

# UMA ANÁLISE DO CONHECIMENTO DE ESFERA NOS LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE DUVAL

An analysis of the knowledge of Sphere in the textbooks in the light of the Theory of the Records of Semiotic Representations of Duval

Jéssica Santos **SILVA**


Instituto Federal da Paraíba, Cajazeiras, Brasil  
jessica.matcz@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-0835-1027> 

Fernanda Andréa Fernandes **SILVA**

Instituto Federal da Paraíba, Cajazeiras, Brasil  
fernanda.silva@ifpb.edu.br

<https://orcid.org/0000-0002-2347-2372> 

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo 

## RESUMO

Esta pesquisa é um recorte do Trabalho de Conclusão de Curso de Silva (2022), que objetivou analisar um Livro Didático (LD) do Ensino Médio quanto ao conhecimento do volume da esfera e área da superfície esférica, à luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval. Sendo assim, o objetivo desta pesquisa é discutir os resultados encontrados por Silva (2022), trazendo novos elementos para análise das questões que envolvem este conhecimento, como as designações dos objetos, os olhares em geometria e as mudanças de dimensão. Esta pesquisa caracteriza-se como sendo de abordagem qualitativa, do tipo bibliográfica. Identificamos que em todas as questões analisadas o registro de chegada, nas conversões envolvendo o volume da esfera e/ou da área da superfície esférica foi o simbólico algébrico. E não foram encontradas conversões em que o registro de partida fosse o registro na língua natural e o de chegada o registro figural do volume da esfera e/ou da área da superfície esférica. Como também, verificamos que as questões que envolveram a apreensão operatória apesar de terem sido trabalhadas em menor quantidade, requereram, em sua maioria, mudança de dimensão, seja da maior para a menor ou vice-versa e o olhar inventor, exigindo do educando um esforço cognitivo maior. Concluímos que o LD analisado prioriza algumas conversões entre registros de representações semióticas do volume da esfera e da área da superfície esférica em detrimento de outros e que o professor não deve limitar-se apenas ao uso do livro didático.

**Palavras-chave:** Livro Didático, Esfera, Registros de Representações

## ABSTRACT

This research is an excerpt from Silva's Course Completion Work (2022), which aimed to analyze a High School Textbook (LD) regarding the knowledge of the volume of the sphere and the area of the spherical surface, in the light of the Theory of Registers of Representations Semiotics of Raymond Duval. Therefore, the objective of this research is to discuss the results found by Silva (2022), bringing new elements for the analysis of the issues that involve this knowledge, such as the designations of objects, the looks in geometry and changes in dimension. This research is characterized as being of a qualitative approach, of the bibliographical type. We identified that in all the questions analyzed, the arrival record, in the conversions involving the volume of the sphere and/or the area of the spherical surface, was the algebraic symbol. And no conversions were found in which the starting record was the natural language record and the target record was the figural record of the volume of the sphere and/or the area of the spherical surface. As well, we verified that the questions that

involved the operative apprehension, despite having been worked on in a smaller amount, required, for the most part, a change of dimension, either from the largest to the smallest or vice versa and the inventive look, demanding from the student a greater cognitive effort. We conclude that the textbook analyzed prioritizes some conversions between registers of semiotic representations of the volume of the sphere and the area of the spherical surface to the detriment of others and that the teacher should not limit himself only to the use of the textbook.

**Keywords:** Textbook, Sphere, Representation Registers

## 1 INTRODUÇÃO

A Geometria espacial tem importante papel na matemática, sendo indispensável seu estudo, para o desenvolvimento do ser humano quanto à leitura e interpretação do espaço e do raciocínio geométrico.

Segundo Medeiros (2014), o pensamento geométrico pode ser caracterizado pela prática de habilidades ligadas a percepção espacial e que são essenciais em diversas situações cotidianas. Estas habilidades constituem uma estrutura comportamental que possibilita apreender o significado e as aplicabilidades do ensino da geometria. Enquanto que Tavares (2019) reforça que é fundamental explorar o papel da geometria na evolução humana e aponta para a importância de seu estudo no Ensino Médio.

A Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba (Paraíba, 2020), institui o ensino da esfera no 2º ano do Ensino Médio. A Esfera é um corpo redondo pertencente ao estudo da geometria espacial, podendo ser obtida pela rotação de um semicírculo. Alguns objetos do cotidiano remetem ao formato esférico, como por exemplo, o Globo Terrestre, uma bola de basquete, entre outros.

Pilati (2015) aponta que o professor deve oportunizar a compreensão de demonstrações matemáticas, quanto ao cálculo do volume da esfera e da área da superfície esférica, proporcionando a comparação do volume da esfera com volumes de objetos conhecidos, como forma de mensurá-los, bem como, de possibilitar ao aluno conhecer o processo de construção do conhecimento.

Por outro lado, o Livro Didático (LD), sendo um dos recursos didáticos mais acessíveis no ambiente escolar, apresenta-se como ferramenta de forte utilização pelo professor em sua prática em sala de aula. Tal fato está apoiado na possibilidade de organização do currículo escolar e do planejamento de aulas, tendo em vista sua multiplicidade de abordagens e usos.

Segundo Saviani (2007), o LD é um recurso imprescindível que auxilia no processo de transição da linguagem científica para a educativa. Enquanto que, Carvalho e Lima

(2010), reforçam o papel do LD de contribuir na avaliação da aprendizagem e possibilitar o alcance dos conteúdos pelos estudantes. Dessa forma, podemos afirmar que é de suma importância analisar o LD trabalhado no âmbito escolar.

Este estudo trata-se de um recorte da pesquisa de Silva (2022) que analisou um Livro Didático (LD) do 2º ano do Ensino Médio quanto ao conhecimento de Esfera, mais precisamente, quanto ao volume da esfera e área da superfície esférica, à luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) de Raymond Duval.

E temos como objetivo discutir os resultados encontrados por Silva (2022), trazendo novos elementos na análise das questões que envolvem o volume da esfera e área da superfície esférica, do LD analisado, como as designações dos objetos, os olhares em geometria e as mudanças de dimensão.

## 2 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Na Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) de Raymond Duval, é abordado o modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, relacionado aos registros de representações semióticas. O autor afirma que como os objetos matemáticos não possuem existência física, só é possível ter acesso a estes objetos, por meio de suas representações semióticas.

As diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias. De fato, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos “reais” ou “físicos”. É preciso, portanto, dar representantes. (Duval, 2012a, p. 268)

As figuras geométricas, os gráficos, os esquemas, as escritas simbólica, algébrica e numérica, entre outras são representações semióticas em matemática e “desempenham um papel fundamental na atividade matemática” (Duval, 2012a, p. 268). Sendo assim, o autor apresenta um caminho para a compreensão da matemática, através da diferenciação entre um objeto matemático e suas respectivas representações semióticas, pois, pode ser considerado um paradoxo cognitivo do pensamento matemático o fato de que,

De um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível. Este paradoxo pode constituir-se num grande círculo para a aprendizagem. (Duval, 2012a, p. 268)

Devido a inacessibilidade imediata dos objetos matemáticos é importante que não

se confunda o objeto matemático com sua representação. Pois, é a possibilidade de multirepresentação de um mesmo objeto que permite contornar este paradoxo cognitivo do pensamento matemático, o qual passa despercebido no ensino por existir “muito mais importância às representações mentais do que às representações semióticas” (Duval, 2012a, p. 269). Além disso, vale ressaltar que,

As representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. (Duval, 2012a, p. 269)

Assim, as representações semióticas de um objeto não são apenas necessárias para fins de comunicação, mas também são fundamentais para a atividade cognitiva do pensamento, visto que, o desenvolvimento das representações mentais depende de uma interiorização das representações semióticas, as quais possibilitam complementar funções cognitivas fundamentais como a de tratamento (Duval, 2012a).

Outros dois termos essenciais na TRRS são a semiose e a noesis. “é chamada “semiose” a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e “noesis” a apreensão conceitual de um objeto [...] a noesis é inseparável da semiose” (Duval, 2012a, p. 270). Sendo assim, é possível notar que não existe noesis sem semiose, dado que, só se tem acesso ao objeto matemático apenas por meio de sua representação.

Um sistema semiótico para que seja um registro de representação necessita permitir três atividades cognitivas fundamentais: a formação de uma representação identificável, que deve seguir as regras e características do registro usado; o tratamento, que se refere a transformação de uma representação dentro do mesmo registro em que esta representação foi formada, ou seja, é uma transformação interna a um registro; e a conversão que trata-se da transformação de uma representação semiótica em outro registro, conservando a totalidade ou parte do objeto abordado, ou seja, é a transformação externa ao registro de partida.

As atividades cognitivas de tratamento e conversão são distintas e independentes, um exemplo a ser observado é o cálculo numérico. Segundo Duval (2012a) alunos podem chegar ao ensino médio sem saber transformar uma representação decimal em uma representação fracionária de um número racional apesar de poder saberem efetuar perfeitamente uma operação matemática, como a adição por exemplo, de dois números

racionais com sua representação decimal e fracionária. E isso pode se dá pela falta de associação por parte dos estudantes de que “a expressão decimal, a expressão fracionária e a expressão com expoente constituem três registros diferentes de representação de números” (Duval, 2012a, p. 273). Portanto, é imprescindível que os alunos tenham acesso aos tratamentos e as conversões dos objetos matemáticos.

A noesis, ou seja, a apreensão conceitual de um objeto, é alcançada a partir da coordenação de registros de representação. Duval (2012a) ressalta que a existência de muitos registros de um mesmo objeto matemático, possibilita a modificação de um deles, como também, a mudança de registro com a finalidade de permitir realizar tratamentos de uma forma mais econômica e potencializada.

Cada registro possui suas particularidades, a escolha de um registro semiótico para representar um objeto depende da função, das possibilidades e dos inconvenientes semióticos do registro escolhido. Segundo Duval, isto significa que “toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa, e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados” (Duval, 2012a, p. 280).

De acordo com Duval (2012a), a falta de coordenação entre os registros de representação, não impede toda compreensão, entretanto, limita esta compreensão ao contexto semiótico a apenas um registro, e isto, não favorece à construção de aprendizagens, bem como a utilização, do que foi compreendido, em situações que esses conhecimentos deveriam ser utilizados. Neste caso, o estudante não possui a possibilidade de controle do “sentido” daquilo que é feito.

Assim, a TRRS apresenta como pilar, uma aprendizagem em que é considerada a ligação estreita existente entre a noesis e a semiose, para que seja possível elevar os alunos a uma condição de tomada de consciência do conhecimento matemático.

## **2.1 O Ensino da Geometria na perspectiva da TRRS**


No que se refere a atividade matemática de geometria na Educação Básica, Duval (2004) afirma que é efetuada por meio de dois registros: o das figuras geométricas, para sua designação e das suas propriedades, e o da língua natural, para descrever as definições, teoremas, hipóteses e conceitos em geral.

O custo cognitivo que a aprendizagem em geometria requer pode ser mais alto que nas outras áreas do conhecimento matemático, por necessitar realizar tratamentos

simultâneos no registro das figuras geométricas e da língua natural. Pois, se estes forem realizados separados e alternados em cada registro “não bastam para que esse processo chegue em algum resultado” (Duval, 2004, p. 155, tradução nossa).

O sólido geométrico esfera, no registro figural, categorizado como não discursivo por apresentar mais de uma dimensão é uma figura tridimensional, conforme Quadro 1 que também apresenta o registro em língua natural, discursivo, deste objeto matemático.

**Quadro 1:** Registro figural e em língua natural do objeto matemático esfera

<b>Registro figural (tridimensional)</b>		Não discursivo
<b>Registro em língua natural</b>	Consideremos um ponto $O$ e um segmento de medida $r$ . Chama-se esfera de centro $O$ e raio $r$ ao conjunto dos pontos $P$ do espaço, tais que a distância do segmento $OP$ seja menor ou igual a $r$ .	Discursivo

Fonte: Silva (2022, p. 33)

Desse modo, com apenas a representação da esfera no registro figural, sem que seja acompanhada de um registro discursivo como o da língua materna que o complemento pode haver uma dificuldade de reconhecimento do objeto matemático que se pretende que seja visualizado. Para Duval (2004, p. 168, tradução nossa) deve ocorrer,

[...] uma interação entre os tratamentos figurais que por abdução orientam a abordagem heurística, e os tratamentos discursivos que por dedução constituem a abordagem a partir dos objetos representados na figura. Naturalmente, essa interação pode ser bloqueada por importantes fenômenos de não congruência nas múltiplas idas e vindas que a mobilização simultânea desses registros exige.

De acordo com Duval (2004), os tratamentos realizados no registro das figuras geométricas são distintos dos demais tratamentos em outros registros de representação semiótica, pois são específicos deste para que não ocorra uma caracterização heurística das figuras como simples acessórios. O autor também afirma que, quanto as dificuldades na aprendizagem da geometria, os conceitos geométricos não são o principal motivo, mas a falta de coordenação entre tratamentos de vários registros e a proximidade entre tratamentos relevantes e irrelevantes inseridos em um mesmo registro. Destarte, Duval (2012b, p. 120) ressalta que,

[...] a resolução de problemas em geometria e a entrada nesta forma de desenvolvimento do raciocínio que esta resolução exige, depende da **conscientização da distinção, quer dizer, da conscientização da oposição entre as três primeiras formas de apreensão das figuras**. No entanto, isto constitui não mais do que um aspecto do modo de raciocinar geométrico.

Dessa forma, o autor elenca as chamadas apreensões na aprendizagem da geometria, as quais são maneiras diferentes de ver as figuras segundo o seu papel, são elas: as apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial. Estas três últimas apreensões, são subordinadas a apreensão perceptiva. Estas apreensões do conhecimento, são as interpretações que o aluno necessita ser capaz de realizar quando se depara com as situações propostas.

A aprendizagem dos tratamentos das figuras geométricas, geralmente fica ligada ao tratamento perceptivo ou ao tratamento matemático. As atividades de construção das figuras possibilitam descobrir, controlar e mobilizar a produtividade heurística das figuras. A apreensão perceptiva, também chamada de apreensão gestáltica, busca compreender como as figuras se organizam e são percebidas pelo estudante, ou seja, tem função de identificação, segundo Duval (2012b, p. 120)

Não importa qual figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas; e outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva dos elementos figurais.

Duval (2012a) ressalta que os tratamentos que estabelecem a produtividade heurística das figuras geométricas muitas vezes formam operações que não são do tipo de apreensão puramente perceptiva, como também, não mostram ser do tipo conceitual, o que acaba por vezes, favorecendo estas operações por meio dos fatores próprios à apreensão perceptiva, mas também, pode ocorrer de inibir estas operações, que são independentes de todo raciocínio dedutivo e do emprego de definições.

Uma figura geométrica admite tratamentos figurais distintos. A apreensão operatória corresponde a descoberta da resolução do problema, por meio das operações realizadas sobre as figuras e possuem fins heurísticos. Estando sempre ligada à apreensão perceptiva, sendo a conexão entre elas resultante na visualização. Assim,

A apreensão operatória de figuras é uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações. Para cada tipo de modificação, são diversas as operações possíveis. (Duval, 2012b, p. 125)



A modificação mereológica divide a figura inicial em partes que juntas formam o todo, trabalhando dessa forma, a relação parte-todo, no registro figural. Enquanto que a modificação ótica, provoca um aumento, diminuição ou deformação da figura geométrica inicial; e a modificação posicional rotaciona ou translada uma figura inicial a partir de uma dada referência (Duval, 2012,b).

Duval (2004) sugere que as operações de modificação das figuras sejam solicitadas de forma explícita e sistemática e, para que isso ocorra, é preciso propor exercícios onde a resolução utilize um tratamento figural.

A ligação entre as apreensões sequencial e discursiva resulta em atividades de construção geométrica, necessitando, também da apreensão perceptiva. A compreensão de um objeto geométrico quando associada aos seus enunciados, definições e conceitos, trata-se da apreensão discursiva.

Além das modificações figurais citadas, Duval (2011) aponta para aquelas que envolvem uma desconstrução dimensional, que são mais complexas que as anteriores, pois não se apoiam no reconhecimento imediato das unidades figurais, sendo modificações contrárias a percepção e que apresentam condições distintas, como em problemas que envolvem geometria espacial, pois

A solução de um problema de geometria << *no espaço* >> exige outro olhar, aquele que permite ver a forma 2D obtida pela interseção de um sólido com um plano qualquer no espaço. E isso requer todo um trabalho para passar de um objeto 3D/3D a suas múltiplas representações possíveis em 3D/2D (Duval, 2011, p.93)

E ainda, Duval (2005) afirma que de acordo com atividade a ser desenvolvida, como reproduzir uma figura geométrica, dado um modelo; construir, realizar medições ou descrever uma figura geométrica, não serão as mesmas formas de ‘ver’ que serão requeridas em cada uma dessas situações. Desta forma, define quatro formas distintas de ‘olhar’ em geometria.

O olhar botanista reconhece as formas geométricas, tendo como base as qualidades visuais do seu contorno. Além de observar as semelhanças e diferenças entre as formas geométricas, como por exemplo, diferenciar um triângulo de um quadrado. Pouco tem haver com uma atividade de geometria por se prender apenas a uma observação das formas, podendo envolver qualquer outro tipo de formas que não as figuras geométricas.

O olhar agrimensor busca fazer medições em terrenos ou entre dois pontos quaisquer e transferir para um desenho ou croqui, exigindo mudança de escalas. Portanto,



é necessário estabelecer uma relação entre o que se ‘vê’ no campo e o desenho na folha de papel, possibilitando assim, a leitura de mapas ou cartas geográficas.

O olhar construtor utiliza instrumentos manuais como régua e compasso ou ferramentas de softwares geométricos para a construção de figuras geométricas. Sendo assim, utiliza as propriedades geométricas, não se prendendo apenas às características perceptuais.

O olhar inventor agrega novos traços ou modifica a figura geométrica, desconstruindo as formas perceptuais iniciais, promovendo uma reorganização visual que permitirá descobrir elementos implícitos na figura. Esse olhar é condição necessária para o uso heurístico da figura geométrica.

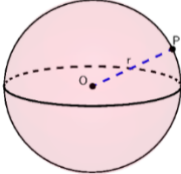
Desta forma, cada olhar em geometria acarreta ‘uma profunda mudança de perspectiva, que muitas vezes é ignorada no ensino. Isso ocorre porque os processos cognitivos em cada uma dessas quatro formas de ver não são os mesmos’ (Duval, 2005, p. 12).

Por outro lado, Duval (2005) afirma ser necessário analisar, também, o papel da linguagem em problemas que envolvem a geometria, fazendo a distinção entre três níveis de operação discursiva: a denominação, enunciação de propriedades e a dedução, pois a relação existente entre a linguagem e a visualização é modificada de um nível para o outro, sendo que

a consciência da desconstrução dimensional das formas e da variedade de operações discursivas são as condições para que a visualização e o discurso funcionem em sinergia. (Duval, 2005, p. 6, tradução nossa)

Assim, o Quadro 2 mostra os registros de representações quanto ao volume da esfera, considerando os registros de representações em língua natural, figural e simbólico algébrico. No registro em língua natural é apresentada a definição de esfera, pois é considerado que o volume da esfera está inserido em sua definição, visto que o volume abrange o conjunto dos pontos  $P$  do espaço, tais que a distância do segmento  $OP$  seja menor ou igual a  $r$ . No registro figural é apresentada uma esfera de centro  $O$  e um segmento  $OP$  de medida  $r$ . No registro simbólico algébrico é mostrada a relação do cálculo do volume da esfera.

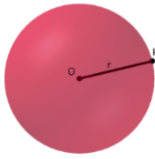
**Quadro 2:** Registros de representação quanto ao volume da esfera

Língua natural	Figural	Simbólico algébrico
Consideremos um ponto O e um segmento de medida r. Chama-se esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância do segmento OP seja menor ou igual a r.		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Fonte: Silva (2022, p. 36)

Destarte, da mesma forma que apresentada anteriormente, o Quadro 3 traz os registros de representação da área da superfície esférica.

**Quadro 3:** Registros de representação da área da superfície esférica

Língua natural	Figural	Simbólico algébrico
Chama-se superfície da esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja igual a r.		$A = 4\pi r^2$

Fonte: Silva (2022, p. 37)

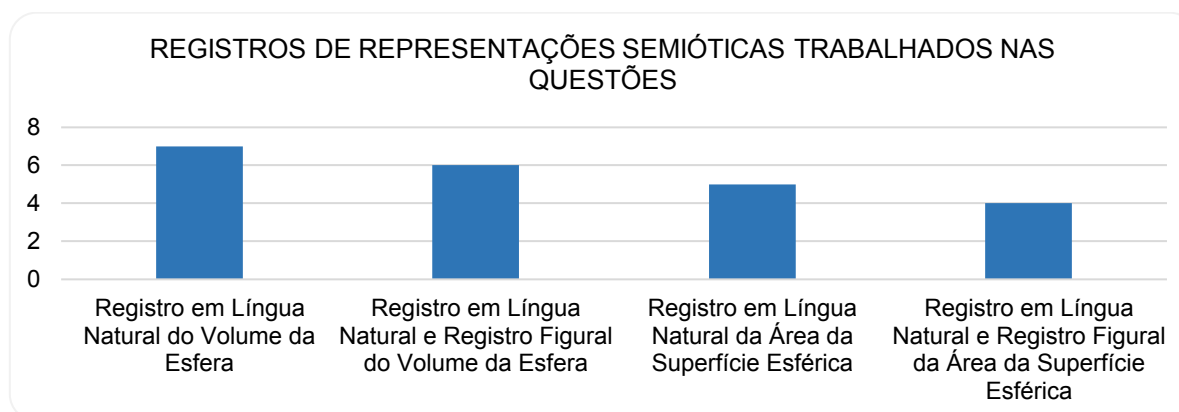
Segundo Duval (2003) o registro em língua natural são representações discursivas e utilizam representações de escritas de conceitos, enunciados e teoremas e, da mesma maneira como o registro simbólico algébrico, são considerados discursivos; o registro figural, o qual trata-se da representação da esfera em figura geométrica tridimensional, é considerado não discursivo.

### 3 SÍNTESE DA ANÁLISE DAS QUESTÕES

De acordo com o estudo, realizado por Silva (2022) no LD, foi verificado que os objetos matemáticos, área da superfície esférica e volume da esfera, são apresentados por meio dos registros de representações em língua natural, simbólico algébrico e figural. A área da superfície esférica é apresentada mediante um processo de decomposição da esfera em sólidos com formatos de pirâmides e alturas equivalentes à medida do raio da esfera, o volume da esfera é abordado pelo Princípio de Cavalieri em consonância com a Proposta Curricular da Paraíba.

No Gráfico 1, Silva (2022) apresenta os registros de representações semióticas do volume da esfera e da área da superfície esférica que são trabalhados nas questões.

**Gráfico 1:** Registros de Representações Semióticas abordados nas questões



Fonte: Silva (2022, p. 81)

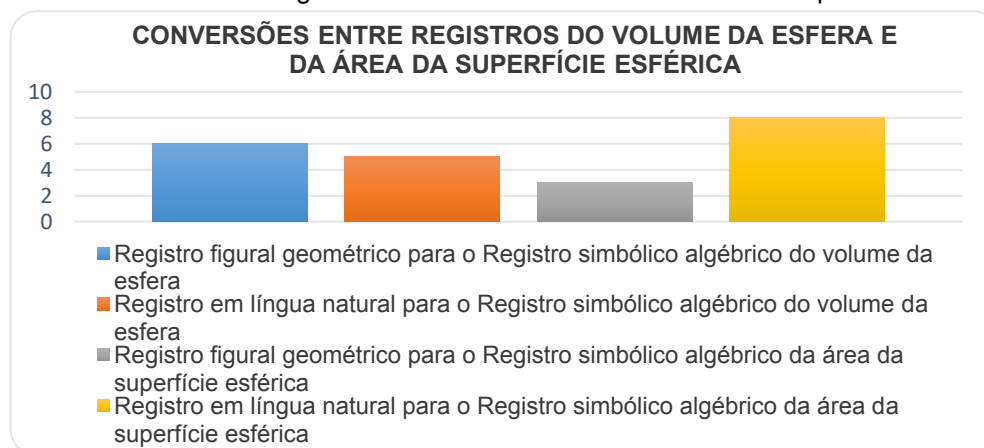
De acordo com o gráfico 1, 21% das questões abordam somente o registro em língua natural da área da superfície esférica, enquanto que 17% destas questões, trabalham o registro em língua natural e o registro figural da área da superfície esférica, sendo acompanhadas, além do enunciado, de um suporte no registro Figural.

Enquanto que 29% das questões, trazem apenas o registro de representação em língua natural do volume da esfera, e 25% trabalham o registro em língua natural e o registro figural do volume da esfera, simultaneamente, a partir de um suporte no registro Figural. Duas destas questões, as quais equivalem a 8%, não abordam os registros supracitados (Silva, 2022).

O livro didático analisado, traz questões que também envolvem outros sólidos geométricos que são trabalhados juntamente com a esfera. Desse modo, sólidos como o cone, o cilindro, o cubo e o prisma são abordados em 38% das questões analisadas.

Silva (2022) apresenta as principais conversões entre os registros trabalhados nas questões analisadas, como podemos observar no gráfico 2.

**Gráfico 2:** Conversões entre registros do volume da esfera e da área da superfície esférica



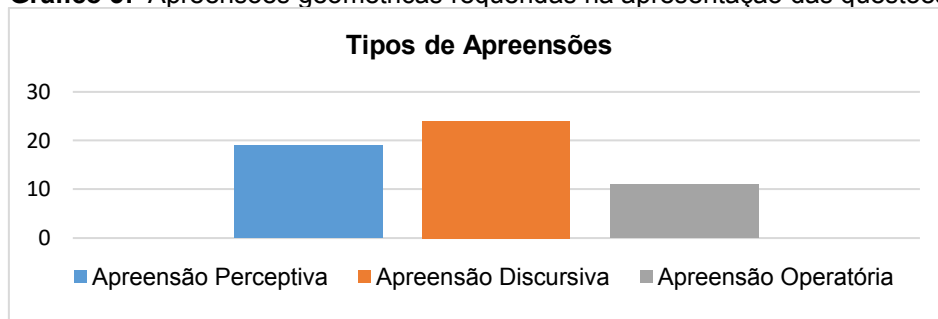
Fonte: Silva (2022, p. 82)

Como exposto no gráfico 2, a conversão que tem como registro de partida o registro em língua natural e o de chegada o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica, foi a mais trabalhada, equivalendo a 35% das questões. A conversão que tem como registro de partida o registro figural geométrico e o de chegada o registro simbólico algébrico do volume da esfera, equivale a 26%. A conversão que tem como registro de partida o registro em língua natural e o de chegada o registro simbólico algébrico do volume da esfera, equivale a 22%, e a conversão que tem como registro de partida o registro figural geométrico e o de chegada o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica, equivale a 13% das questões.

É importante salientar, que as conversões em que o registro de partida é o registro em língua natural e o de chegada o simbólico algébrico, foram priorizadas, pois são trabalhadas com mais frequência que as demais. Já as conversões em que o registro de partida é o registro figural e o de chegada o simbólico algébrico aparecem em segundo lugar como as mais trabalhadas. Nas duas situações, não foram encontradas conversões de volta.

No Gráfico 3, são apresentados os tipos de apreensões geométricas requeridas na apresentação das questões, incluindo enunciado, suporte (quando houver) e comando.

**Gráfico 3:** Apreensões geométricas requeridas na apresentação das questões



Fonte: Elaborado pelas autoras, 2023

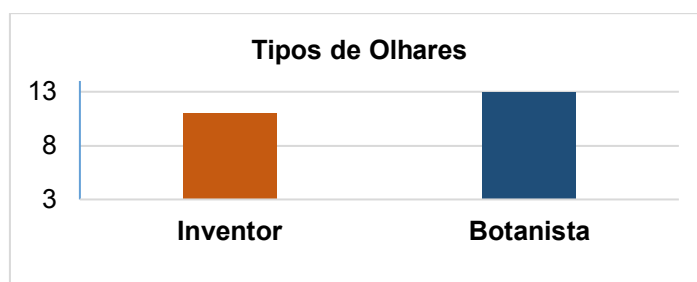
As apreensões discursiva e perceptiva são utilizadas em 100% e 58% das questões, respectivamente. Estas apreensões geométricas, são utilizadas, quando é necessário identificar os elementos e propriedades dos sólidos trabalhados, por meio do discurso em língua materna e quando é preciso identificar os elementos dos sólidos na representação figural, que compõe o suporte da questão, e relacioná-los com a representação na linguagem natural.

A apreensão operatória, requer um tratamento figural que auxilie na descoberta da resolução do problema, assim exigindo um maior custo cognitivo para o aluno. Dessa forma,

faz-se necessário utilizar a apreensão operatória em 46% das questões analisadas. Isso significa dizer que entre as questões que apresentam um suporte no registro Figural e necessitam da apreensão perceptual (58%), o valor correspondente a 46% delas requer algum tipo de tratamento neste registro.

Neste estudo, investigamos as questões do LD, analisado por Silva (2022), quanto aos tipos de olhares em geometria que são requeridos e as mudanças de dimensão necessárias para a visualização do objeto descrito no enunciado, suporte (quando houver) e comando da questão. O gráfico 4 apresenta os tipos de olhares considerados por Duval (2005) abordados nas questões analisadas.

**Gráfico 4:** Tipos de olhares abordados nas questões

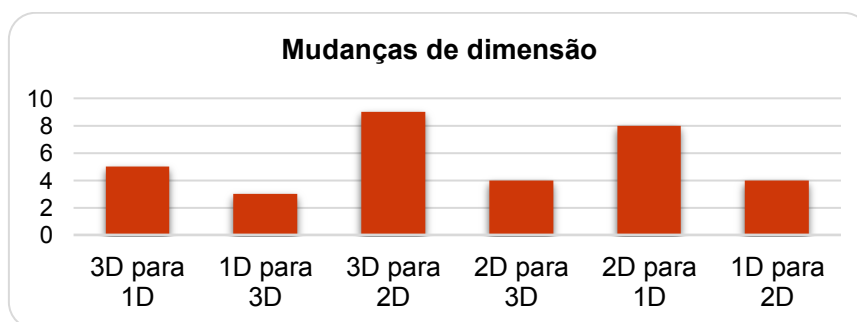


Fonte: Elaborado pelas autoras, 2023

O olhar do botanista foi requerido em 54% das questões analisadas, enquanto que o olhar inventor, em 46% delas. Como nenhuma das questões envolveu construções com régua e compasso ou software geométrico, não encontramos a necessidade de o olhar construtor ser empregado. Como também, não houveram questões que envolvessem situações com escalas, o que inviabilizou o olhar agrimensor.

No Gráfico 5, apresentamos os tipos de mudanças de dimensão requeridas nas questões analisadas no LD. Algumas questões requerem mais de um tipo de mudança de dimensão. Sendo que 67% delas exigem uma redução na dimensão. Este tipo de mudança de dimensão é considerado por Duval (2005) o que exige um maior esforço cognitivo.

**Gráfico 5:** Mudanças de dimensão



Fonte: Elaborado pelas autoras, 2023

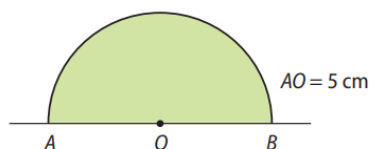
Dessa forma, finalizamos uma síntese das questões analisadas neste trabalho, tendo identificado os registros de representações, as conversões, tipos de olhares em geometria, apreensões e mudanças de dimensões requeridas nos enunciados, suporte e comando das questões.

## 4 ANÁLISE DAS QUESTÕES

Nesta seção traremos a análise da resolução de três questões do LD analisado por Silva (2022), tendo sido observados o enunciado, comando e suporte de cada questão; os registros abordados e o custo cognitivo necessário para a resolução da questão, a partir da análise das apreensões, tratamentos, conversões, possíveis designações, dos olhares em geometria e mudanças de dimensões requeridas. Neste trabalho avançamos nas análises das questões ao inserimos nestas os três últimos elementos citados.

A Questão 46, apresentada na Figura 1, não apresenta um enunciado, traz o comando na representação discursiva em língua materna e questiona qual a área da superfície esférica gerada por uma volta completa de um semicírculo em torno do seu diâmetro  $AB$ . O suporte apresenta a representação figural geométrica de um semicírculo e indica seu centro, o raio e o diâmetro.

**46.** Qual é a área total da superfície esférica gerada pela rotação completa do semicírculo da figura em torno de seu diâmetro  $AB$ ?  $100\pi \text{ cm}^2$



**Figura 1.** Questão 46

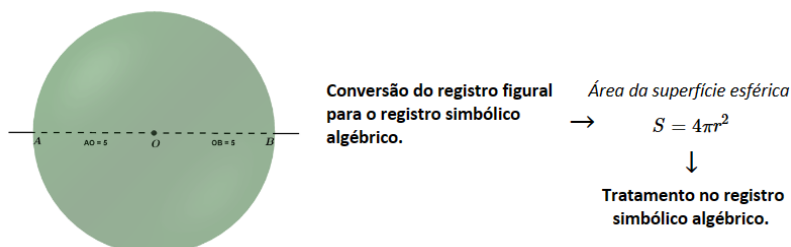
Fonte: Bonjorno, Júnior & Sousa (2020, p. 136)

Para a resolução desta questão, são utilizadas as apreensões perceptiva e discursiva, para identificar as informações da representação geométrica em conformidade com o que é descrito no comando. Dessa forma, o aluno deve perceber que o segmento  $AB$  é o diâmetro do semicírculo;  $AO$  indicado, na figura, e o segmento  $OB$  tratam-se dos raios do semicírculo e medem, cada um, 5 cm.

A apreensão operatória é necessária, pois é preciso fazer a rotação do semicírculo em torno do segmento  $AB$ , ao menos de forma mental, para que se consiga visualizar a

esfera gerada e conseqüentemente, sua superfície esférica. Dessa forma, o olhar empregado na questão é o inventor, pois acrescenta traços a figura geométrica inicial. Além disso, há uma mudança de dimensão de 2D para 3D para que seja visualizada a esfera.

Logo após, é preciso fazer a conversão do registro figural para o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica, como mostra o Esquema 1 da Figura 2.



**Figura 2.** Esquema 1  
Fonte: Silva (2022, p. 62)

Para isso é necessário que haja a designação algébrica da área da superfície esférica, como sendo igual a quatro vezes  $\pi$ , vezes o quadrado do raio. Em seguida, deve ser realizado o tratamento no registro simbólico algébrico, substituindo o valor do raio e encontrando a área da superfície esférica como solicitado no comando.

A Questão 50, apresentada na Figura 3, apresenta o enunciado na representação discursiva em língua materna, indicando que um plano  $\alpha$  secciona uma esfera, explicitando a distância entre o plano  $\alpha$  e o centro da esfera, além do raio da secção obtida. O comando pede para que seja calculado o volume da esfera. Esta questão não apresenta um suporte.

**50.** Uma esfera é seccionada por um plano  $\alpha$  distante 12 cm do centro da esfera. O raio da secção obtida é 9 cm. Calcule o volume da esfera.  
 $4\ 500\pi\text{ cm}^3$

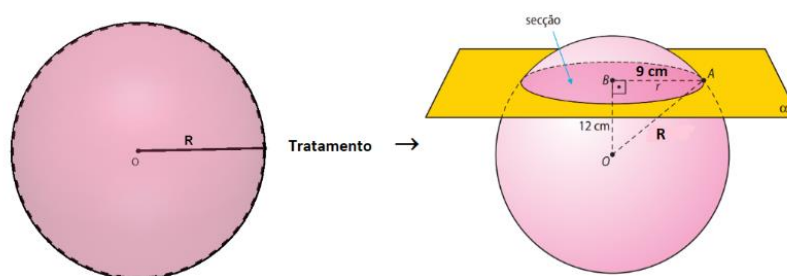
**Figura 3:** Questão 50  
Fonte: Bonjorno, Júnior & Sousa (2020, p. 136)

Para a resolução dessa questão são utilizadas a apreensão discursiva e a apreensão operatória. Além de identificar os elementos presentes no registro discursivo é preciso que se faça, ao menos mentalmente, a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro figural geométrico da esfera e realizar o tratamento neste registro, seccionando a esfera por um plano  $\alpha$ .

Desse modo, para que seja visualizado o círculo formado pela secção do plano  $\alpha$  com a esfera é necessária uma mudança de dimensão de 3D para 2D. E depois, de 2D

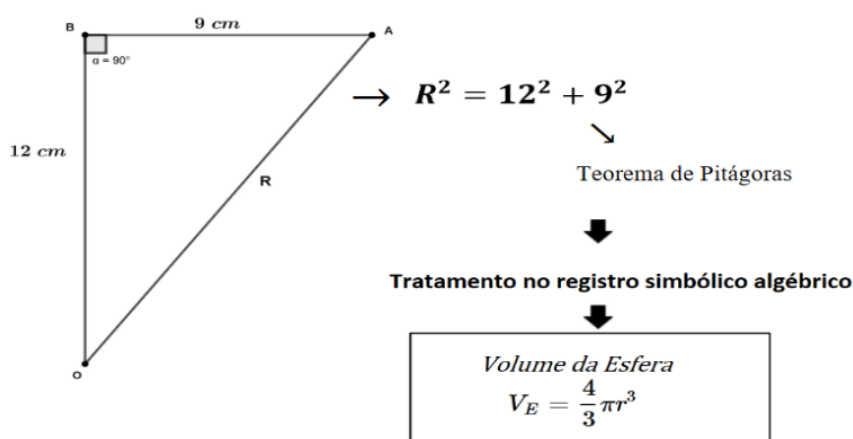


para 1D para visualizar no registro figural as medidas dadas no enunciado, do raio da seção plana e da distância da seção plana ao centro da esfera. Logo após, é possível acrescentar um traço que vai do centro da esfera até a sua extremidade para construir um triângulo retângulo, com vértices no centro da seção plana, na circunferência delimitada pelo plano  $\alpha$  e no centro da esfera, requerendo, para isso, o olhar do inventor e mais uma mudança de dimensão de 3D para 2D, conforme o Esquema 2 da Figura 4.



**Figura 4.** Esquema 2  
Fonte: Elaborado pelas autoras, 2023

A partir da visualização acima e da designação numérica das medidas dos catetos do triângulo retângulo, pode ser realizada a designação algébrica do Teorema de Pitágoras, por meio da conversão do registro figural para o algébrico, e calculado o raio da esfera, realizando um tratamento neste registro. Sendo este raio designado como a medida da hipotenusa do triângulo retângulo construído. E para chegar à resposta da questão, se faz necessária a designação do volume da esfera no registro algébrico e posterior tratamento neste registro, conforme o Esquema 3 da Figura 5.



**Figura 5:** Esquema 3  
Fonte: Elaborado pelas autoras, 2023

A Questão 15, conforme Figura 6, com enunciado na representação discursiva em língua materna, descreve cápsulas que possuem formato cilíndrico e extremidades hemisféricas e contêm medicamento em microesferas de 1,0 mm de diâmetro. São dados o comprimento total de cada cápsula e o diâmetro de cada hemisfera. O comando pede o número máximo de microesferas que cabem no interior de cada cápsula, desprezando o espaço entre elas. A questão não apresenta suporte.

**15.** (Uneb-BA) Considere-se que

- cápsulas, de formato cilíndrico e extremidades hemisféricas, contêm determinado medicamento em microesferas de 1,0 mm de diâmetro;
- o comprimento total de cada cápsula mede 15 mm, e o diâmetro de cada hemisfera mede 6 mm.

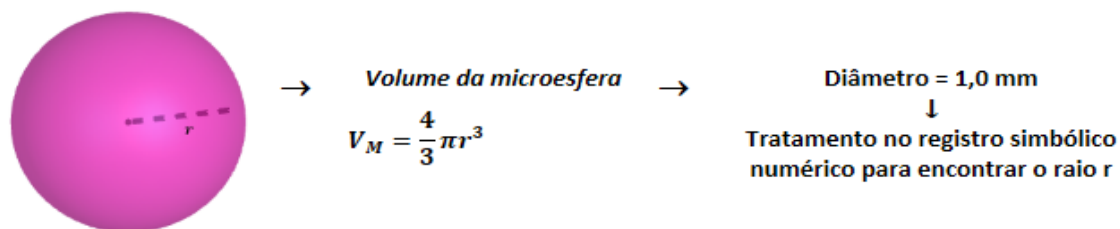
É correto afirmar que o número máximo de microesferas que cabem no interior de cada cápsula, admitindo-se desprezíveis os espaços entre elas, é **alternativa 03**

- 01)** 500                      **03)** 702                      **05)** 804  
**02)** 681                      **04)** 765

**Figura 6:** Questão 15

Fonte: Bonjorno, Júnior & Sousa (2020, p. 150)

Para a resolução dessa questão, é utilizada a apreensão discursiva. É necessário fazer uma designação algébrica do volume da esfera (microesfera), fazendo a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro algébrico; além de realizar um tratamento, ao menos mental, no registro numérico para encontrar o raio da microesfera, a partir do seu diâmetro, dado no enunciado da questão. E com o valor calculado, fazer um tratamento no registro algébrico do volume da esfera para encontrar o volume da microesfera, conforme o Esquema 4 da Figura 7.

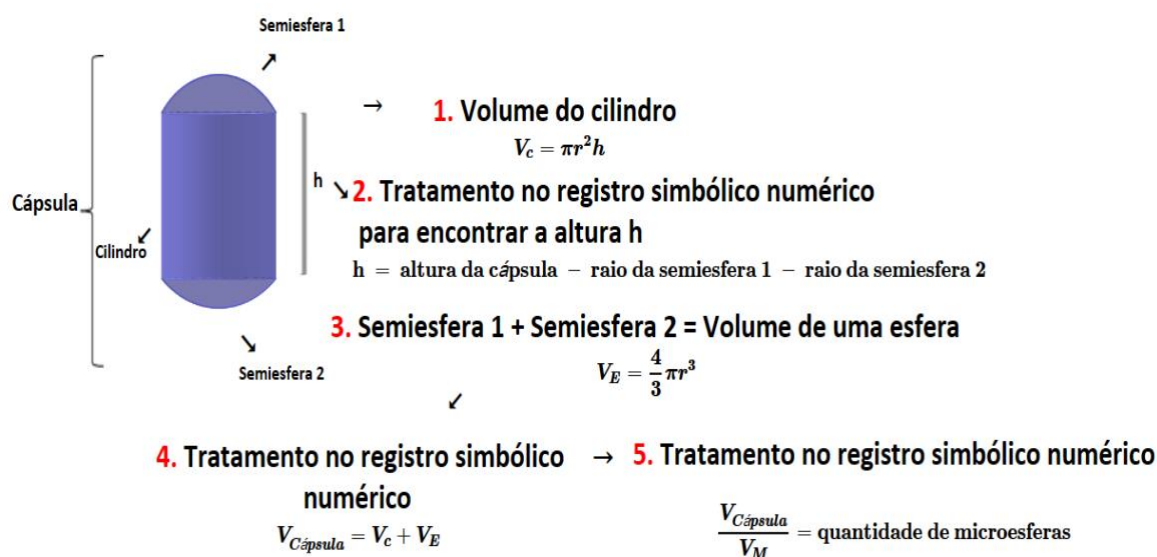


**Figura 7.** Esquema 4

Fonte: Silva (2022, p. 74)

Sabendo que as cápsulas possuem formato cilíndrico e extremidades hemisféricas, ou seja, com formato de semiesfera, é necessário fazer a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro figural, ao menos mental. E fazer a designação neste registro das medidas descritas no enunciado da questão, realizando os tratamentos figurais, ou seja, modificações mereológicas para designar que o cilindro possui 11 mm de altura e as extremidades hemisféricas, cada uma, 3mm de raio, sendo que ao total a cápsula apresenta 16mm de altura.

Para a visualização da altura do cilindro e do raio das hemisferas é preciso uma mudança de dimensão de 3D para 1D. Além disso, para a visualização da base do cilindro, um círculo de raio 3mm, se faz necessário uma mudança de dimensão de 3D para 2D. E o olhar empregado é o do inventor que precisa acrescentar traços a figura geométrica inicial para que os objetos matemáticos possam ser visualizados. Logo após, poderá ser feito a designação algébrica do volume do cilindro e o tratamento no registro algébrico para encontrar a medida deste volume, conforme Esquema 5 da Figura 8.



**Figura 8.** Esquema 5  
 Fonte: Silva (2022, p. 75)

Por fim, deve-se realizar dois tratamentos no registro simbólico numérico, um para somar os dois volumes, o do cilindro e o da esfera formando o volume da cápsula. E outro, dividindo o volume da cápsula pelo volume das microesferas, dessa forma encontrando a quantidade máxima de microesferas que cabem no interior de cada cápsula,

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tivemos como objetivo deste trabalho, discutir os resultados encontrados por Silva (2022), trazendo novos elementos na análise das questões que envolvem o volume da esfera e área da superfície esférica, do LD analisado, como as designações dos objetos, os olhares em geometria e as mudanças de dimensão.

O LD analisado trabalha o volume da esfera, por meio do Princípio de Cavalieri, e a área da superfície esférica por aproximação utilizando sólidos com formatos de pirâmides e alturas equivalentes à medida do raio da esfera. Medeiros (2014), afirma que muitas vezes as demonstrações e justificativas das fórmulas são deixadas de lado e ressalta a importância da utilização do Princípio de Cavalieri por se tratar de um resultado importante e bastante utilizado para explicar de forma intuitiva, as fórmulas das áreas e volumes da esfera.

Em todas as questões analisadas verificamos que o registro de chegada, nas conversões envolvendo o volume da esfera e/ou da área da superfície esférica foi o simbólico algébrico, sendo o registro de partida o figural ou a língua materna. Entretanto, não foram encontradas conversões em que o registro de partida fosse o registro na língua natural e o de chegada o registro figural do volume da esfera e/ou da área da superfície esférica. Sendo assim, apontamos que o livro prioriza algumas conversões entre registros de representações semióticas do volume da esfera e da área da superfície esférica em detrimento de outras.

O percentual de 58% e 100% para as apreensões perceptivas e discursivas requeridas nas questões dizem respeito a natureza do objeto trabalhado. Apesar das questões que envolvem a apreensão operatória terem sido trabalhadas em menor quantidade (46%), o que nos chamou a atenção foram estas requererem em sua maioria mudança de dimensão, seja de uma dimensão maior para outra menor, ou vice-versa. E muitas vezes, mais de uma mudança de dimensão. Segundo Duval (2005), atividades geométricas que requerem mudança de dimensão necessitam de um esforço cognitivo maior do educando. Além disso, verificamos a necessidade do olhar inventor, por ter que trazer novos traços a figura geométrica para que fosse visualizado o objeto matemático em questão.

Entretanto, evidenciamos que no processo de ensino-aprendizagem de matemática o professor não deve limitar-se apenas ao livro didático, pois utilizar apenas este recurso não garante a compreensão dos objetos matemáticos. Assim, como afirma Kluppel (2012)

o LD tem papel importante na prática docente e no processo de aprendizagem, pois auxilia no planejamento e gestão das aulas. Destarte, é necessário que o docente tenha um olhar crítico para o LD e analise as abordagens dos objetos matemáticos trabalhados, buscando complementar o ensino para conseguir uma melhor compreensão dos discentes.

Ressaltamos que há muito o que pesquisar e investigar sobre o tema proposto deste trabalho, a análise do livro didático é sempre muito importante na busca de uma melhor abordagem dos objetos matemáticos. Com isso, indicamos novos estudos que contribuam ainda mais com o ensino da matemática.

## REFERÊNCIAS

- Bonjorno, J. R. P.; Júnior, J. R. G. & Sousa, P. R. C. (2020). *Prisma Matemática: geometria: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias*. São Paulo: Editora FTD.
- Carvalho, J. B. P. & Lima, P. F. (2010). Escolha e uso do livro didático. In J. B. P. F. Carvalho (Coord.). *Matemática: Ensino Fundamental* (pp. 15-30). Brasília: Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica.
- Duval, R. (2003). Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In S. D. A. Machado (Org.), *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica* (pp. 11-33). Campinas: Papirus.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Tradução Myriam Veja Restrepo. Santiago de Cali: Peter Lang.
- Duval, R. (2005) *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements*.
- Duval, R. (2011). Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM Editora.
- Duval, R. (2012a). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. (Trad. Mércles T. Moretti). *Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Recuperado de <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>
- Duval, R. (2012b). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. (Trad. Mércles T. Moretti). *Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Recuperado de <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118/22382>

- Kluppel, G. T. (2012). *Reflexões sobre o ensino da Geometria em livros didáticos à luz da Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval*. (Dissertação de Mestrado em Educação) Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa.
- Medeiros, L. A. (2014). *Área e volume da esfera* (Dissertação de Mestrado) Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.
- Paraíba, Secretaria de Estado da Educação e da Ciência e Tecnologia da Paraíba. (2020). *Proposta Curricular do Estado da Paraíba – Ensino Médio*.
- Pilati, G. C. (2015). *O Princípio de Cavalieri e o volume da esfera*. (Dissertação de mestrado em matemática) Universidade Estadual de Maringá, Maringá.
- Saviani, D. (2007). *Educação: do senso-comum à consciência filosófica*. Campinas: Autores Associados.
- Silva, J. S. (2022). *Uma análise do conhecimento de esfera nos livros didáticos à luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval* (Trabalho de Conclusão de Curso). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras.
- Tavares, M. C. F. P. (2019). *Superfícies e sólidos esféricos* (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

## NOTAS

### TÍTULO DA OBRA

Uma análise do conhecimento de esfera nos livros didáticos à luz da teoria dos registros de representações semióticas de duval.

### Jéssica Santos Silva

Licenciada em Matemática  
Instituto Federal da Paraíba, Cajazeiras, Brasil  
jessica.macz@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-0835-1027>

### Fernanda Andréa Fernandes Silva

Doutora em Ensino de Ciências e Matemática  
Instituto Federal da Paraíba, Cajazeiras, Brasil  
fernanda.silva@ifpb.edu.br

<https://orcid.org/0000-0002-2347-2372>

### Endereço de correspondência do principal autor

Rua Alberto Santos Dumont, 161, 58900-000, Cajazeiras, PB, Brasil.

### AGRADECIMENTOS

Inserir os agradecimentos a pessoas que contribuíram com a realização do manuscrito.

### CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

Os papéis descrevem a contribuição específica de cada colaborador para a produção acadêmica inserir os dados dos autores conforme exemplo, excluindo o que não for aplicável. Iniciais dos primeiros nomes acrescidas com o último Sobrenome, conforme exemplo.

**Concepção e elaboração do manuscrito:** F.A.F. Silva, J. S. Silva

**Coleta de dados:** J. S. Silva

**Análise de dados:** F.A.F. Silva, J. S. Silva



**Discussão dos resultados:** F.A.F. Silva, J. S. Silva

**Revisão e aprovação:** F.A.F. Silva.

#### **CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA**

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

#### **FINANCIAMENTO**

Não se aplica.

#### **CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM**

Não se aplica.

#### **APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA**

Não se aplica.

#### **CONFLITO DE INTERESSES**

Não se aplica.

#### **LICENÇA DE USO** – uso exclusivo da revista

Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution](#) (CC BY) 4.0 International. Esta licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

#### **PUBLISHER** – uso exclusivo da revista

Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

#### **EQUIPE EDITORIAL** – uso exclusivo da revista

Méricles Thadeu Moretti  
Rosilene Beatriz Machado  
Débora Regina Wagner  
Jéssica Ignácio de Souza  
Eduardo Sabel

#### **HISTÓRICO** – uso exclusivo da revista

Recebido em: 12-11-2022 – Aprovado em: 21-08-2023

