

UMA REVISÃO DA LITERATURA SOBRE A GEOMETRIA PROJETIVA NO BRASIL

A Literature Review On Projective Geometry In Brazil

Gabriel Varela Soares da **SILVA**
Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil
gabriel.varelasoares@ufpe.br

 <https://orcid.org/0000-0002-8252-2384>

Franck Gilbert René **BELLEMMAIN**
Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil
franck.bellemmain@ufpe.br

 <https://orcid.org/0000-0001-5358-2057>

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo ●

RESUMO

Este trabalho corresponde ao recorte de uma dissertação de mestrado, no qual apresentamos uma revisão bibliográfica das pesquisas sobre Geometria Projetiva desenvolvidas no Brasil. Apresentamos uma pequena introdução sobre aspectos históricos e noções da Geometria Projetiva. A metodologia deste estudo consiste em uma revisão bibliográfica, que teve como objetivo investigar as pesquisas desenvolvidas sobre Geometria Projetiva entre os anos de 2016 e 2021. Escolhemos como descritor o termo “Geometria Projetiva”. Com base nesses critérios foram encontradas 26 produções que foram separadas em três categorias: estudo teórico, sequência de atividades envolvendo a Geometria Projetiva e aplicação da Geometria Projetiva. Com base na análise das produções encontradas, concluímos que a Geometria Projetiva se apresenta como um grande potencial para auxiliar o processo de compreensão de outros conteúdos matemáticos, tanto na educação básica como no ensino superior. Como também proporcionar articulações com conteúdos matemáticos ou outras áreas do conhecimento, como foi possível observar por meio dos estudos que aplicaram a Geometria Projetiva.

Palavras-chave: Geometria Projetiva, Revisão Bibliográfica, Geometria Euclidiana

ABSTRACT

This work corresponds to the cut of a master's dissertation, in which we present a bibliographic review of the researches on Projective Geometry developed in Brazil. We present a short introduction about historical aspects and notions of Projective Geometry. The methodology of this study consists of a bibliographic review, which aimed to investigate the research developed on Projective Geometry between the years 2016 and 2021. We chose the term “Projective Geometry” as descriptor. Based on these criteria, 26 productions were found that were separated into three categories: Theoretical Study, Sequence of activities involving Projective Geometry and Application of Projective Geometry. Based on the analysis of the productions found, we concluded that Projective Geometry presents itself as a great potential to help the process of understanding other mathematical contents, both in basic education and in higher education. As well as providing articulations with mathematical content or other areas of knowledge, as it was possible to observe through studies that applied Projective Geometry.

Keywords: Projective Geometry, Bibliographic Review, Euclidean Geometry

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa é um recorte da dissertação de mestrado desenvolvida pelo primeiro autor, no qual apresentamos uma revisão bibliográfica acerca das pesquisas desenvolvidas sobre a Geometria Projetiva nos últimos cinco anos.

Ao falarmos do estudo de geometria naturalmente voltamos as atenções para a Geometria Euclidiana. Contudo outras geometrias foram constituídas a partir de negações ou generalizações dos postulados de Euclides. A que queremos destacar nessa pesquisa é a Geometria Projetiva, que mesmo negando que duas retas paralelas não possuem um ponto em comum, como é defendido por Euclides, ela não é classificada como uma geometria não-euclidiana.

Os estudos acerca da Geometria Projetiva justificam traçados utilizados em diversas áreas. Podemos destacar o ponto de fuga, que é estudado nas artes plásticas ou arquitetura, bem como os sistemas de projeções cônico e cilíndrico.

A Geometria Projetiva é objeto de estudo de alguns cursos de graduação, entre eles destacamos a Licenciatura em Expressão Gráfica (LEG) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e o Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), que possuem em sua grade curricular a disciplina de Introdução à Geometria Projetiva. Também podemos mencionar a Universidade de São Paulo (USP), que através do Instituto de Matemática e Estatísticas, oferece a disciplina de Geometria Projetiva e Desenho.

A pesquisa de mestrado da qual foi tirado o recorte deste artigo, teve como objetivo efetuar uma análise epistemológica-didática-cognitiva-informática para determinar quais requisitos um *software* educativo de Geometria Dinâmica deve satisfazer/respeitar para poder abordar o traçado da Transformação Homológica da Circunferência, estudado pela Geometria Projetiva.

Para contribuir com as discussões sobre a Geometria Projetiva, foi realizado um levantamento bibliográfico das pesquisas realizadas no Brasil entre os anos de 2016 e 2020, com o objetivo de mapear o que já foi produzido acerca do tema. O mapeamento foi dividido em três categorias: estudos teóricos, sequência de atividades e aplicação da Geometria Projetiva.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS E BREVES CONCEITOS DA GEOMETRIA PROJETIVA

Com o surgimento do movimento renascentista na Europa entre os séculos XV e XVI, manifestou-se a preocupação dos artistas em representar nas telas aquilo que o olho humano enxergava. A partir dessa preocupação notou-se que a Geometria Euclidiana não atendia mais às necessidades dos artistas. Com isso, conceitos como ponto de fuga e perspectiva passaram a ser inseridos em suas obras, com o intuito de facilitar a percepção dos elementos que estavam mais perto e os que estavam mais longe.

A Geometria Projetiva não possui uma data exata para o seu início. Ela é composta de diversos estudos desenvolvidos por pesquisadores distintos em épocas diferentes. O primeiro teórico que destacamos é Menelau, que nasceu no ano 70 d.C., em Alexandria. Ele era um astrônomo e geômetra que ficou conhecido por dedicar-se aos estudos desenvolvidos por Hiparco sobre a trigonometria. Sua contribuição para a Geometria Projetiva foi o teorema que leva o seu nome, no qual ele afirma que se uma reta transversal corta os três lados do triângulo ABC nos pontos L, M e N, logo $(AN/NB).(BL/LC).(CM/MA)=-1$.

O segundo estudioso que apresentamos é o Pappus. Também nascido em Alexandria, ele foi um dos geômetras que fortaleceram a geometria grega e ficou conhecido por escrever comentários sobre os Elementos e Os dados de Euclides. Pappus desenvolveu uma coleção matemática composta por oito livros, dos quais perderam-se o primeiro livro e parte do segundo. A sua contribuição para a Geometria Projetiva foi o teorema que leva o seu nome, no qual ele afirma que quando colocamos sobre duas retas r e r' , os pontos A, B, C e os pontos A', B', C', e traçamos os segmentos AB' e AC', BA' e BC', CA' e CB', as interseções entre AB' e A'B, AC' e A'C, BC' e B'C vão determinar uma terceira reta.

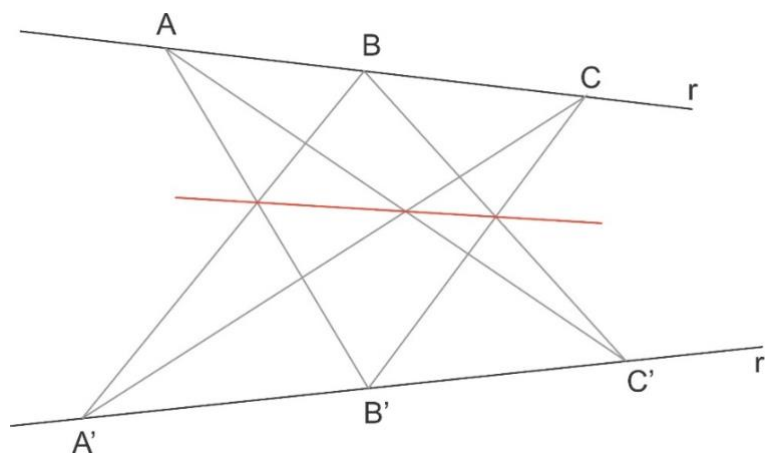


Figura 1. Teorema de Pappus
 Fonte: Elaborada pelos autores

Outro nome de destaque que tem sua parcela de contribuição para a Geometria Projetiva é o engenheiro e arquiteto Girard Desargues, ele foi considerado o pai da Geometria Projetiva. Em seus estudos desenvolvidos no século XVII, Desargues produziu vários teoremas e conceitos. Destacamos: investigação das seções cônicas e os pontos no infinito, a invariância da razão dupla e dos quaternos harmônicos, a teoria das retas polares, e ainda o famoso teorema que leva o seu nome, Teorema de Desargues.

Outro pesquisador que traz contribuições para a Geometria Projetiva foi Blaise Pascal, que conheceu Desargues na Academia Mersenne. Apoiando-se nos estudos de Desargues, Pascal investigou as cônicas e suas propriedades projetivas, que o levou a desenvolver o teorema que leva o seu nome. O Teorema de Pascal afirma que: “em um hexágono inscrito em uma cônica, as retas que contiverem os lados opostos interceptam-se em pontos colineares.”

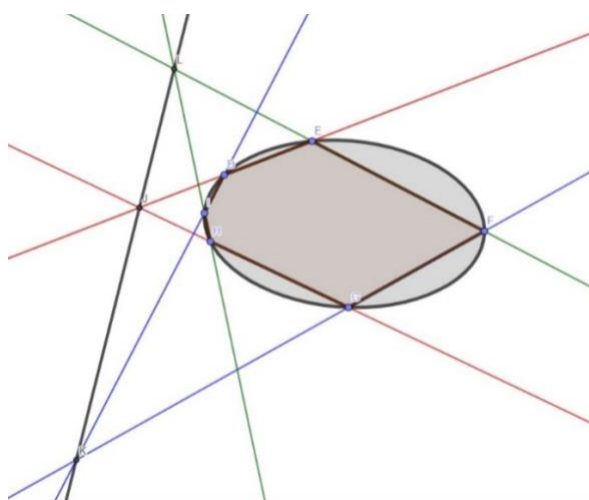


Figura 2. Teorema de Pascal
 Fonte: Elaborada pelos autores

Apesar de os estudos terem surgido no século XVII, só no século XIX que a Geometria Projetiva foi organizada, reunida e estruturada. O responsável pela estruturação foi Jean Victor Poncelet, que foi o primeiro a reconhecer a Geometria Projetiva como um ramo da matemática.

Os principais trabalhos desenvolvidos por Poncelet tiveram como base os estudos de Desargues e Pascal. O primeiro deles foi a noção de figuras homólogas, que assegura que a partir de uma figura podemos obter outra por meio de projeções e seções. Outro trabalho desenvolvido por Poncelet foi o princípio da continuidade, no qual ele afirma que duas retas paralelas se encontram em um ponto infinitamente distante, conhecido como ponto impróprio.

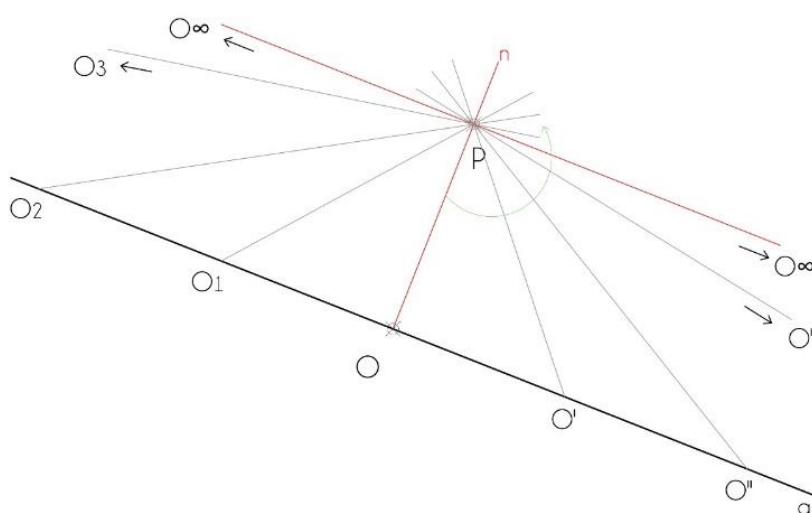


Figura 3. Princípio da Continuidade
Fonte: Elaborada pelos autores

Outros trabalhos desenvolvidos por Poncelet foram a teoria da polaridade e o princípio da dualidade, que serviram de base para o estudo de outros matemáticos. Por fim, a última contribuição de Poncelet para a Geometria Projetiva foi o conceito de razão dupla ou anarmônica.

Os principais elementos da Geometria Projetiva são os mesmos elementos da Geometria Euclidiana: o ponto, a reta e o plano. A Geometria Projetiva não altera esses elementos, diferente das demais geometrias pós-euclidianas, pois a Geometria Projetiva se apresenta como uma generalização e aperfeiçoamento da geometria desenvolvida por Euclides. Os seus postulados ultrapassam o espaço finito.

Para Costa e Costa (1994, p. 17) “o Espaço Projetivo constitui uma generalização de postulados intuídos a partir das dimensões euclidianas e estendidos a hiperespaços inteiramente desprovidos de uma visualização dentro do ambiente que nos cerca”. Ceppi e Fournier (1961) afirmam que a Geometria Projetiva se resume a duas operações: a de projetar, que pode ser desde um ponto a uma reta, e a de cortar, que pode ser por meio de uma reta ou por meio de um plano.

São cinco os postulados que fundamentam os axiomas apresentados pela Geometria Projetiva. Esses postulados vão fundamentar os elementos que são por ela estudados, podendo ser elementos de primeira espécie, segunda espécie ou terceira espécie, que variam de acordo com as formas elementares (ponto, reta e plano). Para facilitar o entendimento dessas formas geradas, organizamos o quadro a seguir de acordo com os conceitos mencionados:

Quadro 1. Formas Elementares

E0	PONTO	PLANO	RETA DE UM PLANO	RETA DE UM PONTO
E1	Reta de Pontos	Feixe de Planos	Feixe de Retas	Feixe de Raios
E2	Plano de Pontos	Radiação de Planos	Plano de Retas	Radiação de Raios
E3	Espaço de Pontos	Espaço de Planos		

Fonte: Elaborada pelos autores

O estudo da Geometria Projetiva consiste em duas operações, são elas: projetar e cortar. A operação projetar na Geometria Projetiva pode ser realizada a partir das formas elementares que acabamos de ver. Quando tomamos um ponto como centro de projeção é possível projetar a partir desse ponto: uma reta de pontos; um feixe de retas; uma radiação de retas; ou uma radiação de planos. Quando tomamos uma reta como eixo de projeção, podemos projetar dessa reta um feixe de planos (Ceppi e Fournier, 1961).

A segunda operação projetiva, que é dual da operação projetar, é a operação cortar. Através dessa operação é possível cortar uma forma elementar utilizando uma reta ou um plano. Quando tomamos um feixe de retas ou um feixe de planos e cortamos com uma reta qualquer, o que vamos obter é uma reta pontual. Quando temos um feixe de retas e cortamos com um plano qualquer, o que obtemos é uma reta pontual. Quando cortamos uma radiação de raios a partir de um plano, o que vamos obter é um plano pontual. Quando cortamos um feixe de planos com um outro plano, o que vamos obter é um feixe de retas e quando cortamos uma radiação de planos com um outro plano, o que vamos obter é um

plano de retas.

Um exemplo prático das operações projetar e cortar, apresentada por Costa e Costa (1994), são os sistemas de projeção que consistem na relação entre observador, objeto, plano de projeção e projetantes que partem do observador. Sintetizando, podemos afirmar que o observador é um ponto de onde partem as projetantes (operação projetar) que vão passar pelo objeto. Quando essas projetantes cortam (operação cortar) o plano de projeção, o que vamos obter é a projeção do objeto.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para investigar o cenário da Geometria Projetiva no Brasil, foi realizada uma pesquisa bibliográfica. A primeira etapa desse levantamento foi determinar qual seria a base de dados. Para tal foi escolhida a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações. Essa escolha se deu por se tratar de uma plataforma que garante acesso gratuito ao material disponibilizado.

Para a seleção dos trabalhos usamos como descritor o termo “Geometria Projetiva”, tendo como período de publicação entre os anos 2016 e 2020. Para entrar na lista de pesquisas encontradas, determinamos que o termo escolhido poderia aparecer no título, no resumo ou nas palavras-chaves do trabalho. Com base nesses critérios, encontramos 26 trabalhos publicados que apresentaram os termos buscados. Porém, 7 desses trabalhos não estavam dentro do contexto da pesquisa de mestrado em questão.

3.1 Categorizando as pesquisas

Com o objetivo de facilitar a análise das pesquisas encontradas, elas foram categorizadas de acordo com a sua natureza. Diante disso, criamos dois quadros nos quais separamos as dissertações de mestrado das teses de doutorado. Os quadros apresentam o nome do autor, o título da pesquisa, a instituição de ensino e o ano de publicação.

No quadro a seguir apresentamos um panorama geral das dissertações que foram encontradas com base nos critérios definidos.

Quadro 2: Dissertações encontradas

AUTOR	TÍTULO	ANO	INSTITUIÇÃO
Pinho (2016)	Geometria trifocal em reconstrução 3D	2016	UERJ
Vieira (2016)	Uma proposta de trabalho didático com a Geometria Projetiva	2016	USP
Sena (2017)	Da Geometria Euclidiana à Geometria Projetiva: algumas aplicações de homotetias e de construções projetivas	2017	UECE
Cardoso Junior (2017)	Uma proposta para solução de problemas com a utilização dos axiomas da Geometria Projetiva	2017	UTFPR
Souza (2017)	Resolução de problemas de geometria euclidiana utilizando técnicas de Geometria Projetiva	2017	UFC
Protela (2017)	Noções de Geometria Projetiva	2017	UFC
Nascimento (2017)	O porismo de Poncelet	2017	PUC-RIO
Cruz (2017)	Aplicação de matrizes em transformações lineares, afins e projetivas no espaço	2017	UFS
Silva (2018)	Ensino de Geometria e Perspectiva: Um Olhar pelas Fotografias	2018	UFES
Rodrigues (2018)	Geometria Projetiva na educação básica	2018	UFABC
Oliveira Júnior (2018)	Três pontos de vista sobre cônicas	2018	UFS
Figueiredo (2018)	Uma proposta de trabalho didático com a Geometria Projetiva	2018	UFJF
Pavaneli (2019)	Geometria Projetiva no ensino do espaço tridimensional e na estrutura de jogo de Dobble	2019	UFSCAR
Silva (2019)	Um estudo sobre interseções de curvas algébricas planas	2019	UFV
Pádua (2019)	Invariantes geométricos de pares de curvas planares	2019	UFG
Holanda (2020)	Os Modelos Axiomáticos das Geometrias Euclidiana e Projetiva: Histórico, Similaridades, Diferenças e Aplicações	2020	UNB
Giatti (2020)	Isometrias no \mathbb{R}^3 : modelos euclidiano e homogêneo	2020	UNICAMP

Fonte: Elaborada pelos autores

No quadro 3 é apresentado o panorama das teses que foram encontradas com base nos critérios definidos.

Quadro 3. Teses encontradas

AUTOR	TÍTULO	ANO	INSTITUIÇÃO
Cortese (2017)	O infinito em peso, número e medida: a comparação dos incomparáveis na obra de Blaise Pascal	2017	USP
Ferreira (2019)	“O que sabem sobre as curvas cônicas?” Uma possível leitura para o processo de produção de significado em um Grupo de Estudos	2019	UNESP

Fonte: Elaborada pelos autores

Para facilitar o alcance do objetivo do levantamento bibliográfico deste trabalho, foram estipuladas três categorias de classificação para as pesquisas encontradas. São elas: Estudos Teóricos, Sequência de Atividades e Aplicação de conceitos da Geometria Projetiva.

A primeira categoria tem o objetivo de identificar quais pesquisas realizaram estudos teóricos sobre conteúdos abordados pela Geometria Projetiva. Na segunda categoria serão elencadas as pesquisas que propõem sequências de atividades com conteúdos da Geometria Projetiva, buscando identificar o nível de ensino para o qual essas atividades são propostas, o público-alvo, bem como os recursos pedagógicos utilizados – sejam eles digitais ou manuais. Por fim, a terceira categoria é destinada para as pesquisas que fizeram aplicação de conceitos da Geometria Projetiva.

Após o mapeamento das pesquisas, o panorama que obtivemos é apresentado no quadro a seguir.

Quadro 4. Natureza das pesquisas

Estudos Teóricos	Cortese (2017); Cruz (2017); Portela (2017); Nascimento (2017); Oliveira Júnior (2018); Pádua (2019); Silva (2019); Giatti (2020).
Sequência de atividades	Vieira (2016); Cardoso Junior (2018); Figueiredo (2018); Rodrigues (2018); Silva (2018); Pavaneli (2019); Holanda (2020).
Aplicação da GP	Pinho (2016); Sena (2017); Souza (2017); Silva (2018); Ferreira (2019).

Fonte: Elaborada pelos autores

4 ANÁLISE DAS CATEGORIAS

Para dar andamento as análises de cada categoria definida anteriormente, vamos destacar os aspectos mais relevantes das pesquisas encontradas. As perguntas norteadoras que vão ajudar a identificar os aspectos escolhidos para serem observados foram: qual o objetivo da pesquisa?; que referenciais teórico e metodológicos foram usados na pesquisa?; quais foram os resultados obtidos?

4.1 Estudos Teóricos

Dentre as pesquisas encontradas, 8 foram classificadas como estudos teóricos. Em sua pesquisa, Cortese (2017) teve o objetivo de mostrar a unidade da obra de Pascal no que diz respeito à “comparabilidade dos incomparáveis, fazendo uma abordagem histórica e linguística sobre o papel do infinito de acordo com Pascal”.

O trabalho de Cortese (2017) foi dividido em três partes. A primeira consiste em realizar a formulação de uma forma de analogia retórica, que foi denominada de analogia de desproporção. Na segunda parte da pesquisa o autor analisa a prática matemática de Pascal “em peso, número e medida”. Com base nas observações em relação a prática matemática de Pascal, a terceira parte do trabalho apresenta uma discussão filosófica sobre o infinito. Com a sua pesquisa o autor conclui que Pascal traz do infinito uma abordagem da relação que o homem tem com o infinito.

Cruz (2017) estuda em sua pesquisa as transformações geométricas espaciais. O objetivo do trabalho foi buscar relações entre a álgebra de matrizes e as transformações geométricas. Para atingir o seu objetivo, o autor apresenta as definições de matrizes e definições de determinantes e verifica como as transformações lineares se relacionam com o produto de matrizes. Ao longo da pesquisa, o autor faz algumas aplicações de transformações geométricas utilizando o *software* GeoGebra.

O trabalho de Portela (2017) teve o objetivo de “apresentar noções da Geometria Projetiva através de conhecimentos já consagrados da Geometria Euclidiana, Geometria Analítica, Geometria Elíptica e Álgebra Linear” (Portela, 2017, p.13). Buscando alcançar o objetivo, a pesquisa apresenta noções sobre o espaço vetorial R^n , bem como noções da Geometria Euclidiana e a validade dos grupos de axiomas de Incidência e ordem. Para a compreensão de noções projetivas, o autor aborda definições da Geometria Elíptica e do Espaço Euclidiano Tridimensional, buscando demonstrar de forma analítica algumas proposições importantes da Geometria Projetiva.

Com o objetivo de demonstrar o Porismo de Poncelet, que é um dos teoremas mais importantes da Geometria Projetiva, Nascimento (2017) faz um estudo com base no artigo “A Simple Proof of Poncelet’s Theorem (on the occasion of its bicentennial)”, que foi publicado em 2014.

Para atingir o objetivo, Nascimento (2017) apresenta um breve resumo histórico e conceitos da Geometria Projetiva, construindo uma base axiomática. Em sua pesquisa é

apresentado tanto o caso base para triângulos como o caso geral para um polígono qualquer. O caso do triângulo junto com as cônicas é apresentado como uma possibilidade de ser explorado no Ensino Médio como o auxílio de *softwares* de Geometria Dinâmica.

Oliveira Junior (2018) teve como objetivo realizar uma análise das cônicas no contexto sintético, analítico e projetivo, bem como conhecer algumas aplicações dessas curvas. Para alcançar esse objetivo, a pesquisa apresenta um contexto histórico sobre os estudos de Apolônio e Dandelin, além de trabalhar conceitos de plano projetivo e aplicações das cônicas nesse contexto. A pesquisa também apresenta demonstrações dos Teoremas de Pascal e Brianchon.

Pádua (2019) tem como objetivo estudar os invariantes afins, por transformações afins; invariantes projetivos, por transformações projetivas; e invariantes conformes, por transformações de Möbius, para certos pares de curvas. Para isso, o trabalho traz uma breve introdução à Geometria Afim, apresentando alguns conceitos básicos e realizando uma abordagem ao trabalho de Santaló (1947).

Na segunda etapa da pesquisa foi feita uma breve introdução aos conceitos da Geometria Projetiva, bem como a análise do trabalho de Hsiung (1943) que se debruçou sobre os invariantes projetivos. A terceira etapa da pesquisa consiste na definição de conceitos da Geometria Conforme, bem como o estudo de 'invariantes conformes' baseado nos estudos de Kasne (1912).

Em sua pesquisa, Silva (2019) fez um estudo sobre interseções de curvas algébricas planas. Para realizá-lo, o autor utiliza ferramentas da Geometria Algébrica. A pesquisa apresenta noções básicas da Geometria Euclidiana, noções de Álgebra, noções de Geometria Projetiva e contribuições das Geometrias não Euclidianas. Como resultado dos estudos, o autor chega à demonstração do Teorema de Bézout no plano afim. A pesquisa ainda apresenta uma proposta de atividades que envolve interseções finitas e noções de interseções no infinito, voltada para alunos do Ensino Fundamental. A proposta apresenta como sugestão a utilização do GeoGebra para realizar as representações gráficas.

Giatti (2020) faz um estudo sobre as isometrias no espaço com o auxílio de um modelo euclidiano utilizando as coordenadas cartesianas, e um modelo homogêneo, através das coordenadas homogêneas. Para realizar o estudo, o autor apresenta o conceito de isometria e faz um estudo das isometrias do R^n no modelo euclidiano. Ele também aborda os aspectos históricos e noções da Geometria Projetiva, realizando uma comparação com a Geometria Euclidiana e seus axiomas. Ainda é apresentado na

pesquisa noções de coordenadas homogêneas e suas vantagens em relação às coordenadas cartesianas.

4.2 Sequência de Atividades

Foram 7 as pesquisas encontradas que se enquadram como sequências de atividades que abordam temáticas estudadas pela Geometria Projetiva.

Vieira (2016) apresenta em sua pesquisa uma proposta de trabalho didático com a Geometria Projetiva, que une conceitos projetivos e a geometria feita com a mediação de *softwares* gráficos. A pesquisa busca identificar como a Geometria Projetiva pode ser uma presença curricular, a partir da sua presença na formação do licenciando em matemática.

A aplicação da proposta foi realizada através de um curso de extensão, no qual foi possível fazer uma introdução à Geometria Projetiva e aplicar as atividades propostas pelo pesquisador. As atividades propostas trabalharam conceitos como: colinearidade, incidência, encontro de retas paralelas, a preservação da proporção anarmônica entre segmentos e teoremas importantes para a Geometria Projetiva. O autor conclui que o curso de extensão proposto se apresenta como uma alternativa de capacitação para os professores, bem como pode ser trabalhado nas escolas.

Cardoso Junior (2018) apresenta em sua pesquisa uma proposta de como fazer uma ponte entre os conceitos da Geometria Projetiva e a Geometria Analítica para ser aplicada no ensino médio. O objetivo é mostrar que a Geometria Projetiva pode ser abordada no estudo geral da Geometria no Ensino Médio. A proposta desenvolvida pelo autor consiste em solucionar problemas envolvendo a Geometria Projetiva que serão solucionados com a utilização das proposições dela.

O autor conclui que a matemática apresentada na sua proposta é um pouco pesada para o Ensino Médio, porém pode ser apresentada como uma aplicação da Geometria Analítica na Geometria Projetiva através do uso de seus axiomas nos anos finais do Ensino Médio.

Figueiredo (2018) propõe em sua pesquisa a confecção de um modelo didático que mostre a axiomatização das teorias estudadas pela Geometria Projetiva. Para tal o autor desenvolveu um levantamento bibliográfico para investigar formas de apresentação da Geometria Projetiva. A pesquisa teve como pergunta norteadora: como um curso básico e introdutório de Geometria Projetiva pode contribuir para os licenciandos repensarem a geometria estruturalmente, de modo ampliado e em seus fundamentos?

O pesquisador conclui que não sabe se a proposta de curso apresentada é a mais adequada, porém, foi notório alguns passos na questão da presença curricular da Geometria Projetiva.

Rodrigues (2018) estipulou como objetivo da sua pesquisa apresentar uma sequência de atividades de Geometria Projetiva de modo que possa ser estudada por alunos do Ensino Médio. A sequência é composta por 11 atividades que abordam assuntos como o conceito de perspectiva e projetividade, tópicos de Geometria Projetiva Analítica para demonstrar o teorema de Desargues e o teorema de Pappus.

A pesquisa de Silva (2018) propõe levar conceitos da Geometria Projetiva para a sala de aula de alunos do 3º ano do Ensino Médio. Para introduzir os conceitos da Geometria Projetiva, a autora apresenta princípios básicos da Geometria Euclidiana focando no 5º postulado, que é o postulado negado pela Geometria Projetiva. Os elementos da Geometria Projetiva apresentados na pesquisa foram: Perspectiva, Plano de Projeção e Perspectivas Cônicas, Pontos no infinito, Axiomas da Geometria Projetiva e o Teorema de Desargues.

A proposta de sequência de atividades proposta pela autora tem como público-alvo alunos do Ensino Médio e tem como estimativa de aplicação 4 aulas de 55 minutos cada. O objetivo da sequência é trabalhar o conceito de perspectiva, explorando o ponto de fuga e tendo como recurso didático a fotografia. Foi observado pela autora que a aplicação da oficina foi um pouco cansativa, por se tratar de um conteúdo extenso e que não é conhecido pelos alunos. Mas independente disso, a experiência proporcionou aos alunos um momento de interação, de expressão artística e de debates enriquecedores sobre as suas produções.

Em sua proposta de pesquisa, Pavaneli (2019) apresenta uma sequência didática baseada na Engenharia Didática, na qual são apresentadas atividades com o objetivo de que os alunos aprendam técnicas para melhorar a representação espacial com o auxílio do *software* GeoGebra. Ainda em sua pesquisa o autor apresenta o jogo de Dobble, no qual foi feita uma exposição dos conceitos matemáticos que estruturam o jogo.

A proposta apresentada pelo autor tem como objetivo introduzir conceitos da Geometria Projetiva para estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, através de atividades teóricas e práticas. O autor conclui que a aplicação da proposta foi de extrema valia para a compreensão dos conceitos apresentados, foi notório o avanço da utilização das técnicas à medida que a sequência ia sendo aplicada. Foi pontuado ainda que a sequência aplicada proporcionou o protagonismo dos alunos como construtores no processo de criação dos conceitos apresentados.

Holanda (2020) apresenta como objetivo geral da sua pesquisa apresentar o modelo axiomático e outras características da Geometria Euclidiana e Geometria Projetiva, observando suas similaridades e diferenças. O autor usa imagens da arquitetura de Brasília com o objetivo de demonstrar teorias apresentadas na pesquisa.

A sequência apresentada pelo autor está dividida em atividades relacionadas à Geometria Euclidiana, que é composta por três atividades com público-alvo distintos, bem como atividades relacionadas à Geometria Projetiva, que também é composta por três atividades.

4.3 Aplicação da Geometria Projetiva

Foram 4 as pesquisas encontradas que se enquadram como aplicações da Geometria Projetiva para um determinado objetivo.

A pesquisa de Pinho (2016) tem o objetivo de investigar benefícios na utilização da Geometria trifocal aplicada em sistemas de reconstrução multifocal e estimação de modelos de múltiplas câmeras, em oposição à utilização da Geometria epipolar com pares de câmeras. A Geometria Projetiva aparece na pesquisa como a principal teoria usada em visão computacional tridimensional.

Sena (2017) apresenta em sua pesquisa o objetivo de desenvolver a geometria através dos teoremas e construções, buscando possibilitar ao leitor a oportunidade de ampliar as habilidades de desenho e perspectiva, bem como auxiliando a compreender e demonstrar os teoremas. As geometrias abordadas em sua pesquisa foram a Euclidiana e a Projetiva, expondo as suas possibilidades e aplicações na solução de problemas.

Souza (2017) mostra em sua pesquisa a aplicação das técnicas da Geometria Projetiva na resolução de Problemas da Geometria Euclidiana. No seu texto foi traçado um paralelo entre as duas geometrias e é realizada uma contextualização histórica da Geometria Projetiva. O autor observou em sua pesquisa que a Geometria Projetiva possui repertório suficiente para resolver vários problemas apresentados pela Geometria Euclidiana.

A pesquisa desenvolvida por Ferreira (2019) teve como motivação compreender o processo de produção de significados para determinadas noções matemáticas em um contexto investigativo de aprendizagem, com base na Teoria do Modelo dos Campos Semânticos. Para atingir seu objetivo o autor organizou um Grupo de Estudos Independente sobre curvas cônicas, composto por 4 estudantes do curso de graduação em Matemática

e o pesquisador. A Geometria Projetiva aparece na pesquisa com o objetivo de auxiliar na compreensão dos elementos que compõem as curvas cônicas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscando identificar o parâmetro nacional das pesquisas desenvolvidas sobre a Geometria Projetiva, foi realizada a revisão bibliográfica apresentada nesse texto. Foram encontrados 26 trabalhos com o descritor “Geometria Projetiva” na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações entre os anos de 2016 e 2020, sendo elas dissertações de mestrado e teses de doutorado. Dentre estes, 7 ficaram de fora da análise por se tratar de pesquisas nas quais o descritor escolhido fugia do contexto que nos interessava.

Como critérios de categorização, escolhemos dividir as pesquisas em três categorias: estudos teóricos que abordam conteúdos da Geometria Projetiva; estudos que apresentam propostas de sequência de atividades que abordam conteúdos relacionados à Geometria Projetiva e; estudos que aplicam conceitos da Geometria Projetiva afim de atingir outros objetivos.

Por se tratar de uma temática que predominantemente é estudada no Ensino Superior, a maioria dos trabalhos encontrados apresentavam estudos teóricos que buscaram realizar demonstrações de teoremas estudados pela Geometria Projetiva. Porém, ainda encontramos uma quantidade similar de pesquisas que buscam introduzir conceitos da Geometria Projetiva, mesmo que introdutórios, no ensino básico. A categoria que apresentou uma menor quantidade de trabalhos foi a das pesquisas que se apoiaram na Geometria Projetiva para atender seus objetivos.

Ainda sobre a análise dos trabalhos encontrados, foi possível observar que a maioria dos estudos teóricos apresentam a Geometria Projetiva através do olhar analítico. Para um pesquisador da Geometria Gráfica, esse dado é expressivo, pois é notória a não familiaridade dos pesquisadores com a representação gráfica e articulação das maneiras de se olhar para um mesmo objeto.

Pode-se destacar também a dificuldade encontrada pelos autores em trabalhar as temáticas da Geometria Projetiva com alunos do ensino básico. Isso pode ser observado a partir dos relatos dos autores após a aplicação das sequências propostas. É observado que os autores apontam que essa dificuldade se dá pelo fato dos conteúdos de geometria não terem o devido destaque na grade curricular.

O *software* GeoGebra se destacou como uma ferramenta potencial para a compreensão dos conteúdos abordados nas sequências de atividades encontradas. A possibilidade de visualizar e manipular a teoria através da representação gráfica proporcionou o protagonismo dos alunos no processo de aprendizagem, tornando assim mais paupável os conteúdos da Geometria Projetiva.

Foi possível observar que a Geometria Projetiva possui aporte suficiente para auxiliar e compreender problemas que não são específicos da Geometria Projetiva. Através dessa revisão bibliográfica concluímos que a Geometria Projetiva se apresenta como um grande potencial para auxiliar o processo de compreensão de outros conteúdos matemáticos, tanto na Educação Básica como no Ensino Superior. Como também proporcionar articulações com conteúdos matemáticos ou outras áreas do conhecimento, como foi possível observar por meio dos estudos que aplicaram a Geometria Projetiva.

REFERÊNCIAS

- Cardoso Junior, S. A. (2018). *Uma proposta para a solução de problemas com a utilização dos axiomas da geometria projetiva* (Dissertação de mestrado em matemática). Universidade Tecnológica do Paraná, Pato Branco.
- Ceppi, H. & Fournier, A. M. (1961). *Geometria Projectiva*. Buenos Aires. Guillermo Kraft Limitada.
- Cortese, J. F. N. (2017). *O infinito em peso, número e medida: a comparação dos incomparáveis na obra de Blaise Pascal* (Tese de Doutorado em Filosofia). Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Costa, M. D. & Costa, A. V. (1994). *Geometria Gráfica Tridimensional - Vol. 3*. Recife. Editora Universitária.
- Cruz, G. E. (2017). *Aplicação de matrizes em transformações lineares, afins e projetivas no espaço* (Dissertação de mestrado profissional em matemática). Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão.
- Ferreira, B. L. (2019). *O que sabem sobre as curvas cônicas?: uma possível leitura para o processo de produção de significado em um grupo de estudos* (Tese de doutorado em educação matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.
- Figueiredo, M. C. (2018). *Uma proposta de trabalho didático com a geometria projetiva* (Dissertação de mestrado em educação matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

- Giatti, C. A. (2020). *Isometrias no R^3 : modelos euclidiano e homogêneo* (Dissertação de mestrado em matemática aplicada e computacional). Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- Holanda, L. S. (2020). *Os Modelos Axiomáticos das Geometrias Euclidiana e Projetiva: Histórico, Similaridades, Diferenças e Aplicações* (Dissertação de mestrado profissional em matemática). Universidade Federal de Brasília, Brasília.
- Nascimento, E. D. (2017). *O Porismo de Poncelet* (Dissertação de mestrado em matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Oliveira Junior, J. W. (2018). *Três pontos de vista sobre cônicas* (Dissertação de mestrado profissional em matemática). Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão.
- Pádua, N. V. (2019). *Invariantes geométricos de pares de curvas planares* (Dissertação de mestrado em matemática). Universidade Federal de Goiás, Goiânia.
- Pavaneli, M. D. D. (2019). *Geometria Projetiva no ensino do espaço tridimensional e na estrutura de jogo de Dobble* (Dissertação de mestrado profissional em matemática). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.
- Pinho, L. S. (2016). *Geometria trifocal em reconstrução 3D* (Dissertação de mestrado em modelagem computacional). Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo.
- Portela, A. E. C. (2017). *Noções de Geometria Projetiva* (Dissertação de mestrado profissional em matemática). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- Rodrigues, A. A. (2018). *Geometria Projetiva na Educação Básica* (Dissertação de mestrado profissional em matemática). Universidade Federal do ABC, Santo André.
- Sena, D. E. L. A. L. (2017). *Da geometria euclidiana à geometria projetiva: algumas aplicações de homotetias e de construções projetivas* (Dissertação de mestrado profissional em matemática). Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza.
- Silva, L. J. F. (2018). *Ensino de geometria projetiva e perspectiva: uma olhar pelas fotografias* (Dissertação de mestrado em matemática). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.
- Silva, S. A. (2019). *Um estudo sobre interseções de curvas algébricas planas* (Dissertação de mestrado profissional em matemática). Universidade Federal de Viçosa, Florestal.
- Souza, F. D. F. (2017). *Resolução de problemas de geometria euclidiana utilizando técnicas de geometria projetiva* (Dissertação de mestrado em matemática). Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza.
- Vieira, M. D. (2016). *Uma proposta de trabalho didático com a geometria projetiva* (Dissertação de mestrado profissional em educação matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA

Uma revisão da literatura sobre a Geometria Projetiva no Brasil

Gabriel Varela Soares da Silva

Mestre em Educação Matemática e Tecnológica

Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, Brasil
gabriel.varelasoares@ufpe.br


 <https://orcid.org/0000-0002-8252-2384>

Franck Gilbert René Bellemain

Doutor em Didactique des Mathématiques

Universidade Federal de Pernambuco, Professor Adjunto do Departamento de Expressão Gráfica, Recife, Brasil

franck.bellemain@ufpe.br

 <https://orcid.org/0000-0001-5358-2057>

Endereço de correspondência do principal autor

Rua do Hospício, 923, Bloco A, Ap 503, 50050-050, Recife, PE, Brasil.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Franck Bellemain pela orientação.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

Concepção e elaboração do manuscrito: G. V. S. Silva, F. G. R. Bellemain.

Coleta de dados: G. V. S. Silva.

Análise de dados: G. V. S. Silva, F. G. R. Bellemain.

Discussão dos resultados: G. V. S. Silva, F. G. R. Bellemain.

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO

Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM

Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES

Não se aplica.

LICENÇA DE USO – uso exclusivo da revista

Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution](#) (CC BY) 4.0 International. Esta licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista

Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EQUIPE EDITORIAL – uso exclusivo da revista

Méricles Thadeu Moretti
Rosilene Beatriz Machado
Débora Regina Wagner
Jéssica Ignácio de Souza
Eduardo Sabel

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista

Recebido em: 07-11-2022 – Aprovado em: 21-08-2023

