Artigo Original

REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

EXPERIMENTOS MENTAIS NA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS: REFLEXÕES TEÓRICAS POR MEIO DE UMA METODOLOGIA ALTERNATIVA

Thought Experiments In The Multiplication Of Natural Numbers: Theoretical Reflections By Means Of An Alternative Methodology

Willian José da **CRUZ**
Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG.
Williancruz990@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7509-1021

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Este artigo faz parte da pesquisa teórica intitulada "A semiótica e os Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem em Matemática". Tem como objetivo apresentar uma reflexão teórica, por meio dos Experimentos Mentais, acerca da operação de Multiplicação com números naturais. Os Experimentos Mentais são conceituados como formas que o sujeito pode representar o próprio pensamento, sendo este colocado como objeto de consideração no desenvolvimento de um conceito, atividade ou problema em Matemática, por meio de um contexto teórico bem definido, o qual é chamado de sistema de representação, cumprindo o papel de mostrar a coerência do próprio conceito (ou até mesmo a sua modificação) e verificar a possibilidade de aplicação desse conceito em situações diversas. Esses tipos de experimentos, no contexto da Educação Matemática, podem ser considerados uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática. A aplicação dessa metodologia tem importância no ensino e respectivamente na aprendizagem da Matemática, por proporcionar o desenvolvimento de um ambiente de investigação e de reflexão, trabalhando em universos semânticos distintos, no entendimento da atividade e/ou do problema proposto, gerando debates e contradições.

Palavras-chave: Educação Matemática, Ensino de Matemática, Metodologia de ensino

ABSTRACT

This article is part of the theoretical research entitled "Semiotics and Thought Experiments in teaching and learning in Mathematics". It aims to present a theoretical reflection, by means of Thought Experiments, about the operation of Multiplication with natural numbers. The Thought Experiments are conceptualized as ways that the subject can represent its own thinking, which is placed as an object of consideration in the development of a concept, activity or problem in Mathematics, through a well-defined theoretical context, which is called representation system, fulfilling the role of showing the consistency of the concept itself (or even its modification) and verify the possibility of applying such concept in different situations. These categories of experiments, in the context of Mathematics Education, can be considered as an alternative methodology for teaching mathematics. The application of this methodology is important in teaching and respectively in learning mathematics because it provides the development of an environment of investigation and reflection, working in different semantic universes in the understanding of the activity and/or the proposed problem, generating debates and contradictions.

Keywords: Mathematics Education, Teaching Mathematics, Teaching Methodology

1 INTRODUÇÃO

Paulo Freire afirma que “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção” (2019, p.24), e no intuito dessa criação, buscamos diversas formas e métodos que nos auxiliam no desenvolvimento da atividade de ensinar, à qual nos dispomos, dedicamos e que estamos ocupados em realizar. Mas o que é uma metodologia de ensino?

Uma metodologia de ensino é um modelo ou uma forma desenvolvida para se efetivar o ensino de um determinado conceito, conteúdo etc., no intuito de alcançar êxito na aprendizagem. Com base nessa afirmação, sob a perspectiva de Cruz (2022), apresentamos os Experimentos Mentais como uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática, cuja intenção é promover um ambiente de aprendizagem que estimule a imaginação, com tentativas e buscas de novas direções, erros e acertos, e a análise crítica dessas tentativas, como comentado por D’Ambrosio no prefácio do livro Experimentos Mentais na Educação Matemática: uma analogia com provas Matemáticas formais (Cruz, 2018).

Essa Metodologia consiste em resgatar as experimentações, as analógicas e o uso de metáforas no ensino e, consequentemente, na aprendizagem em Matemática, em que os sujeitos (alunos e professor) sejam agentes ativos na construção do conhecimento e no desenvolvimento do pensamento crítico e criativo frente aos conceitos e/ou problemas em Matemática. Tem como base, no campo da Educação Matemática, os estudos sobre o princípio da complementaridade entre fatos e teoria ou intensão e extensão, bem como a concepção histórico-dialética da educação.

Este artigo faz parte da pesquisa teórica intitulada “A semiótica e os Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem em Matemática”. O objetivo deste texto é apresentar os Experimentos Mentais como uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática, no desenvolvimento da operação de Multiplicação com números naturais. Tem o propósito de desenvolver um ambiente de investigação e de reflexão sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, trabalhando com diferentes universos semânticos na compreensão da atividade e/ou do problema proposto, gerando debates e contradições.

2 CONCEPÇÃO DIALÉTICA NA BASE DA EXPERIMENTAÇÃO MENTAL

Uma metodologia de ensino, com base na concepção dialética da educação, desenvolve-se por meio de um conjunto de princípios e diretrizes epistemológicos, orientando o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, considerando os princípios sociopolíticos e psicopedagógicos implícitos na consecução da atividade.

Em termos epistemológicos, com base nos estudos de Manfredi (1993), devem-se considerar as diretrizes que condicionam a produção de conhecimento numa perspectiva dialética; a lógica implícita neste processo; o endereçamento desse conhecimento; as diferentes formas de saberes populares e saberes sistematizados; as relações nas formas distintas de conhecimento; a importância e o sentido da teoria com base numa perspectiva crítica da educação; o significado da produção do conhecimento tanto individual quanto sociocultural.

A concepção dialética que estamos assumindo neste trabalho está pautada no materialismo dialético de Marx. O materialismo dialético considera a forma das ideias tão concreta quanto a forma da natureza. A concepção dialética, na perspectiva marxista, "não separa em nenhum momento a teoria (conhecimento) da prática (ação), e afirma que a teoria não é um dogma, mas um guia para a ação. A prática é o critério de verdade da teoria, pois o conhecimento parte da prática e a ela volta dialeticamente". (Gadotti, 1995, p. 23).

Estamos propondo refletir sobre uma prática desenvolvida no próprio contexto da Matemática, por meio de Experimentos Mentais, com o uso da tecnologia, quando possível. Por meio deste processo, colocamos o objeto matemático em movimento, não o observando de maneira estática, mas no seu contínuo desenvolvimento e relações na ação de seus contrários, criando fatos.

Nesta concepção, os objetos matemáticos estão sob a égide dos princípios ou leis da dialética, como: i) O Princípio da totalidade, afirmando que os objetos e/ou fenômenos estão ligados entre si e para conhecê-los, buscamos uma totalidade, mesmo que se tenha a compreensão de que, para ter acesso a qualquer objeto na Matemática, a única possibilidade é por meio de representações particulares desse objeto, interagindo com outras possibilidades (abdução); é a ação semiótica no processo de abstração por meio de signos e significados. A explicação ou sentido de um fato, ou fenômeno, se dá na interação e não no isolamento. ii) O Princípio do Movimento, que estabelece uma contínua transformação do conhecimento, ou seja, o conhecimento (ou a forma) não é definitivo, está sempre em processo de transformação e evolução. iii) O Princípio da Mudança qualitativa, isto é, “a transformação não acontece de forma circular de eterna repetição” (Gadotti, 1995, p.26), mas, pelo “acúmulo de elementos quantitativos que num dado momento produzem o qualitativamente novo” (1995, p.26). iv) O Princípio da Contradição, que reside no interior da própria transformação das coisas, constituindo uma força oposta. A contradição é o constitutivo de todas as coisas materiais e espirituais. É a essência de todo o nosso conhecimento.

Gadotti afirma que esses princípios podem ser aplicados tanto à matéria, quanto à sociedade humana e aos nossos próprios conhecimentos. Cabe ressaltar que a dialética, nesta perspectiva, se subdivide em três níveis, a destacar: uma dialética da natureza, sendo “inteiramente objetiva, ou seja, independentemente da existência de projetos, de intenções ou de motivações do homem, que não age diretamente sobre a história humana” (1995, p. 27); a dialética da história, associada a projetos “do proletariado para reconstruir a sociedade, segundo um programa preestabelecido” (1995, p.27); a dialética do conhecimento que é uma dialética sujeito-objeto, “resultado de uma interação constante entre os objetos a conhecer e a ação dos sujeitos que procuram compreendê-los” (Gadotti, 1995, p. 27). E é neste terceiro nível que dispomos os Experimentos Mentais como uma Metodologia alternativa para o ensino de Matemática.

Nossa reflexão sobre o conhecimento matemático, do ponto de vista formal, entende que esse conhecimento está sob a égide de três princípios lógicos, a saber: o princípio da identidade, o princípio da não contradição e o princípio ou lei do terceiro excluído.

O princípio da identidade parte da consideração de que as coisas são estáticas, melhor dizendo, uma coisa permanece sempre igual a si mesma, ou seja, na sentença $2 \times 3 = 6$, os dois lados da igualdade, no contexto dado, designam o mesmo objeto. São dois nomes ou duas representações para o mesmo objeto e “todas as afirmações de identidade deste tipo são analiticamente verdadeiras” (Otte, 1993, p. 53).

O princípio da não contradição afirma que uma coisa não pode ser igual a outra ao mesmo tempo. Duas coisas não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo. Em outros termos, não é possível que tenhamos $2 \times 3 = 6$ e $2 \times 3 = 5$, pois, senão, caímos em uma contradição.

O princípio ou lei do terceiro excluído afirma que “ou é uma coisa ou é outra” (Gadotti, 1995, p.28), ou seja, ou $2 \times 3 = 6$ ou $2 \times 3 \neq 6$, não há uma terceira opção.

Mas há um quarto princípio que não exclui os três princípios formais, que é o princípio lógico dialético. Este princípio pode ser também denominado como lei (ou princípio) da contradição, captando o movimento, a ligação, a unidade que concebe na imaginação os contraditórios, se opondo e, ao mesmo tempo, oportunizando a entender os objetos em movimento real e incessante. Podemos imaginar, por exemplo, como se 2 e 3 fossem segmentos gerando como resultado da multiplicação uma área. Como isso é possível? Uma contradição está posta, diferente das regras aritméticas condicionadas pelos princípios lógicos formais. No caso do nosso último exemplo, a verdade depende de um contexto.

A lógica formal, por meio dos princípios da identidade, da não contradição e do terceiro excluído, visa classificar e distinguir os objetos, mas isto não é suficiente para entendê-los. Ao mesmo tempo, essa lógica formal não tem em vista tolher o pensamento dialético, mas mostra a possibilidade dele. A dialética, por sua vez, não recusa a lógica formal, mas a inclui como parte fundamental de sua lógica. E é nessa complementaridade que os Experimentos Mentais se mostram importantes no desenvolvimento do conhecimento Matemático, principalmente no que tange ao estudo da multiplicação de números naturais.

O materialismo dialético, segundo Gadotti (1995), se apresenta com um duplo objetivo: i - como dialética, visa entender os aspectos da realidade, as leis que regem o universo, a sociedade, a realidade em si, a natureza física, o pensamento que vai desde a natureza viva até a sociedade; ii) como materialismo se constitui numa concepção científica que pressupõe que o mundo é realidade material, no qual o homem pode conhecê-lo e modificá-lo.

Como entendemos que a realidade do conhecimento é um processo semiótico e neste processo o sujeito está envolvido, então a cognição para nós se constitui como uma "contradição dialética entre o sujeito cognoscente e a realidade objetiva que, no final, muda tanto o sujeito como a realidade reconhecida" (Cruz, 2018, p. 31). Esta realidade para nós é o universo do discurso de todos os conceitos e objetos matemáticos a serem conhecidos. E é neste contexto que colocamos a dialética do conhecimento nas concepções do materialismo dialético, isto é, no resultado da constante interação entre os objetos a serem conhecidos, no nosso caso a multiplicação de números naturais, e os meios que os sujeitos utilizam para compreendê-los.

Esta concepção dialética está presente na complementaridade entre fatos, que são os objetos do conhecimento, e teorias, que são as formas ou meios para desenvolver e entender esses objetos.

3 A COMPLEMENTARIDADE ENTRE FATOS E TEORIA, A DINÂMICA DO PROCESSO DE EXPERIMENTAÇÃO MENTAL

Nosso trabalho se fundamenta na concepção de Educação Matemática que a coloca "como um meio para entender o desenvolvimento do conhecimento, em especial, do conhecimento matemático" (Cruz, 2018, p. 161). Esse conhecimento se dá, por um lado, por fatos (objeto do conhecimento) e, por outro, pela teoria (meio de desenvolvimento desse conhecimento). De alguma forma, fatos e teoria estão interligados circularmente.

Nesta discussão envolvendo fatos e teoria, destacamos a argumentação do filósofo Frances Pierre Thuillier, que, diante de controvérsias sobre a obra de Galileu, isto é, da indagação se Galileu fez ou não experiências, argumenta que tais controvérsias dependem do ponto de vista cultural e epistemológico. Thuillier escreve que:

> [...] Por um lado, é incerto que o grande físico tenha concebido a pesquisa científica do mesmo modo que nós: embora ele faça frequentes alusões às experiências, não atribuía a elas o mesmo papel que os pesquisadores modernos. Por outro lado, mesmo se quisesse, Galileu teria sido incapaz de realizar medições suficientemente precisas para serem significativas. Hoje, ainda, esses dois campos se enfrentam. No que concerne aos trabalhos de Galileu sobre a queda dos corpos, por exemplo, as discussões são extensas. Os partidários de um Galileu experimentador afirmam que suas ideias lhe ocorreram ao manipular bolas e planos inclinados, animado pela constante preocupação de dialogar com os fatos. Mas a réplica dos opositores não se faz esperar: se Galileu formulou corretamente uma teoria do movimento, é porque foi antes de tudo um teórico, capaz de fazer especulações ousadas sobre os fenômenos. A referência à experiência, afinal de contas, tem apenas um interesse secundário! Os não-especialistas têm às vezes dificuldade em compreender o que está em jogo nessas discussões. Contudo, do ponto de vista cultural e epistemológico, o que está em jogo não é uma questão desprezível: trata-se de uma determinada imagem da ciência, uma determinada maneira de interpretar o trabalho científico (1994, p. 117)

Já o filósofo Imre Lakatos afirma a mesma coisa, parafraseando Kant: "A história da Matemática, à falta da orientação da filosofia, tornou-se cega, ao passo que a filosofia da Matemática, voltando as costas para os fenômenos mais curiosos da história da Matemática, tornou-se vazia" (Lakatos, 1978, p. 15).

As ciências empíricas fundamentam-se em fatos. O problema, no entanto, é que os fatos sempre permitem inúmeras interpretações e explicações. Isso coloca os fatos como algo bastante complexo. A capacidade de descrever imparcialmente os fatos só pode revelar uma de duas coisas: uma ignorância total ou um aparato conceitual extremamente bem estruturado.

Os fatos são, inicialmente, sempre fatos de uma teoria, pois qualquer fato novo precisa se integrar em um sistema próprio de conhecimentos e experiências, a fim de que possam ser compreendidos e utilizados. Mesmo que um fato possa nos surpreender, esse acontecimento só é possível em relação a alguma avaliação prévia.

Surge, então, a noção de círculo hermenêutico, que essencialmente se manifesta pela ação de que a apreensão de uma ideia nova ou algo desconhecido deve ser explicada tanto por si quanto por meio de algo que já nos é familiar, ou seja, a nova ideia é subsumida pelas ideias preexistentes. Isso parece paradoxal.

Cruz, ao estudar Otte (1993), procura explicar este círculo hermenêutico e disserta que:

> a nossa primeira iniciativa é deixar o objeto atuar por si, ou seja, aceitamos o objeto de forma passiva e espontânea no pensamento. Por outro lado, relacionamos cada nova informação, cada novo objeto e cada nova concepção com os próprios conhecimentos que já dispomos em nossa mente, ou seja, integramos cada fato novo em nosso próprio sistema de conhecimentos e experiências e isso chamamos de atividade e operatividade do pensamento (2018, p. 41)

Na revolução das ciências exatas durante os séculos XVI e XVII, tornou-se claro que cada experimento, que nos fornece novos fatos, dependia, em seus resultados, de um conjunto completo de requisitos teóricos e técnicos. Reichenbach escreve que “o método matemático deu à física moderna seu poder preditivo” (1951, p. 103) e complementa dissertando que “quando falamos da ciência empírica, não devemos esquecer que a observação e a experimentação foram capazes de construir as ciências modernas apenas quando foram combinadas com deduções matemáticas” (Ibid.). A imagem indutiva da ciência elaborada por Francis Bacon difere da física de Newton, afirma o autor, e complementa dizendo que “uma mera coleção de observações de fatos, como apresentados nas tabelas de Bacon, nunca levou um cientista à descoberta da lei de atração. Dedução matemática, combinada com a observação, é o instrumento que explica o sucesso da ciência moderna” (Reichenbach, 1951, p. 103).

É no processo complementar entre fatos e teoria, ou Experimentos Mentais e Provas Matemática formais, que o conhecimento matemático avança. “As ideias de complementaridade são uma tentativa de caracterizar as particularidades dessa unidade genética inicial, efetuando simultaneamente a sucessão temporal em uma imagem de espaço e, reciprocamente, transformando espaço em tempo” (Cruz, 2018, p.42). Por exemplo, suponha que estamos vendo fumaça subindo pelas colinas e concluímos que deve haver fogo. Ao percorrer o caminho das colinas, podemos observar diretamente a conexão entre a fumaça e o fogo. Muitas vezes, é assim que a dedução lógico-matemática ou o cálculo nos poupa de jornadas tediosas e problemáticas que podem surgir na atividade ou no problema.

Otte argumenta que “a Matemática parece ser um saber muito simples quando considerada do ponto de vista da atividade individual. Tudo que um texto matemático tem a dizer, ele diz. A Matemática é um saber direto. Se eu digo p, isto significa p”. (1993, p. 85). Mas cabe salientar que o conhecimento, “na medida em que depende de significados referenciais, para que seja conhecimento, só pode ter uma existência social, embora todos os conhecimentos surjam em cabeças individuais” (ibid.). Isto significa que a Matemática só ganha um conteúdo real quando é considerada no contexto geral.

“Todo conhecimento é feito por sinais”, afirma Cruz (2018, p. 42). “Um conhecimento, para ter um impacto formativo em nossas mentes, deve ser subjetivamente significativo em primeiro lugar e, por sua vez, atrair um interesse para a teoria dos significados e para complementaridade dos aspectos intensionais e extensionais” (Ibid.). As coisas não têm significados, apenas signos têm significados. A informação como tal, assim como a existência factual, não possui sentido e pode até causar espanto ou confusão. O significado objetivo depende da estrutura e está vinculado à redundância (círculo hermenêutico).

O significado requer redundância na quantidade de informação recebida, ou seja, requer a possibilidade de representar a mesma coisa de maneiras distintas. Devemos ser capazes de dizer algo que já foi dito de outra forma ou ao contrário. Deve sempre haver diferentes maneiras de chegar ao mesmo local e permitir diferenciar o lugar e a rota, o objeto e a representação. “Um conceito matemático não existe independentemente da totalidade de suas possíveis representações, mas não deve ser confundido com qualquer representação particular” (Cruz, 2018, p. 45).

Conhecimento requer uma subdivisão da realidade e uma abstração, ou seja, uma perspectiva exclusiva, caso contrário, a resistência que o mundo, em sua totalidade, imporia aos nossos esforços cognitivos seria infinita. No entanto, o conhecimento também requer estabilidade e firmeza até certo ponto, e tudo depende da seleção correta de fatos, conclusões e abstrações.

A perspectiva semiótica que estamos adotando neste texto baseia-se nos pensamentos de Peirce para quem a semiótica é o “estudo geral da abstração, por meio de signos e significados” (Hersh, 1997, p. 198)”. Para Peirce (2010, p. 45), “a semiótica é a quase-necessária ou formal” doutrina dos signos, derivada de um processo chamado de abstração, que se baseia principalmente na ideia de interpretante.

Peirce escreve que

> Quanto a esse processo de abstração, ele é, em si mesmo, uma espécie de observação. A faculdade que denomino de observação abstrativa é perfeitamente reconhecível por pessoas comuns, mas, por vezes, as teorias dos filósofos dificilmente a acolhem. É experiência familiar a todo ser humano desejar algo que está totalmente além de seus recursos presentes, e complementar esse desejo com a pergunta “Meu desejo dessa coisa seria o mesmo se eu dispusesse de amplos meios de realizá-lo? Para responder a essa pergunta, ele examina seu interior, e ao fazer isso realiza aquilo que denomino observação abstrativa. Faz, na imaginação, uma espécie de diagrama mínimo, um esboço sumário, considera quais modificações o hipotético estado de coisas exigiria que fossem efetuadas nesse quadro e a seguir examina-o, isto é, observa o que imaginou, a fim de saber se o mesmo desejo ardente pode ali ser discernido. (Peirce, 2010, p. 45)

No entanto, nada garante inicialmente as boas seleções. Teorias, por um lado, e dados ou objetos, por outro lado, são referenciados circularmente, sempre há essa complementaridade.

“Complementaridade não é uma mera dualidade” (Otte, 1993, p. 224) de sentido e referência, mas é uma forma de conectar o objeto e o meio, ou seja, o fato e a teoria, mantendo-os em oposição também. “Os meios do conhecimento são de fato para serem diferenciados dos objetos do conhecimento, mas não para serem definidos sem o seu concurso” (ibid.)

> Em um objeto para ao qual não podemos produzir uma relação com algum meio qualquer, não existe para nós como objeto do conhecimento. Por isto é que também o objeto do conhecimento não é definível sem os meios. Contudo, o objeto do conhecimento não é totalmente subordinado aos meios. Fosse assim, então, as teorias seriam idênticas às suas linguagens, e um objeto empírico, como um elétron ou átomo, seria idêntico àquilo que uma certa teoria afirma sobre ele. No momento em que a teoria progredisse, o objeto mudaria. Ou se a teoria afirma algo bem diferente sobre o objeto, então ele perderia completamente sua identidade”. (Otte, 1993, p. 224)

A noção de complementaridade é de grande relevância nos estudos epistemológicos e, em particular, nos fundamentos da Educação Matemática, pois por meio dessa noção, entendemos que a Matemática, a partir de uma perspectiva genética, implica em ser uma ciência que abandona certos termos e noções, como *coisas em si*, ou seja, a ciência cujos objetos semânticos não são apresentados, ou ideias como a de *Matemática como tal*, ou seja, Matemática como verdade absoluta separada das nossas capacidades de experimentação.

É com base nessa abordagem semiótica e em busca dessa complementaridade que tentamos refletir, por meio de Experimentos Mentais, sobre como o conhecimento acerca da multiplicação de dois números naturais pode ser desenvolvido e quais implicações podem surgir nesse processo.

4 OS ASPECTOS TEÓRICOS DAS OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS

Russel escreve que, para uma "pessoa medianamente instruída de nossos dias, o ponto de partida óbvio da Matemática seria a série dos números inteiros" (2007, p. 18). Esses números constituem a série numérica 1, 2, 3, ..., n, $n+1$, ... "É essa série que teremos em mente quando falarmos da série dos números naturais" (Russel, 2007, p. 19).

> Toda a Matemática pura e tradicional, incluindo a geometria analítica, pode ser encarada como consistindo inteiramente em proposições acerca dos números naturais. Isto é, os termos que ocorrem podem ser definidos por meio dos números naturais, e as proposições podem ser deduzidas das propriedades dos números naturais – com a adição, em cada caso, das ideias e proposições da lógica pura (Russel, 2007, p. 19)

As ideias de soma e de multiplicação já estão intrínsecas na própria noção de número natural. A teoria dos números naturais, conhecida como Aritmética, baseia-se "no fato de que a adição e a multiplicação de números naturais obedecem a certas leis" (Courant & Robbins, 2000, p. 2). A generalização dessas leis é representada por letras a, b, c... as quais expressam números naturais quaisquer, uma vez que existe a noção de que, ao se considerar somente os símbolos 1, 2, 3, ..., que se referem a números naturais específicos, isso indicaria que, por exemplo, a proposição $1+2=2+1$ seria apenas um exemplo particular da lei geral. Essa lei geral garante que a soma de dois números naturais é a mesma, independentemente da ordem dos termos, ou seja, $a+b=b+a$.

A multiplicação é definida como a soma de parcelas iguais, que em termos gerais, poderia ser indicada por $a \times b = b + b + b + \cdots + b$ (com a parcelas iguais a b). Para este produto, também vale a propriedade comutativa, isto é, $a \times b = b \times a$. Como exemplo, ao verificar a propriedade comutativa para os números naturais específicos 2 e 3, podemos basear-nos na definição e explicar que $2 \times 3 = 3 + 3 = 6$ e $3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$, portanto, $2 \times 3 = 3 \times 2$, respeitando os princípios da lógica formal.

Mas podemos questionar se o zero (0) é um número natural. Russel argumenta que "só alguém com algum conhecimento de Matemática pensaria em começar com 0 em vez de 1" (2007, p. 19). Já Courant & Robbins (2000), utilizando um modelo concreto para representar números inteiros positivos, considerando-os como objetos de um conjunto de pontos colocados em um retângulo - isto é, um ponto correspondente a cada objeto - apresenta o zero como um retângulo completamente vazio, argumentando que:

> [...] estender ligeiramente o domínio dos inteiros positivos representados por retângulos com pontos, introduzindo o inteiro zero, representado por um retângulo completamente vazio. Se representarmos o retângulo vazio pelo símbolo usual 0, então, de acordo com nossa definição de adição e multiplicação, $a + 0 = a \; e \; a \times 0 = 0$ (Courant & Robbins, 2000, p. 4)

Multiplicar dois números inteiros positivos por esta representação de Courant & Robbins (2000) significa colocar os pontos em dois retângulos alinhados e formar um novo retângulo com a quantidade de linhas relativas ao primeiro fator e a quantidade de colunas relativas ao segundo fator. Por exemplo, multiplicar 5 por 4 é representar como na figura 1.

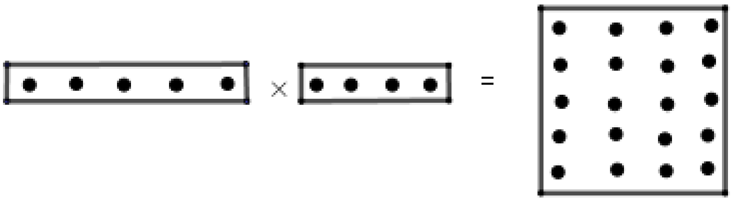

Figura 1. Multiplicação
Fonte: (Courant & Robbins, 2000, p. 3)

Fazendo uma análise com a definição dada para a multiplicação de números naturais, então $a \times 0 = 0 + 0 + \cdots + 0 \; (a \; parcelas \; iguais \; a \; zero)$. No entanto, na multiplicação, é válida a propriedade comutativa, o que sugere que $a \times 0 = 0 \times a$. Pela definição da multiplicação para números naturais, o que seria $0 \times a$? Isto é, $0 \times a = a + a + a + \cdots + a \; (0 \; parcelas \; iguais \; a \; a)$? Isso parece improvável ou até mesmo sem sentido. Portanto, a garantia de que o resultado desta multiplicação seja 0 ocorre apenas pela aplicação da lei comutativa? É necessário progredir, e a utilização dos Experimentos Mentais pode auxiliar na construção de um argumento, permitindo-nos chegar a alguma conclusão.

5 DESENVOLVENDO FATOS NA APLICAÇÃO DOS EXPERIMENTOS MENTAIS NA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

Otte argumenta que “a Matemática assenta, como quase toda ciência, na visão e nas metáforas visuais e geométricas” (1993, p.40). A ideia fundamental da Matemática é a geometrização, pois “ela faz com que as mais variadas coisas sejam imaginadas pelos matemáticos como pontos ou sistemas de pontos em algum espaço ideal” (Ibid.). Esse espaço é determinado pelas construções que são possíveis de serem realizadas nele. A Matemática, com o seu caráter hipotético-dedutivo, “é um procedimento que começa com uma metáfora gráfica ou na forma de um Experimento Mental e não como uma indução positiva com base em fatos objetivos” (Ibid., p.43).

Cruz (2018, 2022) conceitua, no campo da Educação Matemática, os Experimentos Mentais como formas que o sujeito utiliza para representar o próprio pensamento, sendo este colocado como objeto de consideração no desenvolvimento de um conceito, atividade ou problema em Matemática, por meio de um contexto teórico bem definido, o qual é chamado de sistema de representação. Esses experimentos cumprem o papel de mostrar a coerência do próprio conceito (ou até mesmo a sua modificação) e verificar a possibilidade de aplicação desse conceito em situações diversas.

Para reconhecer esses experimentos como uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática, consideramos seis importantes características que auxiliam o processo de experimentação mental. Essas características são nomeadas por: *Forma; Estrutura; Compreensão; Dependência; Revelação; Comparação* (Cruz, 2021, 2022).

A *Forma* é a característica inicial do processo de experimentação mental, cuja função é desenvolver conjecturas, hipóteses ou suposições por meio de uma representação particular do objeto geral considerado; É a representação do fato. Cruz explica que:

> Forma, neste contexto, tem o significado de atividades supostas, isto é, os Experimentos Mentais são baseados em um sistema de atividades supostas. Isto significa que as atividades partem de certas conjecturas e hipóteses desenvolvidas em uma representação particular do objeto geral. Ademais, “todo acesso cognitivo à realidade é relativo e mediado por signos” (Otte, 2001, p.2), isto quer dizer que este acesso não é direto e absoluto. (Cruz, 2021, p. 15)

A *Estrutura* refere-se ao desenvolvimento de uma ideia nova que não estava contida nos dados ou fatos iniciais levantados pela Forma. É o que Cruz chama de síntese abdutiva.

> Estrutura implica em dizer que os Experimentos Mentais não têm uma estrutura rígida. Muitas coisas são implicitamente assumidas. Há neste contexto a aplicação de uma síntese abdutiva. Síntese abdutiva é a introdução de uma ideia nova não contida nos dados do problema, da atividade ou da prova, permitindo dá as conexões que esses mesmos dados não teriam fornecido (Cruz, 2021, p.16)

A *Compreensão* é o desenvolvimento do processo dedutivo que parte dos dados apresentados nas premissas do argumento ou da atividade/problema em questão. Por meio de abduções na experimentação, o diagrama inicial pode ser modificado. É a complementaridade entre fatos e teoria desenvolvida por meio de um sistema de representação coerente (Dependência). Cruz afirma:

> Compreensão dá ênfase de que nos Experimentos Mentais há uma combinação de experiências e conhecimentos que devem seguir uma lógica de considerações heurísticas com deduções lógicas e cálculos formais quando necessários. É o processo dedutivo no desenvolvimento da experimentação mental. (2021, p. 16)

A *Dependência* é a teoria de base ou o universo do discurso; o sistema de representação que sustenta o desenvolvimento do Experimento Mental. No contexto de aplicação dos Experimentos Mentais, toda ação está embasada em uma teoria de base, que pode ser também modificada, acrescida ou mantida no decorrer do processo.

> Dependência indica que o processo de experimentação mental está dependendo de conhecimentos e argumentos aceitos pela comunidade, mesmo não sendo argumentos estritamente lógicos. Este processo nos possibilita compreender que "aprender novas coisas, sem novos dados, surge do fato de que o importante são as aplicações dos conceitos ou dos objetos e não apenas as relações dos conceitos entre si, ou seja, não é apenas a coerência da teoria" (Cruz, 2018, p.74). (Cruz, 2021, p. 17)

A *Revelação* apresenta alguns resultados e contradições, abrindo possibilidades para novos conhecimentos por meio do processo dialético envolvido na aplicação dos Experimentos Mentais. Também pode revelar erros ou desajustes conceituais.

> Os Experimentos Mentais têm a capacidade de revelar um desajuste no aparato conceitual tradicional, permitindo ao experimentador ou ao cientista utilizar seus conhecimentos da mesma forma que utilizava antes, por outro lado, esses experimentos mostram contradições e/ou confusões lógicas no desenvolvimento da dada atividade, provas e/ou problema apresentado. (Cruz, 2021, p. 17, 18)

A *Comparação* amplia o escopo da experimentação para novas situações, quando for possível e de interesse do experimentador.

> Comparação neste processo é para afirmar que é possível comparar o conhecimento com outras possibilidades de solução em uma dada atividade, prova e/ou problema. Nós muitas vezes ganhamos novos conhecimentos quando algo que já foi dito uma vez é dito mais de uma vez de um modo novo (Cruz, 2021, p. 18)

A possibilidade de aplicação dos Experimentos Mentais no ensino de Matemática baseia-se na crença de que "a Matemática é uma atividade semiótica, ou seja, uma atividade de construção de diagramas, experimentação sobre esses diagramas e verificação dos resultados" (Cruz, 2022, p. 32). Isto não significa que estamos transformando a Matemática em apenas uma resolução criativa de problemas, mas sim contribuindo para o desenvolvimento da relação humana, de forma não supersticiosa, do indivíduo com o conhecimento. Pois a Matemática "não é simplesmente uma linguagem e nem uma ciência analítica de conceitos. Ela compreende representações indexais e atividade observacionais” (Otte, 2012, p. 16).

Nesse processo semiótico, destacamos, seguindo dos Experimentos Mentais, que “o melhor pensamento, especialmente em assuntos matemáticos, é aquele que estivesse experimentando na imaginação um diagrama ou outro esquema” (Peirce, 1976, NEM I. 122, apud Otte, 2012, p. 16).

5.1 Aplicando a Metodologia na multiplicação de 3 por 2

O objetivo da atividade é mostrar, por meio de um Experimento Mental, um contraponto ao método formal das operações com números naturais. Iniciamos com a questão: Por que $3 \times 2 = 2 \times 3$? Relembrando o modo tradicional, a explicação da igualdade apresentada pode ser dada por:

$$3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6 = 3 + 3 = 2 \times 3.$$

No entanto, esta explicação falha quando consideramos, por exemplo, que $2 \times 0 = 0 \times 2$. Otte disserta que surge no ensino da Matemática um fenômeno corrente em que

> [...] alguém resolveu um exercício, estudou um problema e alcançou um resultado, mesmo assim, mais tarde, num contexto diferente, por exemplo, num exame, não dispõe de forma alguma desse resultado e do saber nele envolvido, isto é, não reconhece o exercício de modo algum. (Otte, 1993, p. 72, 73).

Experimento Mental traz ideias e coloca o sujeito e o objeto frente a um desafio e algumas contradições, mas gera a possibilidade de reconhecer o objeto do conhecimento e tirar certas conclusões dessa relação. Vamos aplicá-lo, por meio de suas características.

Forma: Supondo que na nossa multiplicação, o primeiro fator representa a quantidade de retas paralelas na horizontal, tendo como base a linha do horizonte, e o segundo fator representa a quantidade de retas paralelas na vertical.

Estrutura: Entendendo que as retas são formadas por pontos e que o encontro de duas retas se dá em um ponto comum, então essas retas horizontais e verticais se encontrarão em um determinado número de pontos e esse número é o resultado da multiplicação.

Compreensão: Com base nos diagramas (figura 2) podemos concluir que as retas na multiplicação 3×2 se encontram em 6 pontos e no caso da multiplicação 2×3 também se encontram em 6 pontos.

Dependência: Nosso sistema de representação, ou seja, nosso campo teórico ou universo do discurso, se apoia nas concepções da geometria euclidiana. Multiplicação para nós é o encontro de retas paralelas na horizontal com retas paralelas na vertical.

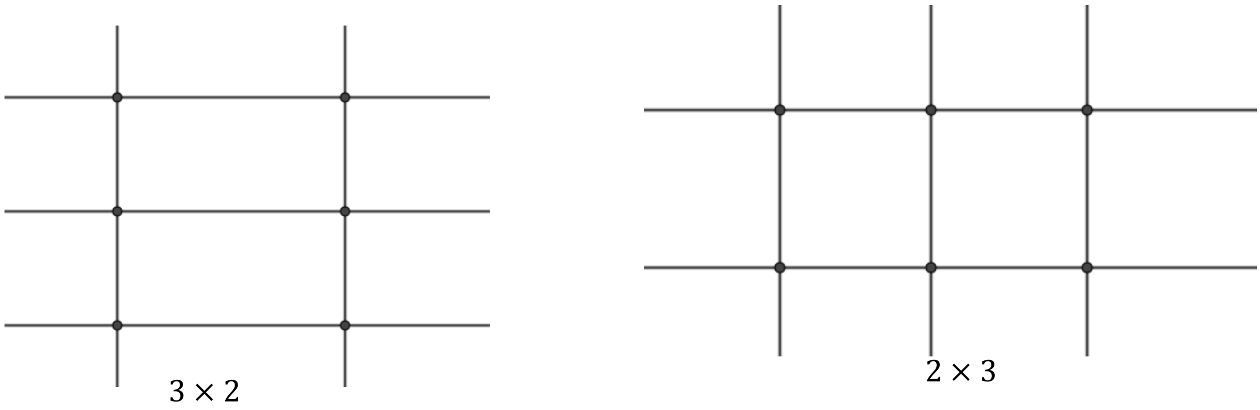

Figura 2. Multiplicação por retas paralelas
Fonte: Elaborado pelo autor

Cabe destacar que a multiplicação de retas paralelas horizontais por retas paralelas verticais resulta em pontos. Portanto, para o caso específico de nossa atividade, chegamos à conclusão que $3 \times 2 = 2 \times 3$.

Revelação: Como fica a multiplicação de, por exemplo, 2×0 e 0×2, já que na primeira multiplicação temos duas retas paralelas horizontais e não temos retas verticais, e na segunda temos duas retas verticais e não temos retas horizontais, como observado na figura 3? Como proceder nesse caso, já que o resultado da multiplicação são pontos de encontro?

Esta contradição pode ser resolvida ampliando nosso campo de solução.

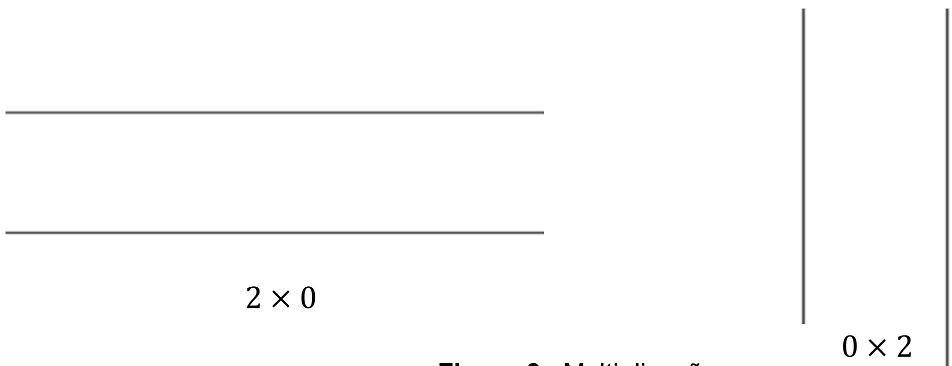

Figura 3. Multiplicação por zero
Fonte: Elaborado pelo autor

Comparação: Podemos ampliar nosso processo, ou seja, o resultado de nossa multiplicação será a quantidade de pontos de encontro ou zero (quando não houver pontos encontrando). Portanto, $2 \times 0 = 0 \times 2$.

Talvez nosso experimento tenha trazido explicações para a multiplicação de números naturais e algumas contradições. Mas é neste processo histórico-epistemológico de contradições e ideias, no qual acreditamos, que o conhecimento se dá. É na contradição que novas ideias e pensamentos surgem.

A própria Educação é um processo contraditório, isto é, “uma totalidade de ação e reflexão” (Gadotti, 1995, p. 74) que, por um lado, traz a autoridade e, por outro lado, a liberdade. Gadotti (1995) argumenta que este processo contraditório não elimina a autoridade, pois caso contrário, cairíamos em um espontaneísmo libertário no qual a educação não acontece. Por outro lado, esse processo também não elimina a liberdade, pois, caso contrário, cairíamos no risco de um autoritarismo, para qual também não há educação.

D’Ambrosio traduz esta contradição definindo educação “como um conjunto de estratégias desenvolvidas pela sociedade para: a) possibilitar a cada indivíduo atingir seu potencial criativo; b) estimular e facilitar a ação comum, com vistas a viver em sociedade e exercer a cidadania” (2011, p. 25).

Sintetizando essas ideias, construímos o mapa mental apresentado na figura 4.

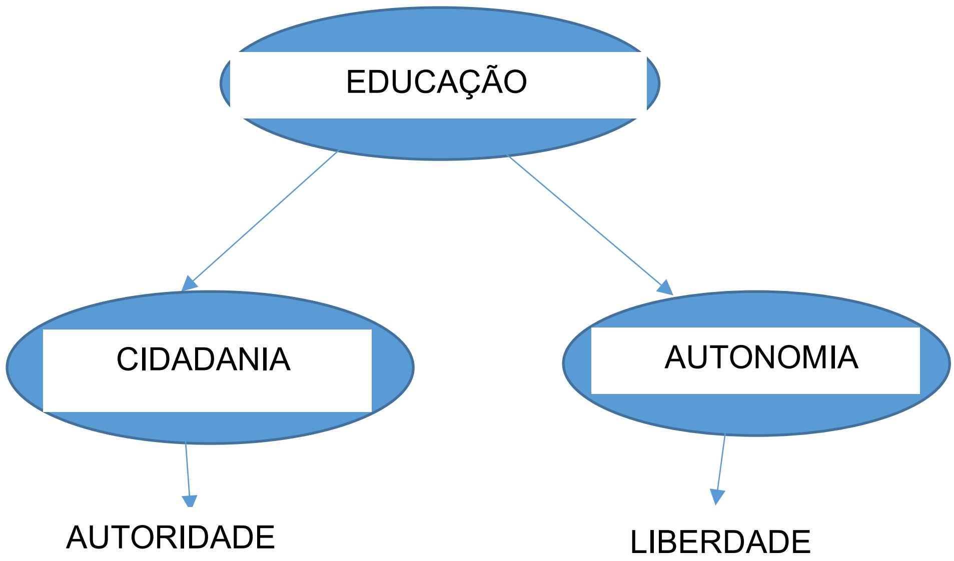

Figura 4. O que é Educação
Fonte: Elaborado pelo autor

Essa visão mais ampla da educação mostra o aspecto complementar que, por um lado, promove a cidadania, transmitindo valores e destacando as responsabilidades e os direitos de cada indivíduo e, por outro lado, promove a criatividade, auxiliando os indivíduos a satisfazerem suas aptidões nos diversos campos ou áreas da sociedade, a fim de poderem criar, inventar, inovar e auxiliar no despertar da curiosidade epistemológica.

Contudo, em um processo de curiosidade epistemológica, é possível pensar em como a multiplicação de retas que possuem infinitos pontos pode gerar um resultado com quantidade finita de pontos. Essa questão e outras devem ser reforçadas pelo espírito de um educador democrático, que na visão de Freire "não pode negar-se o dever de, na sua prática docente, reforçar a capacidade de crítica do educando, sua curiosidade, sua insubmissão" (2019, p. 28). Tais debates em uma sala de aula de Matemática reforçam a tarefa primordial do professor em "trabalhar com os educandos a rigorosidade metódica com que devem se aproximar dos objetos cognoscíveis" (Freire, 2019, p. 28).

Segundo Freire, a rigorosidade metódica é oposta ao perfil da educação bancária, cuja função do professor é de um mero transmissor do objeto ou do conteúdo. Para este autor,

> [...] ensinar não se esgota no tratamento do objeto ou do conteúdo, superficialmente feito, mas se alonga à produção das condições em que aprender criticamente é possível. E essas condições implicam ou exigem a presença de educadores e de educandos criadores, instigadores, inquietos, rigorosamente curiosos (Freire, 2019, p. 28)

O processo de Experimentação Mental não se limita apenas a mostrar uma forma de desenvolver uma atividade ou problema, mas se abre como um espaço de debates, críticas e pensamento criativo.

6 CONSIDERAÇÕES

Existem duas teorias clássicas dominantes que ainda podem ser identificadas no ensino e na aprendizagem da Matemática. A primeira coloca a mente como um espaço vazio a ser preenchido a partir da experiência, ou seja, "é por vermos uma série de objetos redondos, nenhum dos quais perfeitamente redondo, que somos capazes, apesar de tudo, de abstrair a ideia de círculo" (Strauss, 1978, p. 12). A segunda teoria considera que as ideias são inatas à mente, ou seja, as "ideias de círculo, de triângulo, de linha, eram ideias perfeitas, inatas à mente, e é por existirem na mente que somos capazes de as projetar, para o dizer de algum modo, na realidade, embora a realidade nunca nos ofereça um círculo ou um triângulo perfeitos” (Strauss, 1978, p.12).

Essa dualidade entre mente e experiência, fatos e teoria, objetos e meios, é o cerne da discussão que considera a Matemática como uma atividade semiótica, que constrói diagramas, que realiza experimentos nesses diagramas e que verifica os resultados. A capacidade de ver um número como um objeto em si é nula, pois não existe número geral. Cada número difere do outro. Portanto, buscamos, de certa forma, um contexto ou uma significação que caracterize a representação simbólica desse conceito. A geometria euclidiana é o contexto considerado neste artigo para refletirmos sobre as possibilidades de compreensão da multiplicação de números naturais.

A Matemática carrega o princípio de questionar a exatidão de certos axiomas, como, por exemplo, pensar na propriedade comutativa ao considerar que $2 \times 0 = 0 \times 2$. Não é apenas a coerência da teoria, pois as “teorias se transformam em realidades autônomas, cuja relação com a realidade real ainda é uma incógnita” (Otte, 1993, p. 79). Mas as teorias devem estar relacionadas aos fatos, à realidade concreta, ou seja, ao contexto apresentado.

As representações são importantes, pois nos permitem ter percepções do objeto, auxiliando-nos a desenvolver atividades como se estivéssemos lidando com as partes desse objeto e a tirar conclusões. Ensinar Matemática não se resume a transmitir regras e memorizar procedimentos. A essência da Matemática reside na “evidência imediata apodíctica de uma dedução lógica ou na intuição direta do diagrama (algébrico ou geométrico)” (Otte, 1993, p. 78). Esses diagramas são construídos de acordo com determinadas regras e análises, com o objetivo principal de gerar significados para a efetivação da ação de ensinar, que é a aprendizagem.

Portanto, para os propósitos deste texto, acreditamos que os Experimentos Mentais demonstraram a capacidade de refletir sobre a multiplicação de números naturais, possivelmente criando uma conexão com um conhecimento mais significativo, isto é, um conhecimento que se desenvolve por meio da contradição e na complementaridade entre fatos e teoria.

REFERÊNCIAS

Courant, R. & Robbins H. (2000). *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.

Cruz, W. J. (2018). *Experimentos Mentais na Educação Matemática: uma analogia com provas matemáticas formais.* Curitiba: Editora Aprris.

Cruz, W. J. (2021). O uso dos experimentos mentais como possível metodologia de ensino da Matemática: um olhar epistemológico. Florianópolis. *Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT*, v.16 p. 01 – 26.

Cruz, W. J. (2022). *Experimentos Mentais: uma nova metodologia para o ensino de Matemática.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.

D'Ambrosio, U. (2011). *Educação para uma sociedade em transição*. 2ª ed. RN: EDUFRN.

Freire, P. (2019). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. Rio de Janeiro/São Paulo: Paz e Terra.

Gadotti, M. (1995). *Concepção dialética da educação: um estudo introdutório* – 9ª edição. São Paulo: Cortez.

Hersh, R. (1997). *What tis Mathematics, really?* Oxford: Oxford University Press, Inc.

Lakatos, I. (1978). *A lógica do descobrimento Matemático: provas e refutações*. Rio de Janeiro: Zahar Editora.

Manfredi, S. M. (1993). Metodologia de Ensino-diferentes concepções (versão preliminar). Campinas: *F.E./UNICAMP*.

Otte, M. F. (1993). *O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à filosofia e à didática da Matemática*. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista.

Otte, M. F. (2001). Mathematical Epistemology form a Peircean Semiotic Point of View. *Paper presented at PME in Utrecht*.

Otte, M. F. (2012). *A realidade das Ideias: Uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática*. Cuiabá: EDUFMT.

Peirce, C. S. (CP). (2010). *Semiótica*. Trad. Jose Teixeira Coelho Neto. 4ª ed. São Paulo: Perspectiva.

Peirce, C. S. (1976). *The New Elements of Mathematics*., 4 vols., ed. EISELE, C. The Hague: Mouton (citado como NEM, seguido pelo número do vol.)

Reichenbach, H. (1951). *The rise of Scientific Philosophy*. London: Berkeley an Los Angeles: Cambridge University Press.

Russel, B. (2007). *Introdução à filosofia matemática.* Rio de Janeiro: Zahar editora.

Strauss, L. C. (1978). *Myth and Meaning*.Toronto: University of Toronto Press.

Thuillier, P. (1994). *De Arquimedes a Einstein: a face oculta da invenção científica*. Rio de Janeiro: Zahar Editora.

NOTAS DA OBRA

Título da Obra
Experimentos Mentais Na Multiplicação De Números Naturais: Reflexões Teóricas Por Meio De Uma Metodologia Alternativa

Willian José da Cruz
Doutor em Educação Matemática pela UNIAN-SP
Professor adjunto da Universidade Federal de Juiz de Fora; Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Departamento de Matemática, Juiz de Fora – MG.
Williancruz990@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7509-1021

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Pétrus Zaka, 125, apt. 202. Bairro Cascatinha, Juiz de Fora – MG. CEP: 36033270.

AGRADECIMENTOS
Agradeço ao meu grupo de Pesquisa GEPEMEM – (Grupo de Estudos e Pesquisa dos Experimentos Mentais na Educação Matemática).

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: W. J. CRUZ
Coleta de dados: W. J. CRUZ
Análise de dados: W. J. CRUZ
Discussão dos resultados: W. J. CRUZ
Revisão e aprovação: W. J. CRUZ

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não Se aplica

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

Débora Regina Wagner
Jéssica Ignácio de Souza
Eduardo Sabel

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 21-12-2022 – Aprovado em: 12-06-2023