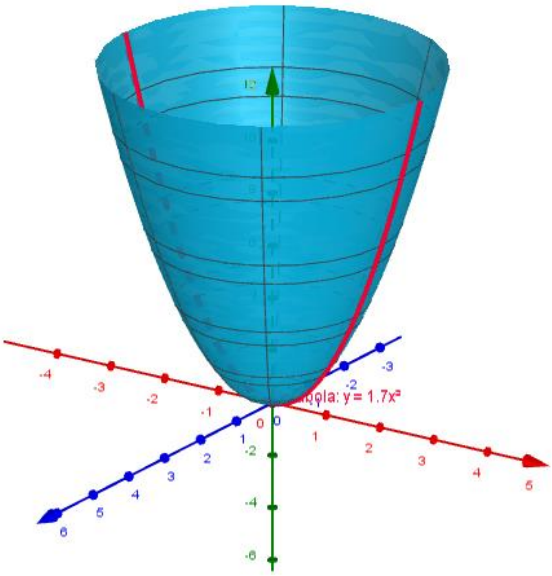

Figura 11: Parametrização da parábola/Superfície em 3D
Fonte: Elaboração dos autores (2022)

No que diz respeito à parametrização da catenária, temos que a partir de sua equação $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, podemos estabelecer uma parametrização imediata, considerando a variável t como parâmetro:

$$\begin{cases} x = t + a \\ y = a.\cosh\left(\dfrac{t}{a}\right) \end{cases}$$

Mas também há a possibilidade de utilizar a definição inicial do cosseno hiperbólico e $\cosh\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}}{2}$ e eliminarmos os termos exponenciais com uso de logaritmos, considerando que $ln\ t = \frac{x}{a} \Rightarrow\ -ln\ t = -\frac{x}{a} \Rightarrow -\frac{x}{a} = ln\ \frac{1}{t}$. Nessas condições temos que $x = a.ln\ t$ e $\frac{2y}{a} = e^{\ln t} + e^{-\ln t} = t + \frac{1}{t}$. Isto implica na parametrização:

$$\begin{cases} x = a.\ln t \\ y = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$$

com $t > 0$, para garantir a existência do logaritmo. No ambiente do GeoGebra, a parametrização e construção da superfície da catenária pode ser feita com um protocolo similar ao da parábola. Assim, criamos um controle deslizante $\beta = 360°$, que define o ângulo de rotação da curva, seguido do comando utilizado anteriormente *Superfície(<Curva>,*

<Ângulo>, <Reta>), em que inserimos, respectivamente, a curva catenária já construída, o ângulo e o eixo de referência para a rotação. Utilizamos para esta construção o comando na seguinte estrutura:

$$Superfície(Parábola, \beta, EixoY)$$

digitado na barra de entrada. Tal execução mostra-nos a superfície da Figura 12:

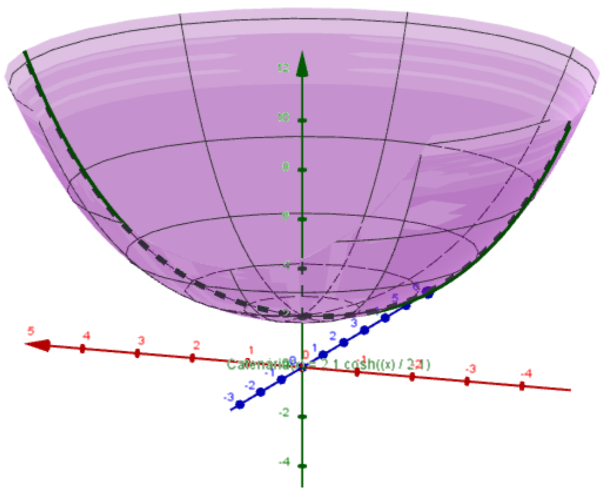

Figura 12: Parametrização da catenária/Superfície em 3D
Fonte: Elaboração dos autores (2022)

Além disso, o comparativo entre as duas superfícies pode ser mostrado de modo claro com aporte da janela 3D do GeoGebra, como trazem as Figuras 13 e 14:

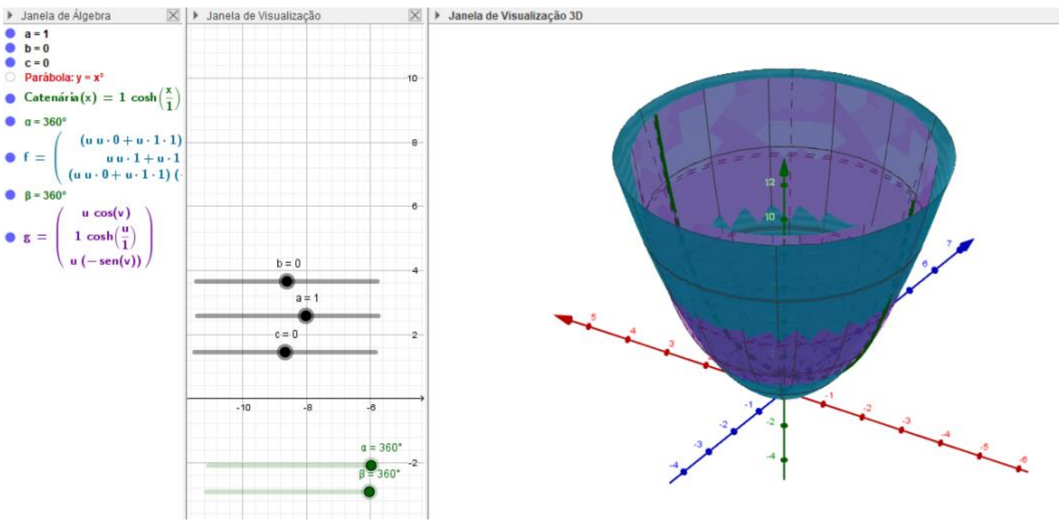

Figura 13: Comparativo entre a parábola e a catenária, com $a = 1$
Fonte: Elaboração dos autores (2022)

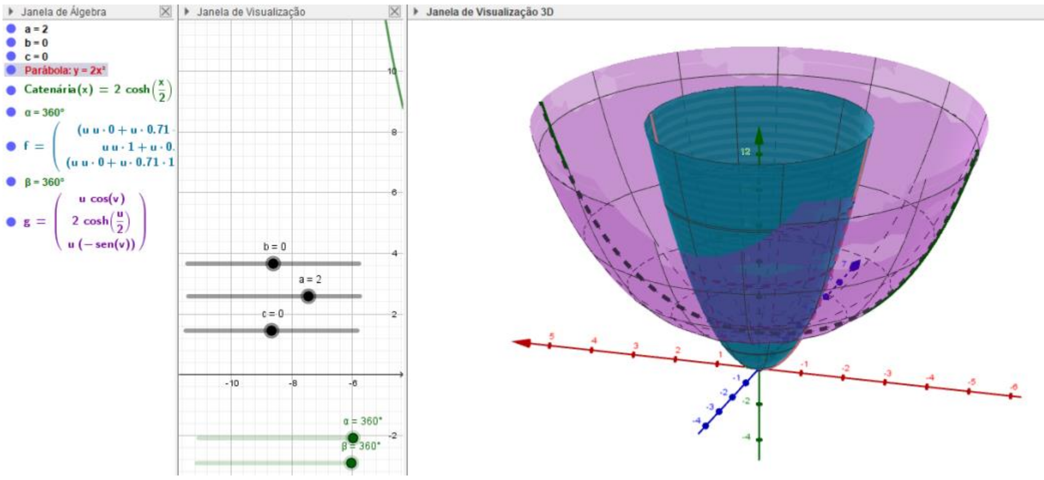

Figura 14: Comparativo entre a parábola e a catenária, com $a = 2$
Fonte: Elaboração dos autores (2022)

Dessa forma, mantivemos os controles deslizantes $b = 0$ e $c = 0$, movimentando apenas o controle deslizante a, onde podemos notar que, quanto mais próximo de zero é o valor de a, mais as curvas se aproximam.

A demonstração das fórmulas matemáticas da parábola e da catenária, como mostrado a partir da série de Taylor, coincidem em seus três primeiros termos, diferindo apenas a partir do quarto, o que torna seus gráficos semelhantes, mas não iguais, para pequenos valores de x, tornando sua diferenciação mais explícita à medida que os valores de x aumentam, o que pode ser evidenciado com a janela 3D do GeoGebra.

Tal discussão nos mostra como, em determinados pontos, não é apenas um simples equívoco confundir essas duas curvas, mas algo que pode comprometer estruturas arquitetônicas inteiras, por exemplo. Além disso, reforçamos a necessidade de discutir e demonstrar matematicamente este assunto em sala de aula e, caso possível, com exemplos aplicados ao cotidiano, tomando os devidos cuidados para que a matemática seja interpretada de forma correta. Nesse sentido, o uso da tecnologia como o GeoGebra pode propiciar uma discussão com aporte tanto visual como algébrico, promovendo um ambiente de aprendizagem e preparando o licenciando e futuro professor de matemática.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo deste trabalho foi apresentar uma proposta de discussão, via Engenharia Didática, para a abordagem e diferenciação das curvas parábola e catenária com o arrimo do *software* GeoGebra.

Por diversas vezes livros didáticos trouxeram exemplos de pontes pênseis como parábolas – no caso a aproximação destas, de forma análoga às aproximações feitas na Engenharia – assim como de trajetória de projéteis ou de outras estruturas que remetessem à esta curva, mas sem mencionar que, em determinadas condições as pontes pênseis têm suas estruturas amparadas pela equação da catenária. Isto torna a discussão válida, especialmente no tocante ao público da licenciatura em Matemática, que exercerá a docência e auxiliará o estudante em seu percurso de aprendizagem.

Amparamo-nos diante de obras sobre História da Matemática em busca de compreender de que forma os estudos destas curvas ocorreram no passado, bem como sua estrutura matemática, usabilidade e possíveis aplicações. Então entendemos, de fato, que a parábola, por seu entendimento e demonstrações algébrica/analítica e geométrica mais simples, tenha sido mais amplamente discutida ao longo dos anos, enquanto a catenária por muito tempo foi um assunto intrigante aos matemáticos antigos.

Entretanto, reforçamos que o uso da tecnologia nos fornece um aporte que viabiliza essa discussão de maneira mais produtiva, com a possibilidade de construir, visualizar, manipular e compreender, tanto do ponto de vista algébrico, quanto geométrico estas curvas. Por fim, esperamos que este trabalho possa ser amparo ao professor de Matemática ao discutir este assunto, fazendo um paralelo entre a matemática a história e a tecnologia, construindo o conhecimento e conferindo significado ao seu aprendizado.

REFERÊNCIAS

Abar, C. A. A. P. (2020). A Transposição Didática na criação de estratégias para a utilização do GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, *9*(1), 59–75. DOI: https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p59-75

Almouloud, S. A., & Coutinho, C. Q. S. (2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 3(1), 62-77. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2008v3n1p62.

Almouloud, S. A., & Silva, M. J. F. (2012). Engenharia didática: evolução e diversidade. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2), 22-52. DOI: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22

Alves, F. R. V. (2019). Visualizing the Olympic Didactic Situation (ODS): teaching mathematics with support of the GeoGebra software. *Acta Didactica Napocensia*, 12(2), 97-116.

Alves, F. R. V. (2020). Situações Didáticas Olímpicas (SDOs): Ensino de Olimpíadas de Matemática com arrimo no software GeoGebra como recurso na visualização. *Alexandria – Revista de Educação, Ciência e Tecnologia*, 13(1), 319-349. DOI: https://doi.org/10.5007/1982-5153.2020v13n1p319.

Artigue, M. (1988). Ingenierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308. Recuperado de: https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/.

Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática:* Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Barbosa, S. M. (2013). Outra parábola na igreja? Ou uma catenária? *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 1(2), 65–70. Recuperado de: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/12903.

Boyer, C. B. (2012). *História da matemática.* 3 ed. São Paulo: Editora Blücher

Cerqueira, A. A. (2015). *Parábola e suas aplicações*. Dissertação de Mestrado Universidade Federal da Bahia, Salvador. Recuperado de: https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/22969/1/adriano.pdf.

Eves, H. (2011). *Introdução à história da matemática.* Tradução de Hygino H. Domingues. 5 ed. São Paulo: Editora da Unicamp.

Guedes, P. C. C. (2015). Aplicação do software GeoGebra ao ensino da geometria analítica. *Ciência e Natura*, 37, Edição Especial PROFMAT, 365–375. Recuperado de: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/14555/pdf.

Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3 ed. São Paulo: Harbra.

Lima, E. L. (2014). *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. 324 p. Rio de Janeiro: IMPA.

Lima, L. A. M., & Miranda, S. R. F. (2021). Problema da catenária: história, solução e aplicações. *Revista Matemática e Ciência*, 4(1). DOI: https://doi.org/10.5752/P.2674-9416.2021v4n1p37-51.

Louzada, S. (2013). *Relações entre cônicas e funções no ensino médio*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo. Recuperado de: http://repositorio.ufes.br/handle/10/4813.

Macedo, H. R. (2015). *Estudo sistemático das parábolas*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa. Recuperado de: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/9431.

Maioli, M., Seifert, L. C. E., Brandt, S. J., & Rodrigues, S. V. O. (2012). Outra parábola na igreja? *Anais...* I Conferência Latino-Americana de GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 336-346. Recuperado de: http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/9721/7226.

Maor, E. (2004). *E: a história de um número*. São Paulo: Record.

Mata, S. Z. (2003). La catenaria en arquitectura. El cálculo de estructuras en la obra de Gaudí. *Ingeniería civil*, 129, 121-133.

Mendes, M. F. (2017). *A curva catenária como aplicação da função exponencial.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba.

Pauletti, R. M. O. (2002). Sobre cabos e cordas. *Anais...* I Simpósio Nacional sobre Tenso-estruturas / I Simpósio Latino-americano de Tensoestructuras, Faculdade de Arquitetura da USP, 2002. Recuperado de: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1716607/mod_resource/content/1/2002-Sobre-Cabos-e-Cordas.pdf.

Simmons, G. F. (1996). *Calculus with Analytic Geometry* - Second Edition. New York: The McGraw-Hill Companies.

Siqueira, C. A. F. (2016). *Um Estudo Didático das Cônicas: Quadros, Registros e Pontos de Vista*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Siqueira, C. A. F., & Silva, M. J. F. (2019). Um estudo da parábola: quadros, registros de representação semiótica e pontos de vista. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 14(2), 1-18. DOI: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2019.e56678

Sousa, R. T., Alves, F. R. V., & Azevedo, I. F. (2022). A Teoria dos Conceitos Figurais e o GeoGebra no estudo de parábolas: uma experiência com graduandos em Matemática. *RIPEM – International Journal for Research in Mathematics Education*, 12(22), 122-143, Edição Extra. DOI: https://doi.org/10.37001/ripem.v12i2.2893

Swokowski, E. W. (1994). *Cálculo com Geometria Analítica.* 2. ed. Tradução de Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Makron Books do Brasil. v. 1.

Talavera, L. M. B. (2008). *Parábola e catenária: história e aplicações.* Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Yates, R. C. (1974). *Curves and their properties*. New York: National Council of Teachers of America.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Aspectos geométricos da parábola e da catenária: uma discussão amparada pelo software GeoGebra

Renata Teófilo de Sousa
Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza, Brasil
rtsnaty@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5507-2691

Francisco Régis Vieira Alves
Doutor em Educação
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza, Brasil
fregis@ifce.edu.br
http://orcid.org/0000-0003-3710-1561

Maria José Araújo Souza
Doutora em Educação

Universidade Estadual Vale do Acaraú, Departamento de Matemática, Sobral, Brasil
mazesobral@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0001-5507-2691

AGRADECIMENTOS
Agradeço aos meus professores orientadores, Dr. Francisco Régis Vieira Alves e Dra. Maria José Araújo Souza, pela parceria e as valiosas orientações, observações, sugestões e correções no decorrer da escrita deste trabalho.
Agradecemos ao incentivo e aporte financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico – CNPq para o desenvolvimento desta pesquisa no Brasil.

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Aprígio Celso Lima Verde, 620, CEP 62033-160, Sobral, CE, Brasil.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: R. T. Sousa
Coleta de dados: não se aplica
Análise de dados: não se aplica
Discussão dos resultados: R. T. Sousa; F. R. V. Alves; M. J. A. Souza
Revisão e aprovação: R. T. Sousa; F. R. V. Alves; M. J. A. Souza

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 27-05-2022 – Aprovado em: 10-07-2022