

EXPLORAÇÃO DA PROBABILIDADE GEOMÉTRICA NA SALA DE AULA COM O GEOGEBRA

Exploring Geometric Probability in the Classroom with GeoGebra

Fernanda Vital de **PAULA**
Universidade Federal do Norte Tocantins, Araguaína, Brasil
fernandavital@uft.edu.br
<https://orcid.org/0000-0002-7936-8937>

Pedro Martins de Sousa **JUNIOR**
Universidade Federal do Norte Tocantins, Araguaína, Brasil
pedrojr.com70@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-8173-2873>

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo ●

RESUMO

A probabilidade é tratada na Educação Básica, na maioria das vezes, conforme a abordagem Laplaciana. Tendo em vista que diversos pesquisadores relatam a dificuldade apresentada pelos estudantes na aprendizagem da probabilidade, esse trabalho se baseia na ideia de que a exploração da probabilidade por outras abordagens pode permitir uma melhor compreensão dos conteúdos probabilísticos por um maior número de estudantes. Portanto, esse artigo tem o objetivo de descrever uma proposta didática para a Educação Básica que trate a probabilidade sob a abordagem geométrica. Tal proposta envolve o desenvolvimento de atividades interativas por meio do *software* GeoGebra e possibilita a abordagem de conteúdos probabilísticos e geométricos aliadamente. Os resultados obtidos evidenciam a possibilidade de aliar tecnologia, probabilidade e geometria, ao decorrer dos anos da Educação Básica, potencializando a aprendizagem da Probabilidade.

Palavras-chave: Probabilidade Geométrica, Educação Básica, BNCC, *Software*

ABSTRACT

Probability is treated in Basic Education, most of the time, according to the Laplacian approach. Considering that several researchers report the difficulty presented by students in learning probability, this work is based on the idea that the exploration of probability through other approaches can allow a better understanding of probabilistic contents by a greater number of students. Therefore, this article aims to describe a didactic proposal for Basic Education that deals with probability under the geometric approach. This proposal involves the development of interactive activities through the GeoGebra software and allows the approach of probabilistic and geometric contents allied. The results obtained show the possibility of combining technology, probability and geometry, over the years of Basic Education, enhancing the learning of Probability.

Keywords: Geometric Probability, Basic Education, BNCC, *Software*

1 INTRODUÇÃO

A Probabilidade é um ramo da Matemática que tem, como principal objeto de estudo, os fenômenos aleatórios. No que se refere à Educação Básica, o ensino de conteúdos probabilísticos está previsto pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em todos os anos, desde o 1º ano do Ensino Fundamental (EF).

Embora, na maioria das vezes, a Probabilidade seja tratada na Educação Básica via abordagem Laplaciana ou Clássica que depende da quantidade de casos favoráveis e da quantidade total de casos, existem outras abordagens possíveis para seu ensino e aprendizagem, a saber; a abordagem Subjetiva, baseada nos conhecimentos e vivências do indivíduo, abordagem Frequentista, que se baseia na repetição dos experimentos, abordagem Axiomática, que trata a probabilidade por meio de axiomas e a abordagem Geométrica, que calcula probabilidades por meio de objetos geométricos.

Uma das possibilidades, vislumbradas neste trabalho, para garantir a aprendizagem da Probabilidade é explorá-la e apresentá-la aos estudantes da Educação Básica por meio de todas as abordagens possíveis. Neste sentido, este artigo tem o objetivo de apresentar uma proposta didática para o EF por meio da abordagem Geométrica da Probabilidade. Destaca-se que, em termos metodológicos, foi utilizada a pesquisa bibliográfica que, segundo Gil (2002, p. 44) é desenvolvida a partir de material já existente, principalmente livros e artigos científicos.

De modo geral, a proposta pretende o ensino e aprendizagem da Probabilidade por meio da abordagem Geométrica, utilizando o *software* GeoGebra e interligando dois conteúdos vistos em Matemática, na Educação Básica, por meio da tecnologia: Probabilidade e Geometria.

No que se refere à organização do artigo, faz-se uma contextualização inicial acerca da história e das abordagens da probabilidade, tendo em vista que, segundo Mendes (2009, p. 15), apresentar os processos históricos que envolvem o desenvolvimento do tópico matemático a ser abordado ajuda na compreensão tanto do significado das ideias como no entendimento da sua importância.

Posteriormente, as principais ferramentas do GeoGebra são apresentadas e, por fim, apresentam-se algumas atividades interativas probabilísticas envolvendo objetos geométricos de forma a servir como base para que o professor crie seus próprios problemas com o uso do GeoGebra, situando o leitor sobre quando aplicar cada conteúdo focando-se nas habilidades previstas pela BNCC no que se refere à Geometria e Probabilidade dos

anos finais do EF.

2 HISTÓRIA E ABORDAGENS DA PROBABILIDADE

Segundo a BNCC, uma das competências específicas da Matemática no EF é compreender a Matemática como uma ciência humana que surge a partir das preocupações e interesses de diversas culturas ao longo da história, além de estar em constante movimento (BRASIL, 2018, p. 267). Neste sentido, um dos recursos que possibilitam tal compreensão é a história da matemática, que pode ser utilizada para apresentar aos alunos os contextos históricos do desenvolvimento de determinados conteúdos matemáticos. Portanto, esta seção tem o objetivo de contextualizar o leitor para o entendimento e localização temporal das abordagens probabilísticas existentes que serão apresentadas, a fim de contextualizar a abordagem geométrica.

O termo Probabilidade é derivado do latim *probare*, que significar provar ou testar. A Probabilidade possui suas raízes nos jogos de azar e apostas que, existentes desde as primeiras civilizações. Neste sentido, o precursor do dado que conhecemos hoje, por exemplo, denominado astrágalo, foi datado por historiadores em culturas de até 40 mil anos atrás na Mesopotâmia e difundido entre as culturas da antiguidade, no Egito, Grécia e Roma. No caso dos egípcios, foram encontradas em tumbas, pinturas de pessoas jogando o que acredita-se ser estes dados primitivos. Já na Grécia, além destes dados serem utilizados para apostas, eles também eram utilizados para prever o futuro (MLODINOW, 2009).

Apesar da importância dada aos jogos em previsões, não existem registros de qualquer tentativa de entender como funcionavam as probabilidades naquela época. Neste sentido, Mlodinow (2009) demonstra o desconhecimento sobre probabilidade naquela época, ao explicar que no jogo dos gregos e romanos eram utilizados quatro astrágalos sendo que a jogada mais valiosa seria obter todas as faces possíveis, uma em cada dado, sendo que a jogada mais rara e, portanto, mais valiosa, seria na verdade obter em todas as peças a mesma face, sendo uma das faces menores.

Além dos jogos de azar, também existiram outras situações que permitiram o desenvolvimento da probabilidade pelos mesopotâmicos e fenícios, depois gregos e romanos e, posteriormente, pelos italianos na determinação de seguros para as viagens marítimas (VIALI, 2008). Não se sabe ao certo quais os cálculos ou métodos usados para

calcular os valores dos seguros naquela época, mas supõe-se que eram feitas estimativas da probabilidade de haver algum acidente.

Os primeiros registros sobre jogos de azar datam de 960 d.C. e foram feitos pelo bispo belga Wibold de Cambrai. Ele enumerou sequências obtidas no lançamento de três dados, listando 56 virtudes relacionadas aos resultados. Tal enumeração foi criada pelo bispo com objetivo moral, visto que a igreja proibia jogos de azar na época (VIALI, 2008).

Posteriormente, o desenvolvimento da probabilidade deu-se a partir de problemas propostos por jogadores aos matemáticos. Nessa fase, têm-se colaboradores e autores de diversos em vários países. Na Itália, contamos com a obra *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et proportionalitá*, datada de 1494, e escrita pelo frei Luca Pacioli. Apesar da obra não ter apresentado novos estudos, a mesma apresentou exemplos importantes para a formalização posterior do cálculo de probabilidades como “A e B estão jogando um jogo justo de balla. Eles concordam em continuar até um deles ganhar seis rodadas. O jogo realmente para quando A ganhou cinco e B três. Como as apostas devem ser divididas?” (DAVID, 1962), além de ter inspirado Cardano e Tartaglia.

Tartaglia influenciou bastante o início do pensamento probabilístico. Ao ter contato com o livro de Pacioli, resolveu problemas propostos ali da sua própria maneira em seu livro *General Trattato di Numeri et Misura*. Na mesma época, a Probabilidade também teve contribuições de Girolamo Cardano por meio de uma publicação ocorrida apenas depois da sua morte. Trata-se de um tratado com 32 capítulos, *Liber de Ludo Aleae* (O Livro dos Jogos de Azar), consistindo no primeiro livro teórico dedicado aos eventos aleatórios. Mlodinow (2009) afirma que o livro não era perfeito no sentido de que Cardano se equivocou em diversos pontos e levava em conta apenas os processos, como o lançamento de um dado e exalta a forma como Cardano trata as incertezas do acaso de modo surpreendente por sua simplicidade e eficácia.

A próxima grande contribuição veio por meio de um problema interessante proposto a Galileu Galilei que considerava o lançamento de três dados. O Grão-Duque de Toscana percebeu que, aparentemente, ao serem lançados três dados, somando os resultados obtidos em suas faces, era mais comum chegar ao resultado 10 que ao resultado 9, apesar de que, pelo que já havia sido analisado até o momento, as duas somas possuíam a mesma quantidade de combinações possíveis. Ao repetir e estudar o experimento, Galilei confirmou a hipótese do Grão-Duque, encontrando ao todo 27 possibilidades para a soma 10 e 25 para a soma 9, o que justifica a soma 10 ser obtida com maior frequência.

Grande parte dessas ideias, estudos e pensamentos matemáticos surgiram na Itália e continuaram mesmo depois de Galilei, mas a França ganhou seu espaço a partir do fortalecimento do movimento renascentista. Um dos principais matemáticos franceses do século XVII, que colaborou com o desenvolvimento da Probabilidade, foi Pierre de Fermat. Apesar de não ter publicado muitas obras, seu nome é constantemente associado ao do matemático Blaise Pascal, com quem mantinha correspondências que impulsionaram a formalização do cálculo de Probabilidade (VIALI, 2008).

O que motivou as correspondências e os esforços de Pascal e Fermat na Probabilidade, segundo Viali (2008), foram os seguintes dois problemas propostos por Antoine de Gombaud; o da divisão de apostas e dos dados. Tais correspondências levaram a um crescimento constante do interesse pela Probabilidade. O tratado publicado por Pascal, intitulado *Traité du Triangle Arithmétique*, foi lançado no período em que mantinha sua discussão com Fermat e, posteriormente, Pascal utilizou as propriedades do triângulo aritmético no cálculo de problemas de chances de jogos de azar.

O primeiro a publicar um livro teórico de Probabilidade foi Christiaan Huygens e, talvez o primeiro também a reconhecer a potencialidade que a Probabilidade tinha, de acordo com o que o próprio disse ao justificar a publicação de *De Ratiociniis in Ludo Aleae*: “não estamos tratando apenas com jogos, mas com os fundamentos de uma nova teoria, tanto profunda como interessante.” (GADELHA, 2004, p.5). Huygens teve contato com as correspondências de Pascal e Fermat quando ainda eram trocadas e, a partir dos problemas discutidos, apresentou sistematicamente novas proposições, definindo as regras da probabilidade para a época, além de propor o conceito da esperança matemática (GADELHA, 2004). Seu trabalho também foi responsável por influenciar outros matemáticos como Jakob Bernoulli.

Jakob Bernoulli foi responsável pela sistematização da probabilidade sob a abordagem combinatória, seguindo as ideias de Fermat, mas buscando deixar de lado os seguros e os jogos de azar (DAVID, 1962). Segundo Vialli (2008), dos estudos de Jakob originou-se um dos primeiros teoremas da probabilidade, a Lei dos Grandes Números. Seus principais resultados foram publicados postumamente, em 1713.

Apenas alguns anos depois, em 1718, Abraham de Moivre publicou um livro chamado *The Doctrine of Chance* seguido anos depois pela obra *Miscellanea Analytica*. No primeiro, apresentou o conceito de independência em problemas envolvendo jogos pela primeira vez, além de tratar sobre mortalidade e alguns fundamentos da teoria das anuidades (VIALI, 2008).

Já no século XIX, foi publicado pelo francês Pierre-Simon Laplace, a obra *Theórie Analytique des Probabilités*, considerada um dos maiores clássicos da área. Em estudo sobre astronomia, Laplace adquiriu interesse pela Teoria da Probabilidade, pois esta era uma ferramenta importante em seus cálculos. *Theórie Analytique des Probabilités* foi lançada em dois volumes, o primeiro sendo um estudo sobre as funções geradoras e expressões utilizadas na probabilidade e o segundo, tratando a definição da probabilidade clássica e os cálculos envolvidos. Nesta obra, ele também apresenta uma adaptação do método da Agulha de Buffon, utilizado para estimar o valor de π .

Muitos outros matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da Probabilidade e, no século XX, a Teoria da Probabilidade adquiriu um rigor matemático por meio de axiomas, definições e teoremas, pela publicação de um livro por Andrei Nikolaevich Kolmogorov, cujo título pode ser traduzido como Fundamentos da Teoria das Probabilidades, em 1933. No livro, Kolmogorov fundamenta a teoria da Probabilidade na teoria dos conjuntos e sistematiza axiomas que já eram utilizados de forma não explícita.

Ao longo de todo o seu desenvolvimento, a Teoria da Probabilidade recebeu diferentes abordagens, possuindo cada uma delas sua importância e valiosa contribuição no desenvolvimento do raciocínio probabilístico. São elas: Clássica, Frequentista, Subjetiva, Axiomática e Geométrica.

A abordagem *Clássica* da probabilidade, muitas vezes chamada de definição Laplaciana da probabilidade, tem esse nome pois Laplace foi o primeiro a realmente definir, de forma sistemática, o cálculo de probabilidades, apesar de Blaise Pascal ter sido o primeiro a propor o seu tratamento científico e de Jakob Bernoulli tê-lo utilizado. Laplace definiu a probabilidade clássica, segundo Coutinho (1994, p. 21-22), da seguinte maneira:

Primeiro princípio: (a probabilidade) é a relação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Segundo princípio: mas isto supõe os diversos casos igualmente possíveis. Se não o são, determina-se primeiro suas possibilidades respectivas, cuja justa apreciação é um dos pontos mais delicados da teoria do acaso. Então, a probabilidade será a soma das possibilidades de cada caso favorável.

Já a abordagem *Frequentista* foi utilizada pela primeira vez por Jakob Bernoulli, apesar de não ser definida exatamente ali, mas no século XX, levando-se em conta dados estatísticos. Nessa abordagem, é chamada de probabilidade de um evento o número do qual a frequência relativa do evento se aproxima, após uma série de repetições do experimento.

Na abordagem *Subjetiva*, não são utilizados cálculos. Nela, é considerado o julgamento pessoal do observador, baseando-se em seu conhecimento e experiências. Observa-se a abordagem subjetiva, por exemplo, na forma como um trabalhador do campo sabe a época em que a probabilidade de chover será maior e em que época ele tem maior probabilidade de obter uma boa colheita.

Com a formalização rigorosa de Kolmogorov, surgiu a abordagem *Axiomática* da Probabilidade, que traz os conceitos probabilísticos por meio de definições e teoremas, sendo a abordagem mais utilizada no meio acadêmico e formal.

Por fim, a abordagem *Geométrica* é associada a Georges-Louis Leclerc (1707-1788), conhecido como Conde de Buffon, por ter proposto o problema famoso da Agulha de Buffon. Este problema consiste em calcular a probabilidade de uma agulha lançada em um plano com linhas paralelas tocar em uma destas linhas.

Para calcular essa probabilidade, é definido um comprimento l para a agulha e uma distância d entre as linhas, onde $l \leq d$ e, então, lança-se a agulha n vezes no plano e conta-se os casos onde a agulha toca uma das linhas. A partir daí, utilizando a definição Laplaciana, calcula-se a razão entre o número de casos em que a agulha toca uma das linhas (casos favoráveis) e n . Algo interessante a se destacar é que quanto maior a quantidade de repetições do experimento (n), mais o resultado se aproxima de π .

Para melhor estabelecer uma relação entre os fatos supracitados e as contribuições que mais tiveram impacto no desenvolvimento da Teoria da Probabilidade no que diz respeito às suas abordagens apresentadas, apresenta-se a Figura 1 que traz estes acontecimentos por meio de uma linha do tempo.

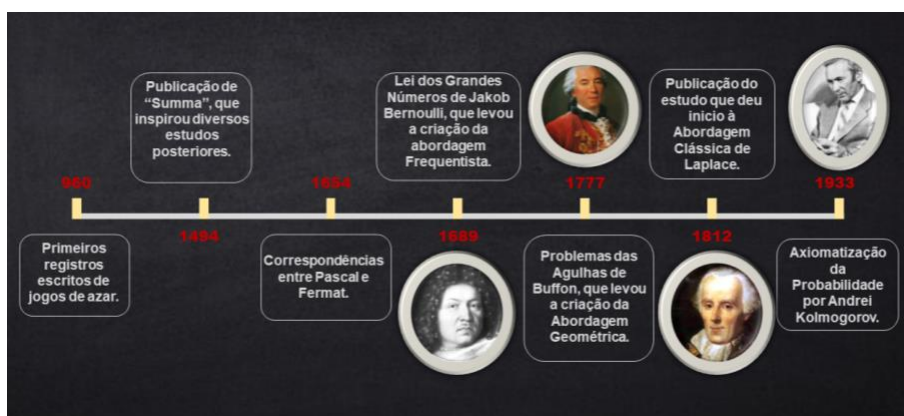


Figura 1: Linha do tempo
Fonte: elaborada pelos autores

A abordagem geométrica da Probabilidade não é tratada frequentemente na Educação Básica, onde o cálculo de probabilidade costuma ser baseado na contagem de casos favoráveis e casos possíveis, com foco na abordagem Clássica. Embora a omissão, tal abordagem apresenta potencialidade no ensino e aprendizagem de probabilidade por permitir que os estudantes da Educação Básica acessem seus conteúdos sob uma nova ótica que pode ser melhor entendida por parte dos alunos. Sobre o ensino da Probabilidade se basear na abordagem Clássica, por meio da análise de coleções de livros didáticos, Soares (2018, p.65) afirma que:

Concluiu-se que as coleções nacionais analisadas não exploram satisfatoriamente a concepção Frequentista de probabilidade e não priorizam a discussão sobre a questão da aleatoriedade. Utilizam a concepção clássica para apresentar a probabilidade como uma razão e exploram o fato de que se trata de uma probabilidade teórica. Pouco apresentam atividades de investigação ou de resolução de problemas multidisciplinares que subsidiem o estudante a melhor compreender sua realidade e familiarizar-se com modos de lidar com a aleatoriedade. (SOARES, 2018, p.65).

São diversos autores e pesquisadores que relatam a dificuldade apresentada pelos alunos na aprendizagem de Probabilidade. Pontes e Núñez (2019), por exemplo, ao analisar o desempenho dos alunos que participaram do ENEM entre os anos de 2013 a 2016, perceberam que as questões envolvendo Probabilidade e Estatística raramente apresentavam uma boa quantidade de acertos e, analisando os distratores, observou-se que entre os principais motivos para os erros estão a má interpretação das questões e dos dados apresentados. Além disso, eles também afirmam que, com base nas dificuldades apresentadas pelos alunos, o professor deve buscar novas maneiras de levar os conteúdos para sala de aula, promovendo uma aprendizagem significativa. Já Sturion *et al.* (2018), afirma que o ensino de Estatística e Probabilidade nas escolas públicas têm mostrado muitas lacunas que prejudicam notadamente a formação de nossos alunos no que concerne à sua capacidade crítica de compreensão.

Além do fato da abordagem Geométrica proporcionar uma maneira diferente de se observar os eventos aleatórios e entender os conceitos probabilísticos, ela também permite a abordagem de conceitos da Geometria, unindo dois grandes campos da Matemática e permitindo que ambos sejam desenvolvidos conjuntamente. Tal fato vai ao encontro da seguinte competência da Matemática para o EF, conforme a BNCC:

Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de

construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2018, p.267).

Uma forma de desenvolver a abordagem geométrica da Probabilidade e promover a interação Probabilidade-Geometria no contexto escolar seria utilizar conteúdos de Geometria já apresentados aos alunos em anos e aulas anteriores ou, até mesmo, apresentar conteúdos de Probabilidade e Geometria conjuntamente tendo em vista que tais conteúdos são objetos de conhecimento a serem abordados em todos os anos da Educação Básica, conforme a BNCC.

Para tal, o GeoGebra é proposto neste trabalho como ferramenta promovedora de tal interação por permitir a realização de atividades envolvendo objetos geométricos utilizando animações. Nesse caso, a abordagem Geométrica torna possível o ensino e aprendizagem de conceitos probabilísticos e geométricos de modo conjunto e prático.

Alguns conceitos utilizados na abordagem Geométrica como a probabilidade do comprimento, área e volume segundo Gondim (2014, pg. 14-19) devem ser apresentados para compreensão das atividades que serão propostas neste trabalho.

2.1 PROBABILIDADE DO COMPRIMENTO

Em problemas probabilísticos que utilizam o comprimento, faz-se necessária a noção de segmento para suas resoluções. Sejam X e Y pontos de um segmento de extremos A e B conforme a Figura 2.



Figura 2: Segmento XY contido no segmento AB
Fonte: elaborado pelos próprios autores

A probabilidade de um ponto pertencente ao segmento AB também pertencer ao segmento XY é proporcional ao comprimento de XY independentemente da posição dos pontos X e Y , assim:

$$P(\text{um ponto de } AB \text{ pertencer a } XY) = \frac{\text{comprimentode } XY}{\text{comprimentode } AB}$$

2.2 PROBABILIDADE DA ÁREA

Problemas probabilísticos envolvendo figuras demandam conhecimentos sobre a área de determinadas regiões. Considere uma região X no plano, contida em uma região A , como na Figura 3.

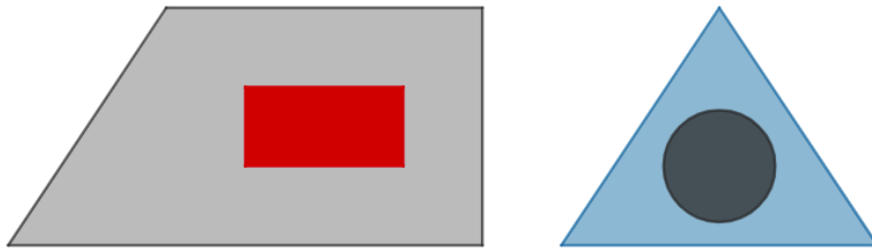


Figura 3: Retângulo contido em um trapézio e círculo contido em um triângulo
Fonte: elaborado pelos próprios autores.

Para calcular a probabilidade de um ponto pertencente à região A pertencer também à região X , faz-se:

$$P(\text{um ponto de } A \text{ pertencer a } X) = \frac{\text{área de } X}{\text{área de } A} .$$

2.3 PROBABILIDADE DO VOLUME

Em alguns problemas de probabilidade geométrica, observa-se a utilização de sólidos geométricos. Nesse caso, tem-se situações como supor um corpo V no espaço, contido em um outro corpo W , conforme exemplificado na Figura 4.

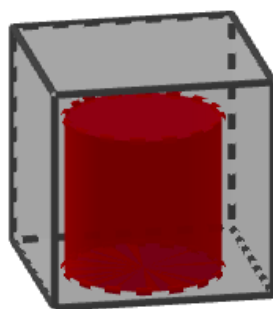


Figura 4: Cilindro contido em um cubo
Fonte: elaborado pelos próprios autores

Nesse caso, a probabilidade de um ponto de V pertencer a W é:

$$P(\text{um ponto em } V \text{ pertencer a } W) = \frac{\text{volume de } V}{\text{volume de } W} .$$

3 GEOGEBRA

Criado pelo austríaco Markus Hohenwarter, em 2001, o GeoGebra tem o objetivo de auxiliar o ensino e aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos e reúne, em um único ambiente, recursos gráficos, numéricos, simbólicos e de programação utilizados para a Geometria, Aritmética, Álgebra, Funções, Estatística e Probabilidade (BORTOLOSSI, 2016, pg. 430). Trata-se de um dos *softwares* mais utilizados no Brasil no que se refere ao ensino de Matemática. Muito disso se deve à sua grande versatilidade e simplicidade, além de não exigir um computador potente para seu uso. O GeoGebra está disponível também para *smartphones*, gratuitamente.

No que se refere à abordagem Geométrica da Probabilidade, o *software* GeoGebra pode ser um aliado, levando-se em conta a gama de possibilidades que o mesmo oferece no que diz respeito à construção e desenvolvimento de atividades, animações e cálculos voltados para diversos conteúdos da Matemática, principalmente aqueles relacionados à Geometria.

Aqui, serão apresentadas algumas ferramentas e características do *software*, necessárias para a criação e aplicação das animações que serão propostas posteriormente. Para tal, utilizou-se como base a versão GeoGebra Clássico 6 para computadores, destacando que boa parte de seu funcionamento é compatível também com outras versões.

Em relação à interface, logo ao ser iniciado, o GeoGebra apresenta uma janela de visualização 2D contendo uma janela de álgebra, uma barra de ferramentas e um menu para outras ferramentas, conforme a Figura 5.



Figura 5: Interface inicial
Fonte: elaborado pelos autores

A barra de ferramentas é dividida em 11 abas diferentes, cada uma com diversas ferramentas. Aqui, serão apresentadas as mais usuais ou aquelas que foram utilizadas no

desenvolvimento das animações que serão propostas. Pode-se encontrar detalhes sobre todas as ferramentas do GeoGebra em Siqueira (2017).

O primeiro grupo de ferramentas é formado por “Mover”, “Função à mão livre” e “Caneta”, das quais será utilizada apenas a primeira opção nas atividades propostas. A mesma serve para selecionar ou mover algum objeto da janela de visualização. É indicado que, a cada vez que qualquer outra ferramenta for usada, o usuário retorne à ferramenta “Mover” para não adicionar novos objetos indesejados. Tal retorno pode ser realizado pela tecla “Esc”.

O segundo grupo é formado pelas ferramentas que envolvem a criação de pontos, mostrados na Figura 6, como: Ponto, Ponto em Objeto, Vincular/Desvincular Ponto, Intersecção de Dois Objetos, Ponto Médio ou Centro.

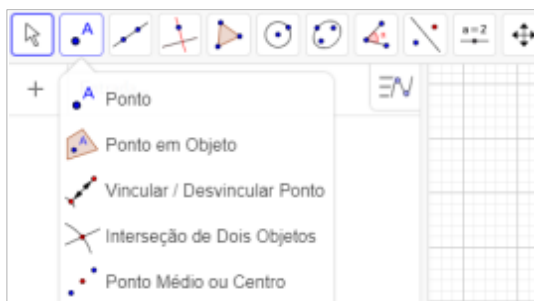


Figura 6: Ferramentas envolvendo pontos
Fonte: elaborado pelos próprios autores

O terceiro grupo envolve a criação de retas são: Reta, Segmento, Segmento com Comprimento Fixo, Semirreta, Caminho Poligonal. O quarto grupo também envolve retas, porém são retas em relação a outros objetos. Conforme a Figura 7, tem-se o seguinte: Reta Perpendicular, Reta Paralela, Mediatriz, Bissetriz, Reta Tangente, Reta Polar ou Diametral, Reta de Regressão e Lugar Geométrico.

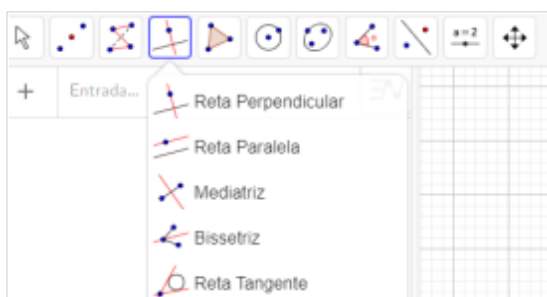


Figura 7: Ferramentas de retas específicas
Fonte: elaborado pelos próprios autores

A quinta aba de ferramentas é inteiramente composta por polígonos, cada uma com sua função específica, sendo: Polígono, Polígono Regular, Polígono Rígido e Polígono Semideformável.

Nos próximos grupos de ferramentas, foram utilizadas apenas algumas nas atividades propostas, tendo em vista que da esquerda para a direita, as abas ficam cada vez mais específicas. Neste sentido, utilizou-se: Círculo dados Centro e Um de seus Pontos, Círculo dados Centro e Raio, Compasso, Círculo definido por Três Pontos das ferramentas voltadas para círculos. Das ferramentas exibidas pela Figura 8, utilizou-se Ângulo, Ângulo com Amplitude Fixa Distância, Comprimento ou Perímetro e Área. Do penúltimo grupo de ferramentas, utilizou-se Controle Deslizante e Texto.

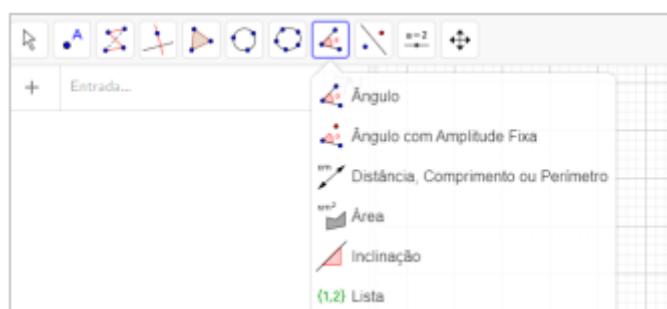


Figura 8: Ferramentas para construção de ângulos
Fonte: elaborado pelos autores

O Geogebra também oferece aos seus usuários uma janela de visualização 3D. Para acessá-la, clica-se no ícone apontado pela seta na Figura 9 que abrirão 6 opções, de modo que a opção destacada pelo círculo em vermelho deve ser selecionada e exibirá a opção “Janela de Visualização 3D” sublinhada em vermelho que deve ser clicada.

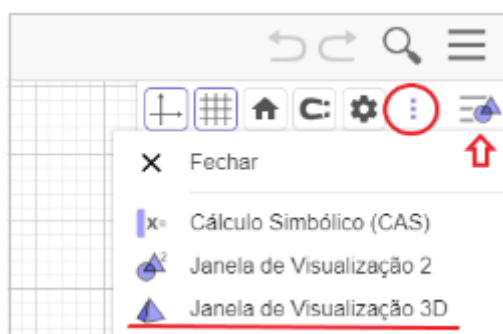


Figura 9: Abrindo a janela de visualização 3D
Fonte: elaborado pelos autores

Na Barra de Ferramentas da janela de visualização 3D, têm-se ferramentas diferentes da janela 2D. Algumas delas são exibidas pela Figura 10.



Figura 10: Objetos 3D
Fonte: elaborado pelos próprios autores

4 ATIVIDADES PROPOSTAS

As atividades propostas não têm o objetivo de que alunos apenas respondam questões, e sim de que consigam manipular objetos e observar as relações matemáticas envolvidas nesta manipulação. Para a sala de aula, o ideal é que o professor crie suas próprias atividades interativas a fim de inseri-las adequadamente no contexto dos alunos para um melhor entendimento. Neste caso, não é necessário que as atividades sejam extremamente elaboradas exigindo conhecimentos mais aprofundados sobre o *software*.

Para inspiração aos leitores e professores interessados na elaboração de atividades interativas no Geogebra ou desenvolvimento das mesmas em sala de aula no ensino de Probabilidade por meio da abordagem Geométrica, serão apresentados alguns exemplos de atividades que utilizam recursos básicos do GeoGebra como protocolo de construção. Os valores podem ser modificados pelo usuário conforme desejar.

4.1 ATIVIDADE 1

Tal atividade se refere ao cálculo de probabilidade envolvendo o comprimento de um segmento. Tendo em vista que trata-se de uma atividade interativa, não sendo possível exibi-la neste documento, um *print* da mesma é exibido na Figura 11, a fim de ilustrá-la aos leitores. Para as demais atividades que serão apresentadas, as ilustrações das mesmas serão dadas da mesma maneira.

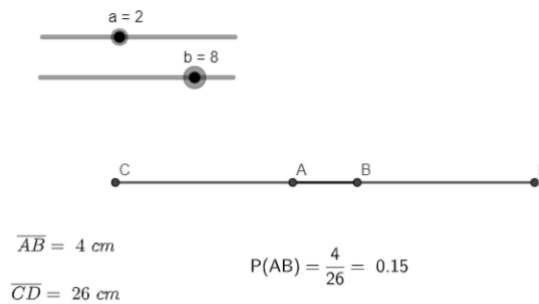


Figura 11: Print da Atividade 1
 Fonte: elaborado pelos autores

Para criar a atividade, deve-se seguir o seguinte protocolo:

1. Criar dois controles deslizantes “a” e “b”, sendo o primeiro com valor mínimo 0 e máximo 5 e o segundo com valor mínimo igual a 0 e máximo igual a 10;
2. Criar pontos a partir da caixa de entrada definidos como: $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (-5-b, 0)$ e $D = (5+b, 0)$;
3. Com a ferramenta “segmento” selecionada, clicar nos pontos A e B e C e D , criando os segmentos “f” e “g”, respectivamente.
4. Criar duas caixas de texto, cada uma para exibir o comprimento de cada segmento. Sugere-se que sempre seja selecionada a opção “Fórmula LaTeX”. Na primeira caixa de texto inserir “ $\overline{AB} = f \text{ cm}$ ”, sendo que o f deve ser selecionado na aba com o símbolo do GeoGebra nas opções avançadas da caixa de texto. O segundo texto é elaborado de forma semelhante, mas com CB ao invés de AB e selecionando o g .
5. Para o caso em que o objetivo do desenvolvimento da atividade consiste na observação e exploração do aluno, recomenda-se a realização dos cálculos no próprio GeoGebra em caixas de texto, como exibido na Figura 11. Para tal, primeiramente, digita-se na caixa de entrada a operação “ f/g ” que pode ser denominada como “c”, por exemplo. Na caixa de texto, seleciona-se a opção “Fórmula LaTeX” e digita-se “ $\frac{f}{g} = c$ ” sendo f , g e c selecionados na aba com símbolo do GeoGebra nas opções avançadas do texto.

4.2 ATIVIDADE 2

Tal atividade, dada pela Figura 12, consiste no cálculo de probabilidade envolvendo a área de um círculo e de um retângulo, tendo o seguinte protocolo de construção:

1. Criar dois controles deslizantes, sendo um vinculado ao retângulo e o outro ao raio do círculo, ambos com valor mínimo igual a 0 e máximo igual a 5;
2. Criar 4 pontos: $A = (0-a, 0-a)$, $B = (0-a, 10+a)$, $C = (10+a, 10+a)$, $D = (10+a, 0-a)$, sendo “a” o primeiro controle deslizante;
3. Com a ferramenta “Polígono”, ligar os pontos em ordem criando o polígono $ABCD$;
4. Com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”, selecionar o polígono $ABCD$, criando um novo ponto E ;
5. Com a ferramenta “Círculo: Centro e Raio” criar um círculo de centro “ E ” e raio “ r ”;
6. Criar caixas de texto de maneira semelhante ao passo 5 da atividade 1.

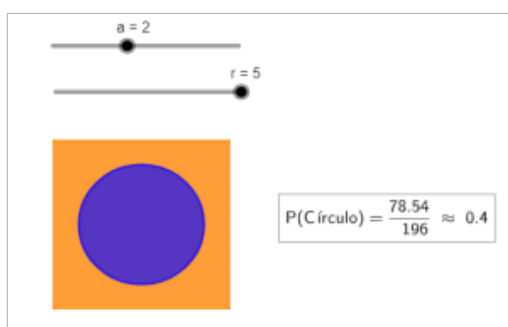


Figura 12: *Print da Atividade 2*
Fonte: elaborado pelos autores

4.3 ATIVIDADE 3

Esta atividade consiste no cálculo da probabilidade envolvendo os volumes de um cubo e de uma pirâmide de base quadrada, como visto na Figura 13.

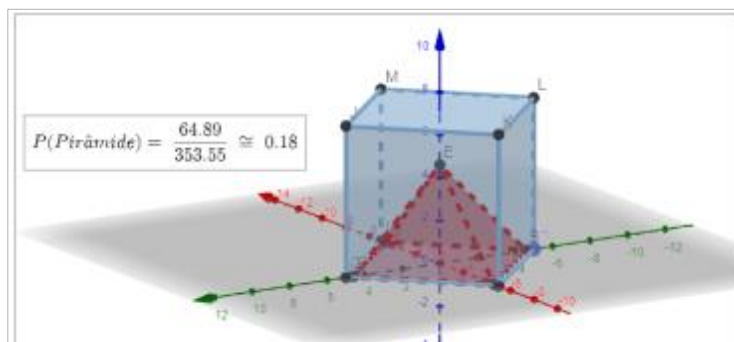


Figura 13: *Print da Atividade 3*
Fonte: elaborado pelos autores

O protocolo de construção desta atividade requer um pouco mais de atenção, pois precisamos utilizar as janelas 2D e 3D do GeoGebra, e é dado pelo seguinte:

Na janela 2D:

1. Criamos dois controles deslizantes “*a*” e “*b*”, sendo que “*a*” terá mínimo igual a 1 e máximo igual a 5, enquanto “*b*” terá mínimo igual a 0 e máximo 5;
2. Em seguida, cria-se os 7 pontos: $A = (-a, 0, 0)$, $B = (0, -a, 0)$, $C = (a, 0, 0)$, $D = (0, a, 0)$, $E = (0, 0, a)$, $F = (-b-5, 0, 0)$ e $G = (0, b+5, 0)$.

Na janela 3D:

3. Com a ferramenta “Pirâmide”, seleciona-se os pontos *ABCDE* em ordem para criar a pirâmide de base quadrada;
4. Com a ferramenta “Cubo”, clica-se nos pontos *F* e *G* para criar um cubo que contém a pirâmide;
5. Os textos são elaborados como nas atividades anteriores.

4.4 PONDERAÇÕES A RESPEITO DAS ATIVIDADES APRESENTADAS

Algumas ponderações a respeito do planejamento, inserção e desenvolvimento das atividades apresentadas em sala de aula serão realizadas nesta seção, a fim de colaborar com a prática docente, levando em consideração a BNCC que normatiza competências e habilidades a serem atingidas em cada etapa da Educação Básica.

Especificamente, na etapa dos anos finais do EF, a BNCC prevê algumas habilidades, envolvendo os conteúdos de Geometria e Probabilidade, que podem ser mobilizadas por meio das atividades interativas propostas nesta seção. Tais habilidades são apresentadas no Quadro 1. Por fim de simplificação, as habilidades referentes à Probabilidade estão destacadas em cinza. As demais se referem à Geometria.

Quadro 1: Habilidades para o EF (anos finais) segundo a BNCC

HABILIDADES	ANO
EF06MA24: Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.	6º
EF06MA30: Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.	

EF07MA30: Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).	7º
EF07MA31: Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.	
EF07MA32: Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas	
EF07MA34: Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.	
EF08MA19: Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.	8º
EF08MA21: Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.	
EF08MA22: Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.	
EF09MA19: Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.	9º
EF09MA20: Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.	

Fonte: BRASIL (2018)

A partir do Quadro 1, é possível observar que os conteúdos específicos referentes à Probabilidade e à Geometria não estão aglomerados em apenas um ano, mas distribuídos por todos os anos finais do EF. No 6º Ano, a BNCC propõe que os alunos aprendam a criar e manusear retas paralelas e perpendiculares, tanto em seus cadernos como em *softwares*, além de propor a resolução de problemas envolvendo o comprimento, o que seria uma boa oportunidade para usar problemas semelhantes à Atividade 1 e desenvolver também a habilidade EF06MA30 da área da Probabilidade no referido ano. Também é possível observar que a Atividade 3, por exemplo, envolvendo o volume de objetos, não seria adequada para o 6º Ano. A mesma seria adequada para o 9º Ano, quando é proposto o conteúdo envolvendo Volume de Prismas e Cilindros e habilidades como a EF09MA19. Neste último ano do EF, atividades envolvendo apenas o comprimento de um segmento de reta acabariam defasadas e, talvez, não despertassem o interesse dos alunos.

Conclusões similares às do parágrafo anterior, no que se refere à distribuição dos conteúdos ao longo dos anos finais do EF, podem ser obtidas com foco também nos anos iniciais do EF ou nos anos do Ensino Médio. Por esta condição e organização dos conteúdos de Matemática na Educação Básica, este trabalho não traz uma especificação do ano ao qual seriam dirigidas as atividades interativas apresentadas. Neste sentido, o objetivo principal deste artigo foi apresentar meios e exemplos para que os professores da

Educação Básica consigam criar suas próprias atividades de acordo com as necessidades de cada turma, por meio de um suporte para a criação de sequências didáticas diversas.

Uma forma de utilizar as atividades interativas como as que foram propostas seria disponibilizar objetos no GeoGebra para os alunos e propor que os mesmos escolham o valor que será utilizado para seus próprios cálculos, por exemplo. Os objetos devem ser criados pelo professor buscando abranger todas as propriedades matemáticas possíveis para determinado conteúdo, sendo permitido ao aluno conferir seus resultados com as ferramentas dentro do próprio aplicativo, mas ainda solicitando a realização dos cálculos que levam aos resultados exibidos. Desta forma, o aluno pode se configurar como um agente ativo do processo de ensino e aprendizagem e ainda percebe as aplicações da Probabilidade para além de jogos de azar.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É comum a Probabilidade ser apresentada aos estudantes por meio da abordagem Laplaciana durante a Educação Básica. Dado que tal abordagem é mais teórica, ela pode gerar dificuldades na aprendizagem de conceitos probabilísticos, tendo em vista que a mesma não permite a exploração prática de tais conceitos como a observação de eventos por meio de materiais concretos ou *softwares*, por exemplo. Levando em consideração a existência de outras abordagens, como a Geométrica, pode ser benéfico para o ensino e aprendizagem da Probabilidade sua apresentação e exploração em sala de aula, trazendo uma nova visão e possibilidades diversificadas aos alunos, sem deixar de lado as habilidades recomendadas pela BNCC e contribuindo com a percepção das relações existentes entre os conteúdos da Matemática.

Neste sentido, este trabalho exibiu maneiras de inserir e desenvolver a abordagem Geométrica em sala de aula por meio do GeoGebra. Tal *software* foi utilizado por ser intuitivo e promover a criação de atividades simples até as mais complexas, sendo adequado para a Educação Básica. Além disso, o trabalho também faz sua colaboração ao fortalecimento da bibliografia existente em português tratando a abordagem Geométrica, podendo servir de base para pesquisas futuras.

Para atingir tais resultados, primeiramente, o leitor foi contextualizado por meio da história da Probabilidade que apresentou os principais nomes que contribuíram para o desenvolvimento da teoria probabilística e a linha do tempo de surgimento das abordagens existentes. Posteriormente, exibiu-se um suporte básico para o uso do GeoGebra para que

mesmo os professores sem grandes conhecimentos sobre *softwares* matemáticos consigam criar suas próprias atividades interativas, baseando-se nas atividades que foram apresentadas.

Por fim, foi possível perceber que o GeoGebra pode ser uma ferramenta significativa para o ensino da Probabilidade aliada à Geometria, promovendo uma interação entre ambas, conforme recomendado pelo documento oficial responsável pela normatização da Educação Básica no Brasil, a BNCC.

REFERÊNCIAS

- Bortolossi, H. J. (2016) O Uso do Software Gratuito GeoGebra no Ensino e na Aprendizagem de Estatística e Probabilidade. *Vidya*, v. 36, (2), p. 429-440
- Ministério da Educação. (2018) *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília. Secretaria de Educação Básica
- Coutinho, C. Q. S. Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista: estudo epistemológico e didático. 1994. 151f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de pós-graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.
- David, F. N. Games, Gods and Gambling: a History of Probability and Statistical Ideas. Londres: Charles Griffin & Co., 1962.
- Gadelha, A. Uma Pequena História da Probabilidade. Notas de Aula Teoria de Probabilidade I. Rio de Janeiro, mar. 2004. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~viali/estatistica/mat2006/material/textos/hist_prob_Gadelha.pdf>. Acesso em: 03 de nov. de 2021.
- Gil, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. São Paulo: Atlas, 2002.
- Gondim, H. F. Probabilidade e probabilidade geométrica: conceitos e exemplos aplicáveis no ensino básico. 2013. 78f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de pós-graduação em Matemática em rede nacional. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Campo Grande.
- Mendes, I. A. Matemática e investigação em sala de aula. 2. ed. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2009.
- Mlodinow, L. O Andar do Bêbado. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora: 2009.
- Pontes, J. & núñez, I. Questões de Estatística e Probabilidade nas provas do ENEM: uma aproximação a erros e dificuldades de aprendizagem. *Educação Matemática Debate*, Montes Claros, v. 3, n. 7, p. 87-110, jan./abr. 2019.

Siqueira, R. F. Tutorial para GeoGebra. Niterói: Grupo Pet-Tele, 2017. 28 p. Disponível em: http://www.telecom.uff.br/pet/petws/downloads/tutoriais/geogebra/Tutorial_GeoGebra.pdf. Acesso em: 12 jan. 2022.

Soares, E. Uma análise sobre as atividades de probabilidade propostas em livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental. REnCiMa, v. 9, n. 6, p. 65. 2018.

Sturion, L; carvalho, A. A. A; reis, M. C; rocha, Z. F. D. C. As dificuldades dos professores de estatística na utilização de tecnologias midiáticas. REnCiMa, v. 9, p. 78-93, 2018.

Viali, L. Algumas Considerações Sobre a Origem da Teoria da Probabilidade. Revista Brasileira de História da Matemática, [S. L.], v. 8, n. 16, p. 143-153, out./mar. 2008.

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA:

Atividades interativas no geogebra: possibilidades de explorar a probabilidade geométrica em sala de aula

Fernanda Vital de Paula

Doutora

Professora Adjunta

Universidade Federal do Norte Tocantins, Colegiado de Licenciatura em Matemática, Araguaína, Brasil

fernandavital@uft.edu.br

<https://orcid.org/0000-0002-7936-8937>

Pedro Martins de Sousa Junior

Licenciado em Matemática

Universidade Federal do Norte Tocantins, Colegiado de Licenciatura em Matemática, Araguaína, Brasil

pedrojr.com70@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-8173-2873>

Endereço de correspondência do principal autor

Universidade Federal do Tocantins, campus de Araguaína

Avenida Paraguai, s/n°, esquina com a Rua Uxiramas

Setor Cimba | 77824-838 | Araguaína/TO

AGRADECIMENTOS

Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

Concepção e elaboração do manuscrito: F. V. Paula, P. M. S. Junior.

Coleta de dados: F. V. Paula, P. M. S. Junior.

Análise de dados: F. V. Paula, P. M. S. Junior.

Discussão dos resultados: F. V. Paula, P. M. S. Junior.

Revisão e aprovação: F. V. Paula.

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO

Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM

Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES

Não se aplica.

LICENÇA DE USO – uso exclusivo da revista

Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution](#) (CC BY) 4.0 International. Esta licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista

Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EQUIPE EDITORIAL – uso exclusivo da revista

Méricles Thadeu Moretti
Rosilene Beatriz Machado
Débora Regina Wagner
Jéssica Ignácio de Souza
Eduardo Sabel

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista

Recebido em: 11-08-2022 – Aprovado em: 02-12-2022