Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O PROCESSO DE HIBRIDIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE PADOVAN: UMA EXPERIÊNCIA NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NO IFCE

The Padovan Sequence Hybridization Process: An Experience In The Undergraduate Mathematics Course At The IFCE

Renata Passos Machado **VIEIRA**
Universidade Federal do Ceará, Matemática, Fortaleza, Brasil
re.passosm@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1966-7097

Milena Carolina dos Santos **MANGUEIRA**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, Brasil
milenacarolina24@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4446-155X

Rosalide Carvalho de **SOUSA**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, Brasil
rosalidecarvalho@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8059-1159

José Gleison Alves da **SILVA**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, Brasil
Gleison.profmat.seduc@gmail.com
https://orcid.org/ 0000-0002-3093-0239

Francisco Regis Vieira **ALVES**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, Brasil
fregis@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-3710-1561

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Os números híbridos, as sequências lineares e recorrentes estão gerando um processo de hibridização na área de sequências. Neste trabalho é, então, apresentada uma aplicação do processo de hibridização da sequência de Padovan num curso de formação inicial de professores de Matemática, fundamentada na Engenharia Didática com enfoque na Teoria das Situações Didáticas. À vista disso, um dos teoremas abordados nesta pesquisa é selecionado e, elaborada uma situação-problema envolvendo o conceito da fórmula variante de Binet. Com essa aplicação, objetiva-se estimular a compreensão e o lado intuitivo dos estudantes em formação, sem perder o rigor matemático e histórico, apresentando assim como uma evolução desse objeto de estudo.

Palavras-chave: Campo epistêmico-matemático, Contrato didático, Didática Matemática, Transposição didática

ABSTRACT

Hybrid numbers, linear and recurring sequences are generating a hybridization process in the sequence area. In this paper, an application of the Padovan sequence hybridization process is presented in an initial Mathematics teacher training course, based on Didactic Engineering with a focus on Didactic Situations Theory. In view of this, one of the theorems addressed in this research is selected and a problem situation is elaborated involving the concept of Binet's variant formula. With this application, it aims to stimulate the understanding and intuitive side of students in formation, without losing the mathematical and historical rigor, thus presenting as an evolution of this object of study.

Keywords: Epistemic-Mathematical Field, Didactic Contract, Mathematical Didactics, Didactic Transposition

1 INTRODUÇÃO

Estudos referentes ao ensino de sequências estão sendo cada vez mais realizados como apresentados nos trabalhos de Slisko (2020), Alves et al. (2019), Oliveira, Andrade e Alves (2018), Alves (2017), Santos e Alves (2017), entre outros. Destacamos ainda a utilização de situações didáticas visando transformar determinado objeto de estudo, alguns muitas vezes vistos somente em Matemática Pura, em um conteúdo a ser ensinado. Segundo Felcher e Ferreira (2018):

A disciplina de Matemática, no sentido restrito de grade curricular, as discussões são ainda mais intensas assinalando os conteúdos como engessados, o que para alguns professores não permite um trabalho diferenciado, cabendo a esses vencê-los, apenas (Felcher & Ferreira, 2018, p. 238).

Em estudos realizados por Alves (2014, 2016), podemos notar a utilização de uma metodologia de pesquisa, Engenharia Didática (ED) e de uma teoria de ensino, Teoria das Situações Didáticas (TSD), visando a compreensão dos estudantes em torno de situações-problema elaboradas.

A ED e a TSD nascem da didática francesa em um campo de investigação denominado de Didática da Matemática (DM). Logo, com essa investigação, os estudantes poderão argumentar e realizar levantamento de hipóteses em relação ao conteúdo matemático que será investigado (Silva, Vertuan & Silva, 2018).

A DM teve seu desenvolvimento na França em meados da década de 1970 em um contexto de reforma desta disciplina, a partir da criação do Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática (IREM) que tinha como principal objetivo de estudar os problemas de ensino de conceitos em razão das exigências do saber Matemático (Almouloud, 2007).

Surgida da DM, a ED foi amplamente divulgada por Michele Artigue, nos anos de 1980, onde no campo do ensino, é dada como um trabalho comparado ao trabalho de um engenheiro que para realizar um projeto se baseia em conhecimentos científicos de sua área e aceita a submeter-se a um controle científico. Mas ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar com objetos muito mais complexos do que os refinados das ciências e, portanto, tem que abordar praticamente, com todos os meios disponíveis, objetos esses que a ciências não podem levar em conta (Artigue, 1995, grifo nosso).

A TSD, por sua vez, é uma teoria de ensino, desenvolvida por Brousseau (1986), aplicada em conjunto com a metodologia de pesquisa utilizada, visando analisar os dados coletados durante a experimentação. Para isso, fundamentamos esta observação em torno das suas situações didáticas, transformando o conteúdo para um lado mais investigativo do estudante.

Diante disso, temos o questionamento realizado com base na problemática descrita anteriormente: Como descrever situações de ensino envolvendo o processo de hibridização da sequência de Padovan?

À vista disso, elencamos os seguintes objetivos, sendo eles: desenvolver o processo de hibridização da sequência de Padovan, descrevendo teoremas e propriedades, revelando assim a evolução destes números; construir uma situação-problema envolvendo a hibridização dos números de Padovan, em torno da fórmula variante de Binet; compreender o processo histórico-evolutivo da sequência de Padovan diante da sua hibridização.

Com tudo, trazemos um estudo com base na ED com enfoque na TSD, em torno deste objeto de estudo, realizando assim uma descrição de suas fases. Nas seções subsequentes, temos então uma aplicação desta metodologia, num curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), na disciplina de História da Matemática.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesse trecho apresentamos os subsídios teóricos que conduziram essa investigação. A pesquisa foi estruturada nas quatro fases da ED, a saber: análises prévias ou preliminares, análises *a priori*, experimentação e análise posteriori e validação. Também apresentamos a TSD com o intuito de fundamentar a situação problema proposta neste estudo, a qual foi estruturada seguindo suas quatros etapas: (ação, formulação, validação e institucionalização), com o propósito de subsidiar uma modelagem para uma prática docente voltada para a exposição de conteúdos matemáticos que possibilite ao aluno uma melhor compreensão da aprendizagem matemática.

2.1 A Engenharia Didática

A referida pesquisa será demarcada e estruturada sobre a perspectiva da ED, de acordo com Almouloud e Coutinho (2008) ela se caracteriza a partir de um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, onde o professor concebe, realiza, observa e analisa as sessões didáticas construída pelo próprio.

A ED teve seu surgimento na DM no início dos anos 80, ela é denominada:

> Como uma forma de trabalho comparado com o trabalho de um engenheiro que, para realizar um determinado projeto, se baseia em conhecimentos científicos de sua área e aceita a submeter-se a um controle do tipo científico. Porém, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar com objetos muito mais complexos que objetos refinados das Ciências e, por tanto, tem que abordar praticamente, com todos os meios disponíveis, problemas que a ciência não deseja ou não pode assumir. (Artigue, 1995, p. 33-34, Tradução nossa)

Esta metodologia proporciona ao professor através da investigação a antecipação dos obstáculos e dificuldades que poderão ocorrer sob determinada situação de ensino. Segundo Pommer (2013), isso acontece pelas escolhas das variáveis didáticas que são definidas a partir de um estudo refinado, que orientarão o domínio e o controle das ações direcionando os estudantes a evolução da aprendizagem, além de assumir hipóteses a serem confirmadas no decorrer da pesquisa.

A ED também se destaca pelo seu modo de validação, onde a mesma realiza um confronto entre duas etapas: *Análises a Priori* e *Análises a Posteriori* (que serão descritas adiante), esse tal modo é denominado Validação Interna (Almouloud & Coutinho, 2008).

O percurso metodológico que a ED se estrutura são divididas em quatros fases: *Análises Preliminares* ou *Análises prévias, Concepção e Análise a Priori, Experimentação e Validação e Análise a Posteriori.*

Na fase de *Análise Preliminares* ou *Análises Prévias* é realizado um estudo bibliográfico sobre determinado conceito que o professor pretende ensinar. Essa fase parte de uma análise dos conteúdos que serão fragmentados em três dimensões, são elas:

> Epistemológica, relacionada com o saber em estudo, podendo ser observada sua evolução histórica, os obstáculos relativos à sua natureza, dentre outros aspectos; didática, relativa à forma como o conteúdo é apresentado nos livros didáticos, como proposta de ensino ao professor; cognitiva, caracterizada pela análise de questões

> relativas aos conhecimentos dos alunos sobre a temática de estudo (Santos & Alves, 2017, p. 449)

Esta etapa, permitirá ao professor/pesquisador fundamentar-se, de acordo com diversos fatores, que poderão ocorrer durante a vivência em uma determinada situação didática proposta. Portanto, esse levantamento de diversos obstáculos/dificuldades que impedirá a evolução da aprendizagem pelo estudante, é o que viabiliza a construção de uma boa situação de ensino. Assim, esta poderá proporcionar a superação desses obstáculos sendo determinante para a próxima fase (Pommer, 2013).

Esta fase possui ainda "um dos objetivos das análises preliminares é identificar os problemas decorrentes no processo de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e esquematizar os problemas, as hipóteses, os objetivos e os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa" (Santos & Alves, 2018, p. 145).

Na fase de *Concepção e Análise a Priori,* serão descritas as situações didáticas com base nas variáveis de comando, definidas a partir dos estudos realizados na fase antecedente. De acordo com Artigue (1995), elas se distinguem em duas: as variáveis macro-didáticas, quando se refere a organização global da pesquisa; e as variáveis micro-didáticas, quando se refere a organização de forma local, observando o que ocorre nas situações didáticas em sala de aula.

Portanto, o objetivo desta fase, segundo Almouloud & Coutinho (2008, p. 67), "[...] é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido". Desse modo, serão concebidas as situações didáticas com base nessas variáveis de comandos, que permitirá ao professor/pesquisador o controle dos comportamentos e assim, caso aconteça algum entrave do estudante no momento da resolução do problema, terá subsídios para a condução e de forma construtiva, o aluno superá-los.

Diante de toda estruturação, de estudo e de concepções realizadas durante as fases antecedentes, na fase de *Experimentação* é colocado em prática as situações didáticas com o propósito de possibilitar a construção do conhecimento de forma autônoma pelo aluno, com o mínimo de interferência do professor, disponibilizando meios e ferramentas que lhe auxiliem nesta caminhada. A fase da experimentação

É o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise a priori, em um processo de complementação (Almouloud & Coutinho, 2008, p.67).

Desse modo, para o recolhimento desses dados referentes à aplicação, poderão ser usados, de acordo Santos e Alves (2017), instrumentos como: relatórios, registro fotográficos, atividades escritas pelos alunos, entrevistas e diversos outros recursos.

E, com o propósito de consolidar a pesquisa, na etapa final de *Análise a Posteriori,* ocorrem através das organizações recolhidas durante a etapa de experimentação e a *Validação (interna)*, sendo então realizada a partir do confronto entre *Análise a Priori* e *Análise a Posteriori* (Santos & Alves, 2017).

Segundo Pommer (2013, p. 26) *apud* de Artigue (1996):

> Esta fase se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com a análise a priori, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas. Assim, é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa (Pommer, 2013, p. 26 *apud* de Artigue, 1996)

Portanto, para Pommer (2013, p.26) sobre o uso da ED como metodologia de pesquisa tem “[...] à possibilidade de prover a fundamentação teórica para que o professor conheça o significado e amplie o leque de opções, formando elo de ligação entre a teoria e a prática de sala de aula”.

Nesta subseção, foi abordado a ED e a sua importância para o estudo da referida pesquisa. Norteando-nos na concepção, aplicação e validação das situações didáticas construídas, a partir de um estudo bibliográfico identificando obstáculos/entraves que dificultam o aprendizado do estudante.

Desse modo, a construção de situações didáticas nos permitiu realizar a identificação de cada momento e obstáculo pelo qual o aluno poderá deparar-se durante a resolução, sob a perspectiva TSD em suas etapas de ação, formulação, validação e institucionalização, que serão descritas na subseção seguinte.

2.2 Teoria das Situações Didáticas (TSD)

A TSD foi iniciada por Brousseua (1986) na França com vistas em estudos sobre o construtivismo em pedagogia, oriundos da teoria da epistemologia genética de Piaget. Freitas (2015) ressalta que Brousseau ampliou ao trabalho didático da problematização matemática um tratamento científico, além de sugerir que também ocorre aprendizagem adaptando-se ao um meio, mesmo cercado de controvérsias e desequilíbrios. Desse modo, verifica-se que essa teoria se contrapõe ao modelo da didática clássica, pautada num ensino que prioriza a exposição de conteúdos sistematizados e de forma axiomática.

Ainda de acordo com Freitas (2015), essa teoria é considerada como uma referência no processo de aprendizagem matemática, pois envolve o aluno, o professor e o conhecimento matemático em torno da valorização dos saberes mobilizados pelo aluno e seu envolvimento na construção desses conhecimentos. Almouloud (2007), evidencia na Figura 1 essas relações embasadas pelo saber das situações de ensino.

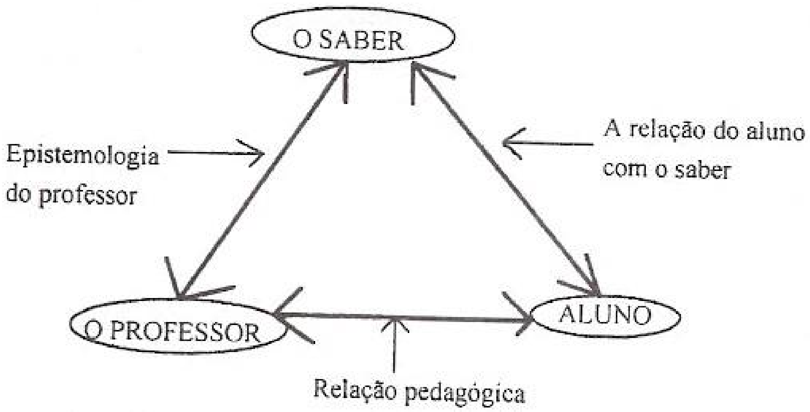


Figura 1: Triângulo Didático
Fonte: Almouloud (2007, p. 32)

Evidencia-se, portanto, que essa relação pode dar suporte ao aluno para que ele tenha condições de se apropriar da significação do saber matemático, sem esquecer que a metodologia empregada no momento da exposição do conteúdo e a estruturação das atividades que serão apresentadas nas situações didáticas pré-planejadas pelo professor, são fatores essenciais para despertar o interesse e o envolvimento do estudante vislumbrando um saber matemático construído e alicerçado cientificamente. Assim, uma situação didática foi definida como:

Um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. (Brousseua, p. 8 *apud* Freitas, 1986, p. 80)

Relacionando as atividades de ensino com o saber matemático Brousseau (1986) decompôs a TSD em quatro fases distintas, a saber: ação, formulação, validação e institucionalização. De acordo com Almouloud (2007), elas são caracterizadas como:

Dialética da ação: Apresenta-se como uma situação, de modo que ao se expor um determinado problema ao aluno, este se empenha na busca da solução, e para tal, realiza determinadas ações de caráter mais imediatos, resultando num conhecimento mais operacional do que de natureza teórico. Ou seja, o aluno age sobre uma determinada situação problema, essa lhe retorna informações sobre suas ações, resultando em uma solução que é o conhecimento a ser ensinado.

Dialética da formulação: Nessa fase o objetivo é a troca de informações, podendo ser com uma ou várias pessoas, por meio de mensagens escritas ou orais, em língua natural ou matemática. Esse momento permite ao aluno criar alguns modelos ou esquemas teóricos de forma mais elaborada, como por exemplo, o uso de sinais ou regras comuns. É nesta etapa que o aprendiz esclarece as ações usadas nas soluções encontradas.

Dialética da validação: É a etapa em que o aluno deve provar a validade do modelo por ele criado, buscando justificativas mais precisas, como explicação, prova ou demonstração, que torne seu modelo pertinente perante ao grupo no qual o aprendiz está inserido. O docente, caso julgue necessário, pode solicitar mais explicações objetivando aceitar ou refutar a solução apresentada pelo discente. Portanto, é nesse momento que ocorre o debate entre os alunos e entre alunos e professor.

Dialética da institucionalização: Essa fase, permite o estabelecimento da objetividade e da divulgação do conhecimento, adquirindo assim, status de universalidade. Este o momento em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber, tentando intermediar a transposição do conhecimento do plano individual para à dimensão do saber científico. Após a institucionalização, o saber torna-se oficial e os alunos podem adicioná-los a seus esquemas mentais, disponibilizando-os para serem utilizados na resolução de problemas matemáticos.

Portanto, a TSD propiciará o estabelecimento de uma modelagem de situação didática que permite ao aluno participar de forma efetiva da elaboração e fixação da cognição, estabelecendo condições para se desenvolver novos conhecimentos embasados nas experiências adquiridas com meio e com os integrantes das sessões didáticas em que foram participantes.

2.3 Números Híbridos

Um novo conjunto numérico estudado por Özdemir (2018) e Carvalho (2019) foi definido como sendo a generalização dos números complexos, hiperbólicos e duais. Nesta generalização, ele apresenta um sistema de números que consiste na junção dos três sistemas numéricos, já mencionados, estando esses números combinados ou mistos entre si, onde foi nominado de números híbridos, ao invés de números generalizados.

Definição 1: Um número híbrido é definido como:

$$K = \{z = a + bi + c\varepsilon + dh, a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + 1\}.$$

A partir desta definição, podemos efetuar algumas propriedades e operações com os números híbridos. Considerando dois números híbridos $z_1 = a_1 + b_1 i + c_1\varepsilon + d_1 h$ e $z_2 = a_2 + b_2 i + c_2\varepsilon + d_2 h$, temos:

- Dois números híbridos são iguais se todos os seus componentes forem iguais, um por um: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$.
- A soma de dois números híbridos é definida somando seus componentes: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)\varepsilon + (d_1 + d_2)h$.
- A subtração de dois números híbridos é definida subtraindo seus componentes: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i + (c_1 - c_2)\varepsilon + (d_1 - d_2)h$.
- A multiplicação de um escalar $s \in \mathbb{R}$ é definido multiplicando o escalar com seus componentes: $sz = sa + sbi + sc\varepsilon + sdh$.
- Zero é o elemento nulo do número híbrido.
- O elemento inverso de z é $-z$, que é definido como tendo todos os componentes de z alterando seus sinais: $-z = -a - bi - c\varepsilon - dh$.
- O produto híbrido é obtido distribuindo-se os termos à direita, preservando a ordem de multiplicação das unidades e depois escrevendo os valores dos seguintes substituindo cada produto de unidades pelas igualdades $i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + 1$.

Tem-se ainda o conjugado de um número híbrido, denotado por $\bar{z}$ e definido como: $\bar{z} = a - bi - c\varepsilon - dh$. Além disso, é possível definir o caráter do número híbrido $C(z) = z\bar{z} = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = a^2 + b^2 - 2bc - d^2$ que por conseguinte a norma do número híbrido, denotado por $\| z \|$, é a raiz quadrada do caráter de um número híbrido.

Quanto a representação matricial para um número híbrido destacamos a importância dessa representação para facilitar a multiplicação desses números. Ao definir um isomorfismo entre matrizes $2x2$ e números híbridos, podemos facilmente multiplicar dois números híbridos e provar muitas de suas características.

Definição 2: A matriz $\varphi(z) \in M_{2x2}$ é chamada de matriz híbrida correspondente ao número híbrido z.

$$\varphi_{a+bi+c\varepsilon+dh} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{a+bi+c\varepsilon+dh} = \begin{bmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{bmatrix}$$

2.4 A sequência de Padovan

A sequência de Padovan é uma sequência linear e recorrente de terceira ordem, sendo então estudada pelo arquiteto italiano, Richard Padovan. Nascido na cidade de Pádua no ano de 1935 (Stewart, 1996), Padovan estabeleceu a fórmula de recorrência desta sequência como sendo: $P_{\{n\}} = P_{\{n-2\}} + P_{\{n-3\}}, n \geq 3$ com $P_{\{0\}} = P_{\{1\}} = P_{\{2\}} = 1$.

Segundo Voet e Schoonjans (2012), Hans Van der Laan (1904-1991) e seu irmão, ao reconstruírem igrejas que haviam sido destruídas pela segunda guerra mundial, acabaram por descobrir um novo padrão de medida, sendo este um número irracional, denominado por eles de número plástico. Porém, o matemático francês Gérard Cordonnier (1907-1977) (ver Figura 2) desenvolveu primeiramente estudos referentes a este número, sendo então interrompido com o seu falecimento. O número plástico representa a solução real da equação característica desta sequência dada por: $x^3 - x - 1 = 0$. Assim, temos três soluções, sendo: uma real, conhecida como número plástico (aproximadamente 1,32) e as outras duas complexas e conjugadas, aproximadamente $-0,66 - 0,56i$.

Figura 2: Gérard Cordonnier
Fonte: International, 2019

Ao contrário da sequência de Fibonacci, em que esta possui uma problemática inicial como a reprodução dos coelhos imortais, os números de Padovan não possuem, sendo então encontrada na literatura poucos trabalhos referentes ao ensino desta sequência. Porém, existem ainda uma representação geométrica, como mostrada no trabalho de Vieira e Alves (2019), em que relata do espiral de Padovan, construindo assim esses números através da inserção de triângulos equiláteros.

Essa sequência é considerada ainda como prima da sequência de Fibonacci, uma vez que os números de Fibonacci possuem relação com o número de ouro, já os números de Padovan com o número plástico. Sabendo disso, temos que o número de ouro e o número plástico são as duas únicas soluções dos números mórficos (Spinadel & Buitrago, 2009).

3 ANÁLISES PRELIMINARES

O processo de hibridização de sequências vem sendo estudado nos trabalhos de Catarino (2019), Cerda-Morales (2018), Szynal-Liana (2018, 2019), abordando outras sequências. Com base nesses trabalhos, essa presente pesquisa apresenta a hibridização da sequência de Padovan apresentando a sua recorrência, equação característica, norma, forma matricial e função geradora. Vale salientar que essas definições e teoremas, não foram encontrados até o presente momento na literatura.

Definição 3: O número híbrido de Padovan é definido como:

$HP_{\{n\}} = P_{\{n\}} + P_{\{n+1\}}i + P_{\{n+2\}}\varepsilon + P_{\{n+3\}}h$, com as condições iniciais iguais a $HP_{\{1\}} = 1 + i + \varepsilon + 2h, HP_{\{2\}} = 1 + i + 2\varepsilon + 2h, HP_{\{3\}} = 1 + 2i + 2\varepsilon + 3h$

Propriedade 1: O número híbrido de Padovan satisfaz a relação de recorrência de terceira ordem $HP_{\{n\}} = HP_{\{n-2\}} + HP_{\{n-3\}}, n \geq 3$.

Definição 4: A norma de um número híbrido de Padovan e definido como:

$$\| HP_{\{n\}} \|^2 = \left| -2P_{\{n+1\}}P_{\{n+2\}} - 2P_{\{n+1\}}P_{\{n\}} \right|.$$

Além disso, o número híbrido de Padovan pode ser representado de forma matricial, a partir de uma matriz 2x2, onde há uma bijeção entre o conjunto de todas as matrizes.

Teorema 1: Uma matriz do número híbrido de Padovan, é definida como:

$$\varphi_{HP_{\{n\}}} = \begin{bmatrix} P_{\{n\}} + P_{\{n+2\}} & 2P_{\{n+1\}} + P_{\{n\}} - P_{\{n+2\}} \\ P_{\{n+2\}} + P_{\{n\}} & P_{\{n\}} - P_{\{n+2\}} \end{bmatrix}.$$

A função geradora permite a resolução de recorrências lineares com coeficientes constantes (Koshy, 2001). Este procedimento demonstrou como obter os números de Padovan sem ser necessário calcular todos os números que o procedem.

Teorema 2: A função geradora dos números híbridos de Padovan é dada por:

$$G_{HP_{\{n\}}}(x) = \frac{HP_{\{0\}} + HP_{\{1\}}x + (HP_{\{2\}} - HP_{\{0\}})x^2}{1 - x^2 - x^3}.$$

Diante disso, iremos explorar a existência de uma fórmula explícita para o cálculo do *n*-ésimo termo da sequência, sem depender da recorrência utilizando a fórmula de Binet, onde é necessário utilizar as raízes da equação característica desta sequência.

Teorema 3: Para $n \geq 0$, temos que a fórmula de Binet para os números híbridos de Padovan é dado como:

$$HP_{\{n\}} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n.$$

Onde x_1, x_2, x_3 são as raízes da equação característica da sequência híbrida de Padovan e A, B, C os coeficientes iguais a:

$$A = \frac{HP_{\{0\}}(x_2 x_3{}^2 - x_2{}^2 x_3) + HP_{\{1\}}(x_2{}^2 - x_3{}^2) + HP_{\{2\}}(x_3 - x_2)}{x_3 x_1{}^2 + x_3{}^2 x_2 + x_1 x_2{}^2 - x_3 x_1 - x_1{}^2 x_2 - x_3 x_2{}^2},$$

$$B = \frac{HP_{\{0\}}(x_3 x_1{}^2 - x_3{}^2 x_1) + HP_{\{1\}}(x_3{}^2 - x_1{}^2) + HP_{\{2\}}(x_1 - x_3)}{x_3 x_1{}^2 + x_3{}^2 x_2 + x_1 x_2{}^2 - x_3 x_1 - x_1{}^2 x_2 - x_3 x_2{}^2},$$

$$C = \frac{HP_{\{0\}}(x_2 x_1{}^2 - x_2{}^2 x_1) + HP_{\{1\}}(x_1{}^2 - x_2{}^2) + HP_{\{2\}}(x_2 - x_1)}{x_3 x_1{}^2 + x_3{}^2 x_2 + x_1 x_2{}^2 - x_3 x_1 - x_1{}^2 x_2 - x_3 x_2{}^2}$$

4 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Nas seções anteriores, foi então realizado um estudo referente à sequência de Padovan e dos números híbridos, para assim construirmos uma situação-problema enfatizando o processo de hibridização desses números. Assim, com base nos teoremas mostrados anteriormente, selecionamos o teorema relacionado à fórmula variante de Binet, transformando-o numa atividade proposta aos estudantes de curso de formação inicial de professores de matemática.

À vista disso, temos que a concepção da situação didática desta pesquisa está presente no processo de hibridização da sequência de Padovan, observando a sua evolução e transformando-o num conteúdo a ser ensinado. Com tudo, temos o viés de investigar os teoremas e propriedades discutidos neste trabalho, alguns sendo apresentados de forma inédita, diante de um contexto de ensino de história da matemática e fundamentada na ED com enfoque na TSD.

Situação-problema: Dada a equação de recorrência da sequência híbrida de Padovan $x^3 - x - 1 = 0$ e sendo $x_{\{1\}}$ a raiz real e $x_{\{2\}}, x_{\{3\}}$ as raízes complexas e conjugadas, é possível então obter uma função, em que seja pode-se obter os termos dessa sequência híbrida sem utilizar a recorrência? Fórmula esta conhecida pela Fórmula de Binet.

Situação de ação: Tomando como base a fórmula geral de Binet, $HP_{\{n\}} = Ax_{\{1\}}{}^n + Bx_{\{2\}}{}^n + Cx_{\{3\}}{}^n, n \geq 0$, os estudantes deverão realizar manipulações algébricas, a fim de encontrar três equações distintas, que vão compor um sistema linear de equações, do tipo:

$$\begin{cases} A + B + C = HP_{\{0\}} \\ Ax_{\{1\}} + Bx_{\{2\}} + Cx_{\{3\}} = HP_{\{1\}} \\ Ax_{\{1\}}{}^2 + Ax_{\{2\}}{}^2 + Ax_{\{3\}}{}^2 = HP_{\{2\}} \end{cases}$$

Situação de formulação: A partir do sistema linear formado, os estudantes devem, por meio de escalonamento ou pela regra de Cramer, encontrar os valores das constantes, sendo estas iguais a:

$$A=\frac{HP_{\{0\}}(x_2x_3{}^2-x_2{}^2x_3)+HP_{\{1\}}(x_2{}^2-x_3{}^2)+HP_{\{2\}}(x_3-x_2)}{x_3x_1{}^2+x_3{}^2x_2+x_1x_2{}^2-x_3x_1-x_1{}^2x_2-x_3x_2{}^2},$$
$$B=\frac{HP_{\{0\}}(x_3x_1{}^2-x_3{}^2x_1)+HP_{\{1\}}(x_3{}^2-x_1{}^2)+HP_{\{2\}}(x_1-x_3)}{x_3x_1{}^2+x_3{}^2x_2+x_1x_2{}^2-x_3x_1-x_1{}^2x_2-x_3x_2{}^2},$$
$$C=\frac{HP_{\{0\}}(x_2x_1{}^2-x_2{}^2x_1)+HP_{\{1\}}(x_1{}^2-x_2{}^2)+HP_{\{2\}}(x_2-x_1)}{x_3x_1{}^2+x_3{}^2x_2+x_1x_2{}^2-x_3x_1-x_1{}^2x_2-x_3x_2{}^2}$$

Vale salientar, pelo fato dos valores das raízes serem complexos e, de certo modo extensos, as variáveis devem ser encontradas em função dessas raízes.

Situação de validação: Nesta fase, partindo do resultado encontrado espera-se que o estudante valide a fórmula: $HP_{\{n\}}=Ax_{\{1\}}{}^n+Bx_{\{2\}}{}^n+Cx_{\{3\}}{}^n, n\geq 0$, a partir do teorema apresentado por Lima *et al.* (1998) que oferecem métodos matemáticos com o intuito de verificar a validade deste teorema.

Situação de institucionalização: Durante esta fase, o docente retoma o domínio da situação didática, analisando as resoluções encontradas pelos estudantes e verificando a validade desta propriedade encontrada. É neste momento que o objetivo da situação-problema é revelado, onde é encontrada a fórmula variante de Binet da sequência híbrida de Padovan, dando ênfase ao processo de hibridização desta sequência, mostrando assim a sua evolução matemática.

5 EXPERIMENTAÇÃO

A fase da experimentação aconteceu no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, *campus* Fortaleza. Após uma minuciosa análise das disciplinas existentes no curso, foi então selecionada a História da Matemática, por apresentar em seu currículo, o assunto de sequências lineares e recorrentes, tratando da sequência de Fibonacci.

Para a aplicação, foi necessário estabelecer um contrato didático, o qual "[...] são analisadas as relações implícitas ou explícitas que se estabelecem no contrato didático e de que modo elas se manifestam, efetivando rupturas, ou não, das regras anteriormente estabelecidas" (Rodrigues, Menezes & Santos, 2017, p. 45).

Com tudo, a aplicação aconteceu durante uma semana de aula, através de situações didáticas fundamentadas na TSD. Essa teoria foi selecionada, uma vez que nesta fase da ED, não existe uma teoria de ensino para que seja feita a análise dessa coleta. Feito isso, os dados foram coletados através de registros fotográficos, gravações de áudios entre outros meios, para serem analisados na fase seguinte.

Na primeira aula foi realizado um breve estudo sobre os números híbridos, destacando os seus aspectos matemáticos. Dando continuidade, foi então realizado um estudo sobre a sequência de Padovan, ressaltando os seus fatos históricos e evolutivos. Por fim, foi então proposta, para os oito estudantes matriculados na disciplina, uma situação-problema com o viés de analisar a evolução da sequência de Padovan, com ênfase no seu processo de hibridização.

6 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO INTERNA

Durante esta última fase, são selecionadas as variáveis com base na situação-problema, instigando o estudante a compreender o processo de hibridização da sequência de Padovan, observando assim a junção de dois conteúdos matemáticos.

Iniciando este processo, selecionamos a variável micro-didáticas e introduzimos os conteúdos matemáticos, selecionando o teorema referente à fórmula variante de Binet.

Com a distribuição da lista de exercícios, foi possível dividir os estudantes em duplas, para que fosse possível uma interação entre eles, buscando possíveis resoluções para a atividade proposta. Assim, na situação-problema, cujo objetivo era obter a fórmula de Binet da sequência híbrida de Padovan, foi então apresentado o conteúdo dos números híbridos e da sequência de Padovan, para posteriormente discutir a fórmula geral de Binet, segundo Witford (1977).

Ao terem o primeiro contato com a atividade, os estudantes buscaram em seus conhecimentos prévios algumas tentativas de resoluções, observando ainda algumas dificuldades, tais como: a montagem do sistema linear, com base na fórmula geral de Binet, como iriam trabalhar com os valores iniciais híbridos de Padovan, ou seja, se causaria algum efeito se fosse isolada as unidades não reais. Porém, com a ajuda dos demais colegas, foi possível superar os obstáculos encontrados inicialmente, tendo assim a fase da ação acontecendo pelo Aluno A, como mostrada na Figura 3.

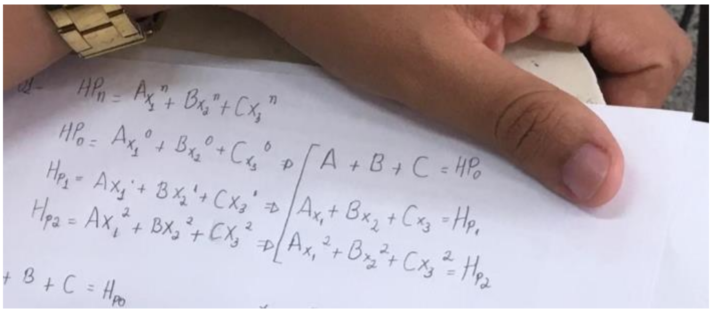


Figura 3: Fase da ação pelo Aluno A
Fonte: Dados da pesquisa

Durante a fase da formulação, os estudantes resolveram o sistema de equações com três variáveis, onde o Aluno C obteve o valor das variáveis utilizando a regra de Cramer, como mostrado na Figura 4. O Aluno E optou por resolver pelo método da substituição, encontrando diversas dificuldades no percurso, e assim passando a utilizar a regra de Cramer, conforme o seu relato em que diz: “[...] eu não consegui finalizar pelo método da substituição por causa das inúmeras variáveis que existem. Talvez, se trabalhasse com os valores das raízes do polinômio fosse possível concluir por essa técnica de resolução”

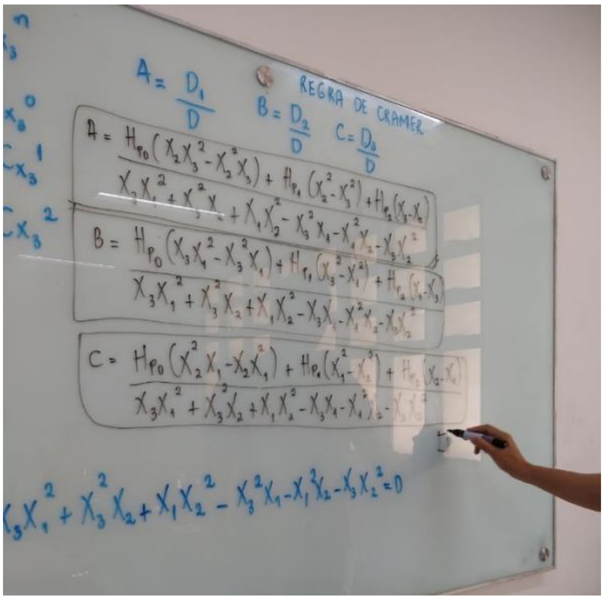
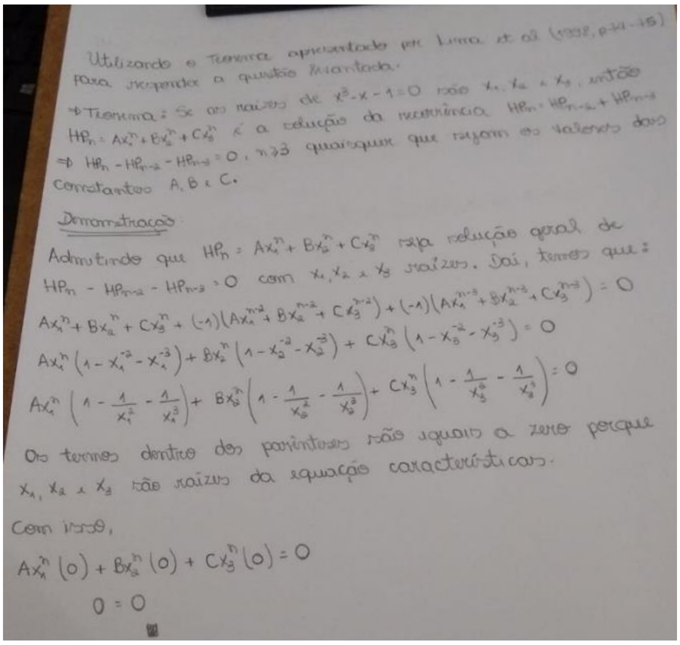


Figura 4: Fase da formulação pelo Aluno E
Fonte: Dados da pesquisa

Temos então que na fase de validação, a demonstração da fórmula variante de Binet pelo teorema apresentado por Lima *et al.* (1998, p.74-75) que afirma que se $x_{\{1\}}, x_{\{2\}}, x_{\{3\}}$ são raízes da equação $x^3 - x - 1 = 0$, então é a solução da recorrência $HP_{\{n\}} - HP_{\{n-2\}} - HP_{\{n-3\}} = 0, n \geq 3$, quaisquer que sejam os valores das constantes A, B, C, onde todas as duplas conseguiram validar, destacando por questões de organização, a resolução realizada pelo Aluno B, na Figura 5.



Utilizando o Teorema apresentado por Lima et al (1998, p.41-45) para responder a questão levantada.

⇒ Teorema: Se as raízes de $x^3 - x - 1 = 0$ são x_1, x_2 e x_3, então $HP_n = HP_{n-2} + HP_{n-3}$ $HP_n = Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n$ é a solução da recorrência $\Rightarrow HP_n - HP_{n-2} - HP_{n-3} = 0$, $n \geq 3$ quaisquer que sejam os valores das constantes A, B e C.

Demonstração

Admitindo que $HP_n = Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n$ seja solução geral de $HP_n - HP_{n-2} - HP_{n-3} = 0$ com x_1, x_2 e x_3 raízes. Daí, temos que:

$$Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n + (-1)(Ax_1^{n-2} + Bx_2^{n-2} + Cx_3^{n-2}) + (-1)(Ax_1^{n-3} + Bx_2^{n-3} + Cx_3^{n-3}) = 0$$

$$Ax_1^n(1 - x_1^{-2} - x_1^{-3}) + Bx_2^n(1 - x_2^{-2} - x_2^{-3}) + Cx_3^n(1 - x_3^{-2} - x_3^{-3}) = 0$$

$$Ax_1^n\left(1 - \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_1^3}\right) + Bx_2^n\left(1 - \frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_2^3}\right) + Cx_3^n\left(1 - \frac{1}{x_3^2} - \frac{1}{x_3^3}\right) = 0$$

Os termos dentro dos parênteses são iguais a zero porque x_1, x_2 e x_3 são raízes da equação característica.

Com isso,

$$Ax_1^n(0) + Bx_2^n(0) + Cx_3^n(0) = 0$$

$$0 = 0$$

Figura 5: Fase da validação pelo Aluno B
Fonte: Dados da pesquisa

Por fim, na institucionalização, o docente verifica as soluções obtidas pelos estudantes, e mostra outras formas de agrupar os termos do sistema de equação linear, obtendo a fórmula variante de Binet da sequência híbrida de Padovan, como visto no Teorema 3, em que: $HP_{\{n\}} = A(x_{\{1\}})^n + B(x_{\{2\}})^n + C(x_{\{3\}})^n$ e onde $x_{\{1\}}, x_{\{2\}}, x_{\{3\}}$ são as raízes da equação característica da sequência híbrida de Padovan e A, B, C os coeficientes iguais a:

$$A = \frac{HP_{\{0\}}(x_2x_3^2 - x_2^2x_3) + HP_{\{1\}}(x_2^2 - x_3^2) + HP_{\{2\}}(x_3 - x_2)}{x_3x_1^2 + x_3^2x_2 + x_1x_2^2 - x_3x_1 - x_1^2x_2 - x_3x_2^2},$$

$$B = \frac{HP_{\{0\}}(x_3x_1^2 - x_3^2x_1) + HP_{\{1\}}(x_3^2 - x_1^2) + HP_{\{2\}}(x_1 - x_3)}{x_3x_1^2 + x_3^2x_2 + x_1x_2^2 - x_3x_1 - x_1^2x_2 - x_3x_2^2},$$

$$C = \frac{HP_{\{0\}}(x_2x_1^2 - x_2^2x_1) + HP_{\{1\}}(x_1^2 - x_2^2) + HP_{\{2\}}(x_2 - x_1)}{x_3x_1^2 + x_3^2x_2 + x_1x_2^2 - x_3x_1 - x_1^2x_2 - x_3x_2^2}$$

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi possível realizar um estudo dos elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática, estruturados e fundamentados pela ED, visando a realização do experimento didática. A experimentação foi apoiada na TSD, analisando os dados coletados, para realizar assim uma validação interna.

Indubitavelmente, podemos destacar alguns problemas encontrados durante a experimentação, tais como: montagem o sistema a partir da fórmula geral de Binet, manuseio dos valores iniciais com as unidades não reais e resolução do sistema linear com três variáveis.

Porém, com a colaboração dos demais estudantes, foi possível compartilhar ideias e assim superar esses obstáculos encontrados. Vale destacar que algumas dessas propriedades e teoremas discutidos no desenvolvimento do campo epistêmico-matemático, são consideradas inéditas diante da área de ensino, e alguns até mesmo na área de Matemática Pura. Com isso, muitos estudantes que participaram desta pesquisa, conseguiram visualizar tal grau de ineditismo, tornando-os mais motivados para determinar o teorema proposta, em busca da fórmula variante de Binet deste processo de hibridização da sequência.

Nesse sentido, pôde-se realizar um estudo por meio de investigações, oportunizando aos professores em formação inicial, elaborar estratégias de resoluções, resgatando os conhecimentos prévios existentes e, instigando o lado intuitivo (Araújo, Lima & Passos, 2020).

REFERÊNCIAS

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. São Paulo: Editora UFPR.

Almouloud, S.; COUTINHO, C. Q. S. (2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd 1. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 3.6, p.62-77. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2008v3n1p62

Alves, F. R. V. (2017). Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a prior. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 51, p. 83-106.

Alves, F. R. V. (2016). Categorias intuitivas para o ensino do Cálculo: descrição e implicações para o ensino. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 9(3), p. 1-21. 10.3895/rbect.v9n3.1538

Alves, F. R. V. (2014). Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análises preliminares e a priori. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 7(3), p. 148-168. 10.3895/S1982-873X2014000300010

Alves, F. R. V., Vieira, R. P. M., Silva, J. G. A. & Mangueira, M. C. S. (2019). *Engenharia Didática para o ensino da Sequência de Padovan: um estudo da extensão para o campo dos números inteiros*. In: GONÇALVES, F. A. M. F. (Org.) Ensino de ciências e educação matemática 3 [recurso eletrônico] / (Org.). – Ponta Grossa, PR: Atena Editora.

Araújo, T. B., Lima, J. P. C. de & Passos, M. M. (2020). Ensino por investigação: percepções de docentes sobre suas práticas. *Góndola, Ensenanza y Aprendizage de las Ciencias*, 15(2), p. 1-19. http://doi.org/10.14483/23464712.14834

Artigue, M. (1995). *Ingenieria Didática*. Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gomez, P. In: Ingeniéria didatica en Educacion Matemática. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, p. 33-61.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherchesen Didactiques des Mathématiques*, 7(2), p. 33-116.

Carvalho, C. F. D. (2019). *Números híbridos e sua visualização no geogebra*. 103 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação Profissional em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Ceará.

Catarino, P. (2019). On k-pell hybrid numbers*. Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, Taylor & Francis, p. 1-7. https://doi.org/10.1080/09720529.2019.1569822

Cerda-Morales, G. (2018). Investigation of generalized hybrid bonacci numbers and their properties. *arXiv preprint arXiv:*1806.02231.

Felcher, C. D. O. & Ferreira, A. L. A. (2018). La enseñanza de los números racionales por medio de actividades de indagación e investigación: buscando desarrollar el pensamiento. *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias*, 13(2), p. 236-250. https://doi.org/10.14483/23464712.12500

Freitas, J. L. M. de. (2015). *Teoria das Situações Didáticas*. *In:* Machado, S. D. A (Org.). Educação matemática: uma (nova) introdução. São Paulo: Editora EDUC, p. 77-111.

International, I. M. (2019). *Les anciens membres de l'IMI. 2019*. Acesso: 10-Fevereiro-2019. Disponível em: <https://www.metapsychique.org/les-anciens-membres-de-limi/>.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. & Morgado, A. C. (2006). *A matemática do ensino médio*, vol. 2. Coleção do Professor de Matemática, SBM.

Oliveira, R. R. de, Andrade, M. H. de & Alves, F. R. V. (2018). Função geradora e equação característica no contexto de investigação histórica do modelo de Fibonacci fundamentada na Engenharia Didática. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, 5(41), p. 41–50.

Özdemir, M. (2018). Introducion to Hybrid Numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*. https://doi.org/10.1007/s00006-018-0833-3

Pommer, W. M. (2013). *A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares*.

Rodrigues, R. F., Menezes, M. B. de & Santos, M. C. dos. (2017). Licenciatura em matemática e o percurso de estudo e pesquisa: uma proposta do modelo epistemológico de referência para o ensino e aprendizagem do conceito de função. *Revista de Educação em Ciências e Matemática*, 14(27), p. 36-50.

Santos, A. A. dos & Alves, F. R. V. (2017). A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática**.** *Acta Scientiae*, 19(3), p. 447-465.

Santos, A. P. R. A. & Alves, F. R. V. (2018). A Engenharia Didática para o ensino de olimpíadas de Matemática: Situações Olímpicas com o amparo do software GeoGebra. *Góndola, Ensenanza y Aprendizage de las Ciencias*, 12(1), p. 141-154. http://doi.org/10.14483/23464712.11732

Silva, K. A. P. da, Vertuan, R. E. & Silva, J. M. G. da. (2018). Ensino por investigação nas aulas de matemática do curso de licenciatura em química. *Revista de Educação em Ciências e Matemática - Especial Saberes Profissionais do Professor de Matemática*, 14(31), p. 54-72.

Slisko, J. (2020). Lo que pueden aprender los estudiantes a partir del error de Fibonacci al resolver el problema “El león en el pozo”. *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias*, 15(2), p. 216-238. https://doi.org/10.14483/23464712.16041

Stewart, I. (1996). Tales of a neglected number. *Mathematical Recreations - Scientific American*, 274, p. 102–103.

Szynal-Liana, A. (2018). The horadam hybrid numbers. *Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications*, 38(1), p. 91-98. https://doi.org/10.7151/dmgaa.1287

Szynal-Liana, A. & Wloch, I. (2019). On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Hybrid Numbers.*Annales Mathematicae Silesianae,* p. 276-283. https://doi.org/10.2478/amsil-2018-0009

Vieira, R. P. M. & Alves, F. R. V. (2019). A Sequência de Padovan e o número plástico: uma análise prévia e a priori. *Research, Society and Development*, 8(8), p. 1-21. http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i8.1212.

Voet, C. & Schoonjans, Y. (2012). Benidictine thought as a catalist for 20tm century liturgical space: the motivation behind dom hans van der laan s aesthetic church arquitectury. *Proceeding of the 2nd international conference of the Europa Architetural History of Network*, p. 255–261.

Spinadel, V. M. W. de & Buitrago, A. R. (2009). Towards van der laan’s plastic number in the plane. *Journal for Geometry and Graphics*, 13(2), p. 163–175.

Witford, A. K. (1977). Binet's formula generalized. the fibonacci quarterly. The Fibonacci Quarterly, 15(1), p. 21.

NOTAS DA OBRA

Título da obra
O Processo De Hibridização Da Sequência De Padovan: Uma Experiência No Curso De Licenciatura Em Matemática

Renata Passos Machado Vieira
Doutoranda em Ensino (RENOEN-Pólo UFC) - Universidade Federal do Ceará
Universidade Federal do Ceará, Matemática, Fortaleza, Brasil
re.passosm@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1966-7097

Milena Carolina dos Santos Mangueira
Mestra em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Matemática, Fortaleza, Brasil
milenacarolina24@gmail.com
http://orcid.org/0000-0002-4446-155X

Rosalide Carvalho de Sousa
Mestra em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Matemática, Fortaleza, Brasil
rosalidecarvalho@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8059-1159

José Gleison Alves da Silva
Mestre em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza-Ceará, Brasil
Gleison.profmat.seduc@gmail.com
https://orcid.org/ 0000-0002-3093-0239

Francisco Regis Vieira Alves
Doutor em Educação
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza-Ceará, Brasil
fregis@gmx.fr
https://orcid.org/0000-0003-3710-1561

Endereço de correspondência do principal autor
Av. Treze de Maio, 2081 - Benfica, 60040-531, Fortaleza, CE, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Aos coautores e demais pesquisadores do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará e do Programa de Pós-graduação em Rede de Ensino (RENOEN).

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: F. R. V. Alves, R. P. M. Vieira, M. C. dos S. Mangueira, R. C. de Sousa, J. G. A. da Silva
Coleta de dados: R. P. M. Vieira, M. C. dos S. Mangueira, R. C. de Sousa, J. G. A. da Silva
Análise de dados: R. P. M. Vieira, M. C. dos S. Mangueira, R. C. de Sousa, J. G. A. da Silva
Discussão dos resultados: F. R. V. Alves, R. P. M. Vieira, M. C. dos S. Mangueira, R. C. de Sousa, J. G. A. da Silva
Revisão e aprovação: F. R. V. Alves

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no artigo e na seção "Materiais suplementares".

FINANCIAMENTO
A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap).

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Foi obtido o consentimento escrito dos participantes

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Aprovação do comitê de ética, número de processo: 3.314.835, data: 09 de maio de 2019.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Sr. Méricles Thadeu Moretti.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 27-05-2022 – Aprovado em: 05-09-2022