Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ELABORAÇÃO DE UMA ARQUITETURA SEMIOCOGNITIVA PARA A APRENDIZAGEM DO OLHAR NAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS CARTESIANAS

Semiocognitive Architecture Elaboration For Learning The Look In Cartesian Graphic Representations

Thiago Henrique das Neves **BARBOSA**
Instituto Federal Catarinense, Camboriú, Santa Catarina, Brasil
thiago.barbosa@ifc.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-3127-8393

Méricles Thadeu **MORETTI**
Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil
mthmoretti@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos um olhar sobre o estudo da reta, na perspectiva da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Será realizada uma análise qualitativa de atividades propostas, a partir de uma sequência didática sobre esse assunto, aplicada numa turma do terceiro ano do ensino técnico integrado ao ensino médio de um Instituto Federal, situado em Santa Catarina. Essa análise estará pautada nas operações cognitivas – tratamento e conversão – e apresentará, em algumas situações, funções discursivas e metadiscursivas, relacionadas à resolução dos estudantes nas atividades propostas. A reta, enquanto objeto matemático, está presente em todo o itinerário formativo do estudante, podendo ser estudada num sistema de representação geométrico-cartesiano. Esse último por sua vez, criado ainda no século XIV, possui desdobramentos históricos no desenvolvimento da matemática e mostrou-se ser um instrumento de aprendizagem multidisciplinar. Desta forma, entendem-se como relevantes e apropriadas discussões que visam abordar os processos cognitivos de apreensão de objetos matemáticos, nesse caso, a reta. Por fim, a partir da análise da produção dos estudantes, verificou-se dificuldades relevantes no que cerne a processos de tratamento nas formas de representações algébricas da reta.

Palavras-chave: Estudo da Reta, Geometria Cartesiana, Apreensão Global Qualitativa

ABSTRACT

In this paper, we will present a look at the study of the line, from the perspective of Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Registers. A qualitative analysis of proposed activities will be carried out, based on a didactic sequence on this subject, applied in a third-year class of technical education integrated into high school at a Federal Institute, located in Santa Catarina. This analysis will be based on cognitive operations – treatment and conversion – and will present, in some situations, discursive and metadiscursive functions, related to the students' resolution in the proposed activities. The line, as a mathematical object, is present throughout the student's formative itinerary, and can be studied in a geometric-cartesian representation system. The latter, in turn, created in the fourteenth century, has historical consequences in the development of mathematics and proved to be a multidisciplinary learning tool. In this way, it is understood as relevant and appropriate discussions that aim to approach the cognitive processes of apprehension of mathematical objects, in this case, the line. Finally, from the analysis of the students' production, it was verified relevant difficulties regarding the treatment processes in line algebraic representations forms.

Keywords/Palabras clave: Line Study, Cartesian Geometry, Global Qualitative Apprehension

1 INTRODUÇÃO

A possibilidade de integrar operações semiocognitivas[1] que são tratadas em assuntos diferentes da matemática, como por exemplo o caso da geometria euclidiana e o gráfico cartesiano, que denominaremos a junção desses dois assuntos como *geometria cartesiana*, caminha no sentido de construção de um espaço de aprendizagem matemática que Duval (2004) denomina de *arquitetura semiocognitiva* na aprendizagem do olhar na geometria cartesiana: “o que emerge da consciência resulta do funcionamento de diferentes sistemas cognitivos que constituem a *arquitetura cognitiva* do sujeito e reflete o grau de coordenação funcional existente entre esses diferentes sistemas.” (Duval, 1999, p. 9).

Assim, a arquitetura semiocognitiva do olhar em geometria cartesiana, recebe duas fontes de operações semiocognitivas: uma delas, são os elementos de aprendizagem da geometria euclidiana constituídos pelas apreensões em geometria, as mudanças de dimensão e os diferentes tipos de olhares em geometria; a outra fonte diz respeito aos diferentes tipos de olhares na aprendizagem gráfico-cartesiana. O que essa arquitetura congrega são duas fontes que tem por base a apreensão perceptiva que é um assunto de extrema importância, tanto que em Moretti (2013) há uma discussão em relação a aprendizagem do olhar em geometria ainda nos anos iniciais que procura integrar: (1) as sete categorias de capacidades espaciais de Van Hiele e Van Hiele-Geldof (1958) e Clements e Battista (1992)[2] e; (2) os diferentes tipos olhares na aprendizagem da geometria de Duval (2022)[3] e Duval (1995, 2012b).

---

[1] Entende-se como operações semiocognitivas: a formação, o tratamento e a conversão (DUVAL, 2004, p. 31-32).

[2] São as seguintes: Coordenação Visual Motora, Percepção Figura-Fundo, Constância Perceptual, Percepção da Posição no Espaço, Percepção das Relações Espaciais, Discriminação Visual, Memória Visual.

[3] Este texto de Duval (2022) é tradução do artigo Duval (2005)

Quadro 1: As três maneiras de ver um gráfico cartesiano

As três maneiras de ver	O que é observado	O que é mobilizado
I. Apreensão **LOCAL PONTO A PONTO** (somente são retidos pontos considerados isoladamente)	PONTOS DE INTERSEÇÃO identificáveis ***em um plano quadriculado a partir de dois eixos graduados***. Associações (pontos, pares de números) (a figura/fundo)	**Uma associação entre dois valores numéricos. A regra de construção é uma regra de codificação**: um ponto de intersecção sobre um plano quadriculado segundo os graduados (a figura-fundo) corresponde a uma dupla números.
II. apreensão ICÔNICA (a imagem estampa uma “tendência”).	deslocamentos (para cima/para baixo) ***em relação a um nível horizontal***	UMA ANALOGIA DE ORIENTAÇÃO no espaço físico real 3D *(estar mais alto, mais baixo, relevo do terreno).*
III. Apreensão **GLOBAL QUALITATIVA** (*discriminação qualitativa das* ***características figurais*** que distinguem dois gráficos *de mesma forma ou não*).	- Intrínsecos: formas 1D (retas, curvas) *ou 2D* (zonas); - Extrínsecos: *orientação* **em relação aos dois eixos** e a *posição* de interseções em relação aos eixos. (um gráfico é uma figura que se destaca da figura-fundo dos eixos)	CORRESPONDÊNCIAS com as ***características semânticas*** da ESCRITA simbólica de uma relação (funcional ou não) *entre duas variáveis.*

Fonte[4]: elaborado pelo autor a partir de (Duval, 1999, p. 50) e (Duval, 2004, p. 67)

A construção de uma tabela de pontos a partir da equação da curva, induz o aluno à maneira de ver do tipo 1, a forma de ver o gráfico como um emaranhado de pontos: os pares ordenados são calculados usando a equação da curva, são localizados no plano cartesiano e conectados para formar a curva:

> Muitas vezes, os alunos são solicitados a construir um gráfico traçando pontos a partir de uma tabela de valores. Este processo molda sua visão dos gráficos e pode incentivar interpretações gráficas que focalizem em um ponto em vez de características significativas de um gráfico, como intervalo e inclinação (Clements, 1985, p. 2, tradução nossa).

Em Duval (1988)[5], chama o terceiro olhar de *abordagem de interpretação global de propriedades figurais*, mas adotaremos a denominação mais sintética de *apreensão global qualitativa* usada em Duval (2004, p. 66).

A partir da leitura de Duval (2011, 2004), pode-se inferir que não há nenhuma hierarquia estabelecida de forma explícita nessas apreensões do olhar nos gráficos cartesianos. Contudo, entendemos que o ensino deve promover o aluno ao terceiro tipo

[4] O texto Duval (2004) é uma tradução de Duval (1999): preferimos referenciar esses textos, em alguns casos, uma vez que a tradução se diferencia do texto original e por ser mais acessível.
[5] Duval (2011) é uma tradução desse texto.

de olhar, a apreensão global qualitativa, que leva em conta a equação matemática da curva não apenas para determinar os pares ordenados, mas para “varrer o conjunto de variações de representação qualitativamente discerníveis à vista” (Duval, 2004, p. 70). Na sequência estudaremos alguns casos.

Além disso, pensamos importante abraçar um tipo de esboço e de leitura de um gráfico que caminhe na direção dos elementos do cálculo diferencial e integral, tal como a noção de derivada principalmente. A linha que adotaremos no esboço também vai incluir elementos da noção de taxa de variação. Vale ressaltar que quando nos deparamos com o estudo da reta em geometria analítica é comum os livros apresentarem equações diferentes para este objeto. Essas formas são importantes, pois cada uma delas fornece informações distintas sobre ele.

Na seção 2 serão explicitadas as formas de equações da reta, apresentando elementos significativos de cada forma; na seção 3 serão descritas e discutidas as atividades realizadas com os estudantes e, finalmente, na seção 4, serão apresentadas as considerações finais do trabalho.

2 AS DISTINTAS FORMAS DE EQUAÇÃO DA RETA: PERSPECTIVA GLOBAL QUALITATIVA

2.1 Equação reduzida

Olhando a reta como o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau no plano cartesiano, trata-se de uma reta não horizontal e não vertical nas mais variadas posições em relação aos eixos e à origem do sistema. A expressão algébrica dessa função real é dada por $y = mx + n$, sendo $m \neq 0$ e n reais. No caso em que $m = 0$, temos uma função constante $y = n$ cujo gráfico ainda é uma reta, mas horizontal.

O termo n é chamado de coeficiente linear e m de coeficiente angular. O coeficiente angular é motivo de muitos equívocos, uma vez que o que é mostrado no gráfico pode não condizer com o valor de m na equação da reta. Os dois casos apresentados, a seguir, para n = 0, ilustram a situação para as retas $y = x$ e $y = 3x$.

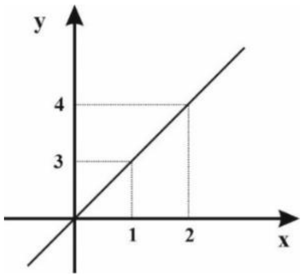


Figura 1A: Reta y = 3x

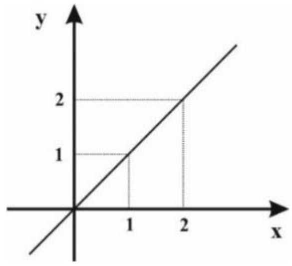


Figura 1B: Reta y = 1x

Fonte: Elaborado pelos autores

As figuras 1A e 1B mostram ângulos idênticos com que cada uma das retas forma com o eixo *x*, no entanto, apesar dessa aparência, os coeficientes angulares das retas não são iguais.

Há ainda situações de gráficos de uma mesma equação da reta em que, de forma visual, os ângulos formados com o eixo *x* não são congruentes, o que pode ocorrer em muitas situações, para isso basta fazer escolhas convenientes de diferentes escalas. Isso que apontamos é uma fonte de dificuldades para os alunos que se encontram nos níveis 1 e 2 de apreensão, uma vez que esse tipo de constatação só é conseguido por um aluno que se encontra no nível 3, o nível que pode utilizar a apreensão global qualitativa em que a expressão algébrica é levada em conta. É principalmente por essa razão que se prefere, no lugar de coeficiente angular, chamar o coeficiente *m* de *taxa de variação* que remete a uma outra percepção, a uma relação entre como variam entre si as variáveis em jogo.

A taxa de variação de $y = mx + n$ é constante e vale *m*. No ensino de matemática, de uma forma geral, essas funções são trabalhadas sem considerar as unidades de medidas nos eixos. No caso em que os eixos têm unidades de medidas, a taxa de variação pode ter significados diferentes (por exemplo, *m* é a velocidade da função da distância pelo tempo).

A comparação entre duas retas apresentadas em um mesmo plano não deixa dúvida qual reta possui maior ou menor coeficiente angular *m*, mas o seu significado permanece problemático. Consideremos o seguinte exemplo tratado por McDermott et al (1987)[6].

[6] Este estudo foi realizado pelos autores ao longo de vários anos, num curso preparatório para alunos que gostariam de ingressar no curso de Física, da Universidade de Washington.

A figura ao lado mostra a posição versus tempo para o movimento de dois objetos A e B. No instante t = 2s a velocidade do objeto A é maior, menor ou igual à velocidade do objeto B?

Explique a tua resposta.

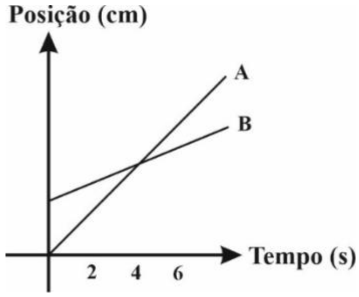


Figura 2: problema que trata do deslocamento de dois objetos
Fonte: adaptado de McDermott et al (1987, p. 504)

Essa questão fora apresentada a um grupo de estudantes universitários em um curso preparatório de física. Para responder essa questão é necessário que o estudante saiba que a inclinação da reta representa a velocidade e, no caso exposto da Figura 2, é a reta que representa o caminho do deslocamento do objeto A que tem maior inclinação e, portanto, maior velocidade:

> Muitos estudantes não responderam de forma correta. A maioria das respostas incorretas é vista como sendo devida à falta de percepção de que a informação sobre a velocidade não pode ser extraída da altura. No instante t = 2s, a linha B está acima da linha A, e muitos estudantes se prendem a essa diferença de altura no lugar da diferença de inclinação para determinar qual objeto tem maior velocidade (Mcdermott et al, 1987, p. 504)

Sobre esse mesmo problema, Duval (2004, p. 69) ressalta que “Um aluno incapaz de discriminar as variáveis visuais pertinente daquelas que não são pertinentes, só pode estar em um procedimento ponto a ponto ou em uma apreensão do tipo icônica.” É o caso dos estudantes que erraram essa questão, são impelidos pelo olhar que mostra claramente o objeto B acima do objeto A em $t = 2s$ e isso é suficiente para afirmar que a velocidade do objeto B é maior do que a do objeto A.

No caso estudado por McDermott et al (1987) parece ser indiferente tratar m como taxa de variação ou coeficiente angular uma vez que os gráficos estavam dispostos em um mesmo plano cartesiano. No entanto, a taxa de variação poderia chamar a atenção para a variação do deslocamento (em cm) em um certo intervalo de tempo (s). A questão, certamente, mudaria caso as retas fossem disponibilizadas em planos cartesianos distintos, uma vez que a “altura” em que se encontram os objetos no instante $t = 2s$ não seria tanto destaque quanto foi o caso das retas em um mesmo plano cartesiano como mostrou a Figura 2. A seguir, iremos tratar dessa questão.

2.2 Diferenças semiocognitivas entre tratar *m*, da reta *y* = *mx* + *n*, como sendo coeficiente angular ou taxa de variação

No quadro a seguir acomodamos as variáveis visuais que devem ser levadas em conta no olhar de uma reta no plano cartesiano. E trata desses valores no primeiro quadrante, mas discussão semelhante pode ser feita nos demais quadrantes.

Quadro 2: Variáveis visuais para a reta no plano cartesiano.

Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais
1ª - o sentido da inclinação do traçado:	- a linha **sobe** da esquerda para a direita; - a linha **desce** da esquerda para a direita. **Observação:** a referência esquerda/direita é o sentido normal do percurso visual de uma página escrita em caracteres latinos.
2ª - os ângulos do traçado com os eixos:	Há uma **repartição simétrica** do quadrante **percorrido.** - o ângulo formado com o eixo horizontal **é menor que** o ângulo formado com o eixo vertical; - o ângulo formado com o eixo horizontal **é maior que** o ângulo formado com o eixo vertical; **Observação:** no caso em que o traçado não passa pela origem, basta deslocar o eixo vertical, por exemplo, até o ponto de intersecção da reta com o eixo horizontal.
3ª - a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical:	- o traçado passa **abaixo** da origem; - o traçado passa **acima** da origem; - o traçado passa **pela origem**.

Fonte: Duval (2011, p. 101)

O uso de *m*, da reta *y* = *mx* + *n*, como sendo o coeficiente angular são marcados pelo uso dos valores da 2ª variável visual: repartição simétrica, angulo formado com o eixo horizontal é maior ou menor do que o ângulo formado com o eixo vertical.

Uma apreensão ponto a ponto ou, até mesmo icônica, não levaria em conta a equação da reta e, por consequência, conforme já discutimos anteriormente, as escalas utilizadas. A mesma observação pode ser feita para o caso da 1a variável qualitativa que visualmente também depende das escalas utilizadas nos eixos graduados. Essas questões relacionadas às escalas desapareceriam em uma discussão de duas ou mais retas com as mesmas escalas, principalmente, produzidas em um mesmo gráfico cartesiano como foi o caso do problema apresentado na figura 2.

Levando-se em conta a equação da reta, a quadro 2 pode ser reescrita considerando os valores numéricos que aparecem na equação, conforme mostra a quadro 3 a seguir:

Quadro 3: Valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano.

Variáveis visuais	**Valores**	**Unidades simbólicas correspondentes**	
1ª Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença do sinal –
2ª Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coefic. variável = 1 coefic. variável < 1 coefic. variável > 1	não há coefic. escrito há coefic. escrito há coefic. escrito
3ª Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	cresc. constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

Fonte: Duval (2011, p. 101)

O ângulo β' em que a reta *y* forma com o eixo *x*, medido de forma qualitativa, conforme mostra a 2ª variável do quadro 3, pode ter o seu valor real β calculado pela expressão $\beta = arctg\ (m)$. O que ocorre muitas vezes é que β' não bate com β. O termo coeficiente angular remete aos valores da 2ª variável visual (2ª coluna do quadro 3) e não necessariamente às unidades simbólicas correspondentes (3ª coluna do quadro 3), ou seja, o estudante vai priorizar o que vê.

O coeficiente *m*, quando denominado de taxa de variação, remete a um valor que mede o quociente entre valores das variáveis *x* e *y* medidos em um determinado intervalo. Assim, se Δx é a variação de x em um certo intervalo e Δy a variação de *y* medida neste mesmo intervalo, $m = \Delta x/\Delta y$. O termo taxa de variação não faz apelo a nenhuma variável visual, o estudante deverá constatar o valor de *m*, caso haja a equação da reta, ou determinar por ele mesmo no próprio gráfico escolhendo um intervalo e fazendo os cálculos.

Um gráfico, em um sistema cartesiano, pode ser também visto como a composição de elementos geométricos: ponto, linha, ângulo, região, área, volume etc. O impulso em responder uma questão, como por exemplo o caso da questão proposta na figura 1, lembra a operação semiocognitiva desenvolvida por Duval (2003) na aprendizagem da geometria: a apreensão perceptiva. A seguir discutiremos as apreensões na aprendizagem da geometria e implicações na geometria cartesiana.

2.3 As apreensões na aprendizagem da geometria

A apreensão perceptiva é a mais importante das apreensões uma vez que de todas as outras apreensões dependem dela. Ela se divide em duas apreensões, uma imediata que é comandada por leis de formação da gestáltica e a outra aliada a apreensão discursiva que deve se guiar por aquilo que está sendo solicitado no problema: "Estas duas atitudes encontram-se geralmente em conflito porque a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado e que os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente". (Duval, 2012b, p. 120, 121).

Exemplo dessa situação ocorreu no problema da figura 2, os alunos que responderam de forma incorreta, se deixaram levar pela apreensão imediata e se basearam nas alturas dos objetos A e B em $t = 2s$ para dar a resposta. Uma figura inserida em um sistema geométrico-cartesiano possui ainda uma complexidade maior, em relação a uma figura da geometria euclidiana, por conta da orientação dos eixos que precisa ser considerada.

A apreensão discursiva possui uma característica fundamental que é a função de identificação que deslancha algum procedimento comandado pela *apreensão operatória* que é responsável por alguma atitude que pode significar uma operação figural. No caso da figura 2, a atitude foi de comparar as alturas e concluir que o objeto B tem velocidade maior do que o objeto A em $t = 2s$. Isso mostra que o que a apreensão perceptiva identifica nem sempre leva a apreensão operatória para o caminho correto: nesse caso, entra em jogo um fenômeno semiocognitivo que Duval (2003a) se refere como *congruência semântica* que reflete o grau de transparência entre duas representações de um mesmo objeto matemático: o olhar identifica o ponto mais alto de um dos segmentos de reta para indicar a maior velocidade no lugar da análise da inclinação: "Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência –, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência" (Duval, 2003a, p. 19) . Nesse sentido, a congruência semântica está relacionada com a espontaneidade pela qual o estudante consegue realizar inferências, entre unidades significantes de partida e de chegada do objeto em questão.

2.4 Esboço da reta centrado na taxa de variação: perspectiva global qualitativa.

A taxa de variação da reta $y = mx + n$ é m, parâmetro que produz muitos significados: pode ser velocidade, aceleração etc., que depende das escalas usadas por x e y. Portanto, é bastante razoável centrar o esboço da reta no coeficiente m que é derivada de y em relação a x.

A reta possui diversas formas de equação, mas utilizaremos para o nosso propósito a forma reduzida $y = mx + n$ ou $y – n = m(x – 0)$. Ambas as formas mostram de modo bastante imediato que m é a taxa de variação e $(0, n)$ é um ponto que pertence a reta e que cruza o eixo das ordenadas.

$y = mx$ é a equação da reta que passa na origem e mostra de forma isolada a taxa de variação m e será com alicerce nessa equação, que é uma representação transitória, e que chamaremos de representação mãe. Será com base na representação mãe que as outras retas $y = mx + n$ serão determinadas e, para isso, uma operação geométrica denominada translação será utilizada:

- Passo 1. Elaboração de gráficos de retas do tipo $y = mx$. Este momento é importante uma vez que a atenção deve estar centrada no coeficiente m: A reta passa na origem e o único elemento para diferenciar uma da outra é a taxa de variação. Para a variação de uma unidade em x, quantas (ou quanta) unidades ocorreram em y? Deste modo o gráfico é obtido com um ponto na origem e a taxa de variação.

- Passo 2. Uma vez representada no plano geométrico-cartesiano a reta mãe $y = mx$, as retas do tipo $y – n = mx$ são representadas por translação vertical para cima, caso $n > 0$ ou, ou translação vertical para baixo no caso em que $n < 0$.

Analisemos um exemplo: esboçar o gráfico de $y = 2x – 3$.

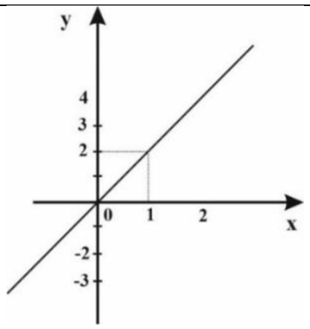
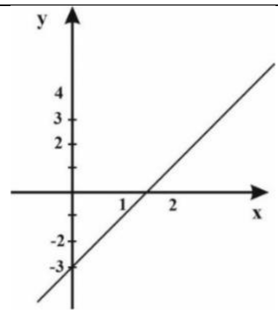
<table>
<tr><th>Passo 1: a reta $y = 2x$</th><th>Passo 2: a reta $y – (–3) = 2x – 3$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Figura 3: esboço da reta $y = 2x -3$ ou $y – (-3) = 2x$.
Fonte: Elaborador pelos autores

Na Figura 3, o passo 1 mostra a reta $y = 2x$ sendo representada: primeiro uma reta é desenhada passando pela origem com taxa de variação igual 2, ou seja, para uma unidade de variação de x (intervalo $[0, 1]$ por exemplo), y varia duas unidades (intervalo $[0, 2]$). Já no Passo 2 a reta $y = 2x$ sofre uma translação vertical de 3 unidades para baixo.

A translação também pode ser feita de forma horizontal, mas a equação teria que estar na forma $y = 2\,(x - 3/2)$. Nesse exemplo, a reta mãe $y = 2x$ teria uma translação horizontal à direita em $3/2$ unidades. Preferimos a translação vertical por conta da forma da equação reduzida que pode se manter para outras situações, como é o caso, por exemplo, da função quadrática em sua forma reduzida.

A translação vertical (ou horizontal) de uma reta conserva o ângulo com que ela forma com o eixo das abscissas. Assim, duas retas que possuem a mesma taxa de variação são paralelas e vem da mesma reta mãe e uma delas pode ser levada a coincidir com a outra por um movimento de translação.

2.5 Equação Segmentária

Tendo como foco a interpretação global qualitativa do objeto reta é fundamental identificar as variáveis visuais e suas unidades simbólicas relevantes de cada tipo de equação. Neste sentido, a equação segmentária fornece elementos importantes acerca da reta e os eixos ordenados. Considere primeiramente a equação geral da forma $ax + by + c = 0$. Pode-se fazer o seguinte, como segue no quadro abaixo:

Quadro 4: obtenção da equação segmentária

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow ax + by = -c \Rightarrow \frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-c/a} + \frac{y}{-c/b} = 1$$

Chamando $p = -c/a$ e $q = -c/b$, tem-se o seguinte: $\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$, expressão esta denominada equação segmentária da reta.

Fonte: Elaborado pelos autores

Para esta equação, pode-se fazer $x = 0$ que resulta: $0/p + y/q = 1$, ou seja, $y = q$. Fazendo $y = 0$, tem-se $x/p + 0/q = 1$, assim, $x = p$. Assim, obtém-se dois pontos importantes desta reta que interceptam os eixos ordenados: $(p; 0)$ e $(0; q)$.

Repare que, para este tipo de equação, diferentemente da reduzida, não se tem acesso prontamente ao coeficiente angular, contudo, fica evidente a abscissa do ponto em que a reta intercepta o eixo horizontal e a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo vertical. Pensando nesta reta enquanto uma função polinomial do primeiro grau, pode-se imediatamente notar que o valor de p refere-se a raiz desta função, contudo, nesta perspectiva, a equação segmentária representa uma forma implícita da função afim, visto que a variável dependente (y) não está isolada.

Com essa equação é possível estabelecer variáveis visuais e estabelecer as unidades simbólicas significativas tendo como referência a teoria de Duval, como indica o quadro abaixo:

Quadro 5: Valores e variáveis visuais para a equação segmentária da reta no plano cartesiano.

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
1ª Sentido da inclinação	ascendente descendente	$p < 0$ e $q > 0$ ou $p > 0$ e $q < 0$ $p > 0$ e $q > 0$ ou $p < 0$ e $q < 0$
2 ª posição da reta com relação ao eixo horizontal	passa a frente da origem passa atrás da origem	$p > 0$ $p < 0$
3ª posição da reta com relação ao eixo vertical	corta acima da origem corta abaixo da origem	$q > 0$ $q < 0$

Fonte: Elaborador pelos autores

Há, porém, uma limitação nesta forma que diz respeito a posição da reta quando ela intercepta a origem do plano cartesiano, por este motivo não pôde ser elencada no quadro acima. Observe que, intuitivamente, para que a reta intercepte o ponto *(0,0),* os valores de p e/ou q deveriam ser iguais a zero, fato que gera um absurdo pela inexistência do quociente quando o divisor é nulo.

3 ATIVIDADE SOBRE O ESTUDO DA RETA

Uma atividade realizada com 14 alunos de uma turma do terceiro ano do ensino médio de uma escola federal, localizada em Camboriú, no ano de 2022, demonstra alguns resultados interessantes sobre a apreensão dos tipos de equações de retas. A proposta buscava identificar se os alunos, após o estudo da reta, apropriaram-se das variáveis visuais e unidades simbólicas correspondentes. A primeira atividade (questão 1) fornecia dois pontos pertencentes aos eixos ordenados x e y respectivamente, e solicitava: a) a equação geral da reta, b) a equação reduzida da reta, c) a equação segmentária da reta, d) o coeficiente angular da reta, e) O esboço do gráfico. O quadro 6 abaixo, dá um parâmetro quantitativo de acertos, acertos parciais e erros da questão número 1.

Quadro 6: Dados quantitativos referente a questão número 1

Questão	Acertos	Percentual	Acertos parciais[7]	Percentual	Erros	Percentual
1a	10	71,4%	2	14,3%	2	14,3%
1b	5	35,7%	5	35,7%	4	28,6%
1c	5	35,7%	7	50,0%	2	14,3%
1d	9	64,3%	0	0,0%	5	35,7%
1e	5	35,7%	4	28,6%	5	35,7%

Fonte: Elaborador pelos autores

No item 1a) todos os estudantes que acertaram, total ou parcialmente, usaram a ideia de que se três pontos (os dois dados, mais um ponto *(x; y)* genérico) estão alinhados, o hipotético triângulo, cujo vértices são esses três pontos, tem área igual a zero. Neste caso, iguala-se o módulo do determinante $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix}$ a zero, onde os pontos dados são $(x_a; y_a)$ e $(x_b; y_b)$. Com este cálculo o estudante acha e equação geral da reta. Os dois estudantes que acertaram parcialmente, um deles calculou o determinante e esqueceu de igualar a zero e o outro errou a regra de sinal ao realizar as multiplicações no cálculo.

No item 1b) bastava isolar a variável *y* da equação encontrada no item a). Os 5 estudantes que acertaram parcialmente encontraram dificuldade neste processo de tratamento, evidenciando problemas estruturais no que diz respeito a operações básicas e na equivalência da igualdade. É importante destacar o que Duval (2004, p. 87) define como função metadiscursivas: “as funções cognitivas comuns a todos os registros de representação (linguísticos, simbólicos, figurativos...)”. Estas por sua vez são subdivididas em Comunicação, Tratamento e Objetificação. O obstáculo no processo de tratamento citado há pouco, refere-se justamente a dificuldade do estudante usar propriedades dentro de um mesmo registro para modificá-lo, e assim obter outras informações acerca do objeto que se estuda. Neste caso especificamente, do item 1a), o estudante acharia a equação geral da reta e para resolver o item seguinte, precisaria achar a equação reduzida, que consistia exatamente num processo de tratamento, onde as propriedades que deveriam ser usadas giram em torno da equivalência da igualdade (“somar termos em ambos os membros”, “dividir termos em ambos os termos”, etc.)

[7] Entende-se aqui como acertos parciais respostas que tiveram uma construção lógica correta, mas houve erros de caráter operacional (erros de “matemática básica”), ou resoluções parciais corretas que não chegaram ao resultado final esperado.

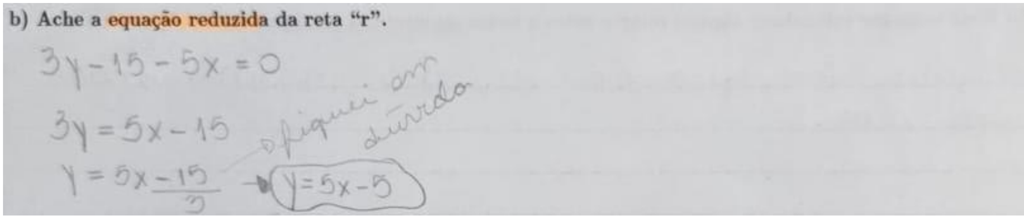


Figura 4: resolução do item b) pelo estudante E1
Fonte: Arquivo dos autores

Note que na figura acima, o aluno destaca sua dúvida acerca do valor 3 dividir toda a expressão ou somente um dos termos do segundo membro, indicando as dificuldades de compreensão operacionais supracitadas. Outro ponto destacado com marca-texto pelo estudante é o termo “equação reduzida”. A expressão “reta”, no enunciado, leva a ideia do que Duval (2004, p. 88) define como função discursiva referencial de uma língua, que tem como função primordial designar objetos. A palavra “reta”, contudo, pode ser pensada como um registro gráfico ou algébrico. Neste sentindo Duval (2004, p. 89) afirma que, além de designar o objeto é necessário caracterizá-lo, operação essa definida dentro da função discursiva referencial como categorização simples. Ao destacar a “equação reduzida” fica evidente de que o registro é algébrico, tendo em vista a palavra “equação” e que a variável *y* deve ser isolada, levando em consideração termo “reduzida”.

No item 1c), com exceção de um estudante, todos partiram da equação geral para achar a equação segmentária como indica a resolução do estudante E2, na figura abaixo.

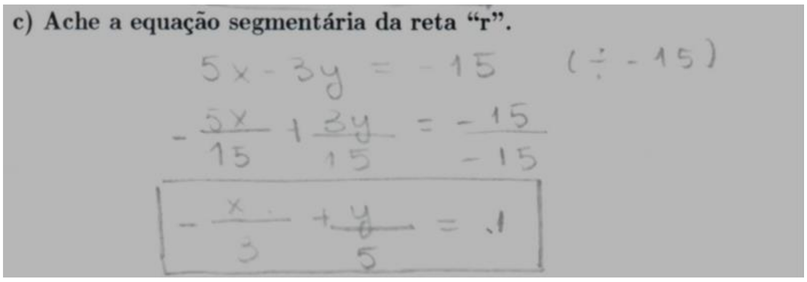


Figura 5: resolução do item c) pelo estudante E2
Fonte: Arquivo dos autores.

O estudante que não realizou este tipo de procedimento da figura acima, identificou que os pontos dados no enunciado pertencem aos eixos ordenados e, portanto, que eram unidades simbólicas relevantes presentes na equação segmentária (os denominadores *p* e *q* da equação *x/p + y/q = 1*). Observe que a expressão “equação segmentária” novamente diz respeito a uma categorização simples de uma função discursiva referencial. Neste caso, o estudante, a partir do termo “segmentária”, entende que existe um formato pré-definido da equação associado a esta palavra.

No item 1d), dentre os 9 estudantes que acertaram, apenas 4 perceberam que o coeficiente angular estava explícito no item 1b), onde se pediu a equação reduzida da reta e, consequentemente, nesta forma era o coeficiente da variável *x*. Assim, é possível inferir que estes estudantes notaram que, na forma reduzida, este valor acompanhado da letra *x* é uma variável simbólica relevante. Observe que em nenhum outro tipo de equação (geral, segmentária ou paramétrica) o coeficiente angular aparece de forma tão notável. Os outros 5 estudantes acertaram, observando a forma geral da reta, $ax + by + c = 0$ e lembrando que bastava fazer $m = -a/b$. É interessante ressaltar a não percepção desses estudantes que a equação reduzida, $y = mx + n$, provém da equação geral quando se isola a variável y, neste caso, $m = -a/b$ e $n = -c/b$.

No item 1e) os alunos que acertaram marcaram no plano cartesiano os pontos dados no enunciado, indicando assim a compreensão de que dois pontos no plano são suficientes para determinar uma reta. Os que acertaram parcialmente apenas marcaram os pontos, mas não traçaram a reta e, os que erraram, ou marcaram os pontos errados ou simplesmente não souberam fazer. É fundamental ressaltar que este último item da primeira questão, bastava o estudante compreender que os pontos dados no enunciado pertenciam a reta.

A segunda atividade forneceu a representação gráfica de uma reta como mostra a figura abaixo.

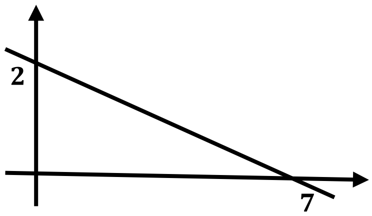


Figura 6: Representação gráfica apresentada na questão número 2
Fonte: Elaborado pelos autores

Na sequência foi solicitado o seguinte: a) a equação da reta representada; b) A relação que pode ser estabelecida entre a forma segmentária da reta e a forma gráfica; c) o coeficiente angular da reta; d) a posição relativa entre a reta desta figura e a reta “s” da questão 1. O quadro abaixo fornece os dados tabulados referentes a questão 2.

Quadro 7: Dados quantitativos referente a questão número 2

Questão	Acertos	Percentual	Acertos parciais[8]	Percentual	Erros	Percentual
2a	7	50,0%	3	21,4%	4	28,6%
2b	9	64,3%	0	0,0%	5	35,7%
2c	10	71,4%	0	0,0%	4	28,6%
2d	7	50,0%	4	28,6%	3	21,4%
2e	6	42,9%	4	28,6%	4	28,6%

Fonte: Elaborado pelos autores

No item 2a), dos 7 que acertaram, 5 perceberam que seria mais simples obter a equação segmentária observando a abscissa do ponto de intersecção com o eixo horizontal e a ordenada do ponto de intersecção com o eixo vertical e substituindo tais valores nos denominadores *p e q*, respectivamente, da equação segmentária. Os dois restantes usaram o determinante, como já citado. Apesar destes últimos chegarem no resultado esperado, houve mais etapas no tratamento, pois ao achar a equação pelo determinante, o aluno encontra a equação geral e esta deve ser manipulada para se chegar na segmentária. Os que acertaram, parcialmente, fizeram usando o determinante, contudo erraram operações elementares de soma algébrica e regra de sinais.

É interessante observar e comparar o item 1c) e 2a). Ambos solicitavam as equações segmentárias, contudo, o primeiro exercício apenas dava os dois pontos de intersecção com os eixos ordenados e o segundo fornecia o gráfico. Houve uma maior quantidade de acertos no item 2a). Conjectura-se que essa diferença pode estar relacionada com: i) ou o estudante não notou que os pontos dados na questão 1 eram os pontos de interseção com os eixos; ii) ou ao fazer o item 1c) o estudante verificou que os denominadores da equação segmentária do exercício 1 tem uma relação direta com os pontos dados. Outro detalhe importante é que no item 1c), como já citado, a maioria dos estudantes optaram por resolver a partir do cálculo do determinante, gerando uma maior quantidade de acertos parciais devido a necessidade de manipulação algébrica. Assim, pode-se concluir que a grande dificuldade, de fato, é quando o estudante se depara com o que popularmente chamamos de "matemática básica".

O item 2b) era uma questão discursiva que buscou verificar se o estudante conseguia estabelecer uma relação entre os pontos de interseção com os eixos e a forma segmentária da reta. Neste item, o que chama a atenção é que 9 estudantes (2 a mais

[8]Entende-se aqui como acertos parciais respostas que tiveram uma construção lógica correta, mas houve erros de caráter operacional (erros de "matemática básica"), ou resoluções parciais corretas que não chegaram ao resultado esperado.

que acertaram o item 2a) conseguiram identificar a relação dos pontos com este formato de equação da reta. Um deles (vamos chamar de E3) achou a reta realizando o cálculo do determinante, observou o gráfico, os denominadores de *x* e *y* da forma paramétrica e percebeu a relação, conforme descreve a figura 7 abaixo:

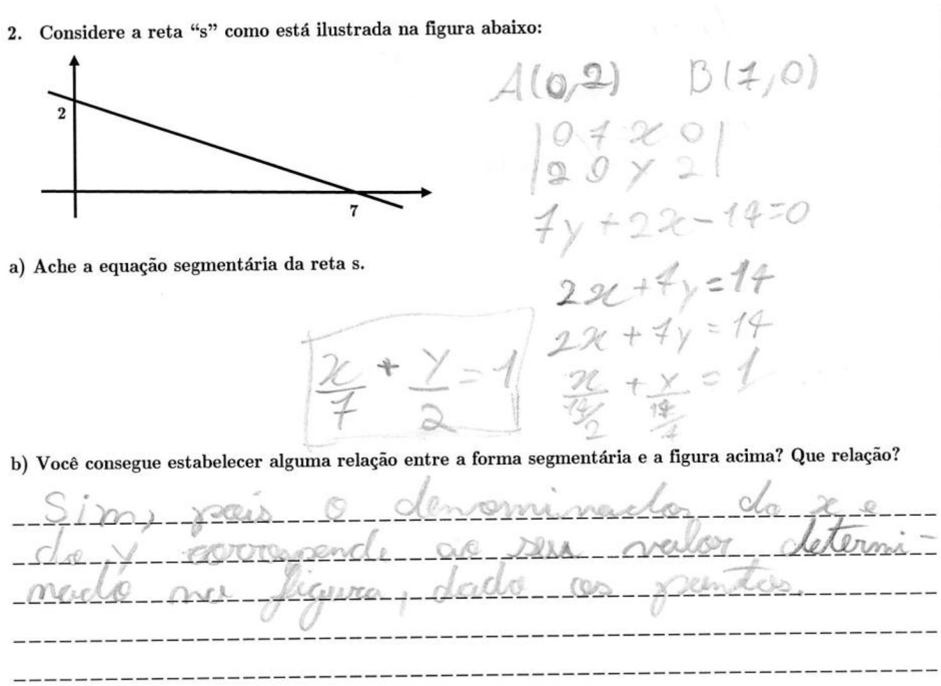
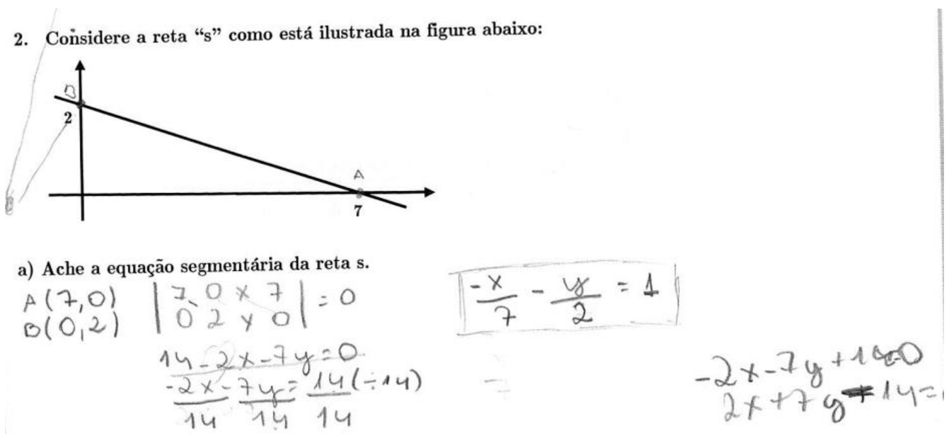
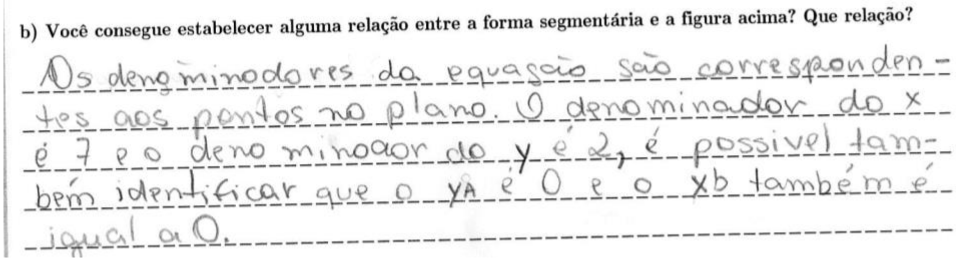


Figura 7: Resolução dos itens 2a) e 2b) pelo estudante E3
Fonte: Arquivos dos autores

O outro estudante (E4), identificou a relação solicitada no item 2b), mas teve problemas no processo de tratamento no item 2a), conforme a figura 8:




b) Você consegue estabelecer alguma relação entre a forma segmentária e a figura acima? Que relação?

Os denominadores da equação são corresponden-tes aos pontos no plano. O denominador do x é 7 e o denominador do y é 2, é possível tam-bém identificar que o yA é 0 e o xb também é igual a 0.

Figura 8: Resolução dos itens 2a) e 2b) pelo estudante E4
Fonte: Arquivo dos autores

Apesar de ambos os estudantes E3 e E4 não escreverem de forma matemática totalmente correta o que está ocorrendo, percebe-se nesses registros que os estudantes conseguiram realizar a conversão entre registro gráfico e algébrico observando as variáveis visuais relativas da equação e os pontos destacados na figura.

Observe que nestas atividades propostas há funções metadiscursivas definida por Duval (2004, p. 87) como “as funções cognitivas comuns a todos os registros linguísticos, simbólicos ou figurativos, não importando, portanto, qual é o registro de representação que permite a comunicação da informação.” Assim sendo, é possível constatar que para que o estudante pudesse desenvolver as atividades acima era necessário que os objetos estivessem previamente designados e caracterizados (categorização simples, já citada).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo da reta compreende uma infinidade de elementos que podem ser ancorados às definições presentes da teoria de Raymond Duval. Aqui buscou-se categorizar as diferentes formas da equação da reta a partir de uma arquitetura semiocognitiva, destacando suas variáveis visuais e suas unidades simbólicas correspondentes visando estabelecer a apreensão global qualitativa do objeto. Como foi discutido, a apreensão global não se limita a processos mecanizados e procedimentais, mas sim a como elementos significativos de um registro influenciam em outro. Estes elementos citados são subsídios primordiais na apreensão do objeto matemático, visto que se referem a dois registros de representação do objeto, atendendo assim a Hipótese Fundamental de Duval (1993, p. 51): “A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e essa coordenação manifesta-se pela espontaneidade da atividade cognitiva da conversão”.

No que diz respeito a atividade proposta aos estudantes, é perceptível as limitações no tratamento inerentes aos registros algébricos: operar com frações, isolar variáveis, regras de sinais e compreensão da equivalência da igualdade. Vale ressaltar que o tratamento "consiste em alterar o conteúdo da representação, através de operações coerentes para o sistema semiótico envolvido, mas permanecendo ainda no registro de representação inicial" (Sabel, 2021, p. 18).

A dificuldades dos estudantes na matemática operacional básica já é evidenciada e discutida em pesquisas da área. Contudo, uma hipótese razoável a se refletir sobre a deficiência dos estudantes neste quesito, amparada também pelo fato do pesquisador conhecer os sujeitos da atividade proposta, são os impactos pedagógicos da pandemia e, consequentemente, do ensino remoto. Todavia, apesar dos autores entenderem ser relevante esta abordagem, discutiu-se aqui somente aspectos ligados a teoria de Duval.

Por fim, é possível constatar que a reta possui uma transversalidade no ensino da matemática, à medida que ela está presente em vários momentos do itinerário formativo do estudante no ensino médio. Aqui fizemos um recorte dando ênfase da reta enquanto função polinomial do primeiro grau e como objeto da geometria analítica. Outra discussão interessante seria olhar a reta em outras formas de registro, como por exemplo, em juros simples, progressão aritmética e até mesmo numa regra de três simples. Observe que estes temas citados estão ancorados pelo fato de que a taxa de variação se mantém constante, elemento amplamente discutido neste trabalho.

REFERÊNCIAS

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, The Netherlands.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 420–464). Macmillan Publishing Co, Inc.

Duval, R. (1988). Graphiques et équations: l'articulation de deux registres. In *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 1, 235-253.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif da la pensée. In *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5.

Duval, R. (1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Revista RDM*, 16, 1-57.

Duval, R. (1997). *La notion de registre de représentation sémiotique et l'analyse du fonctionnement cognitif de la pensée*. Curso dado à PUC/SP.

Duval, R. (1999). *Les problèmes fondamentaux de l'apprentissage des mathématiques et les formes supérieures du développement cognitif*. Curso dado à Universidad del Valle Santiago de Cali, 97p.

Duval, R. (2003a). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In S. D. A. Machado (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica* (pp. 11-36). Campinas: Papirus.

Duval, R. (2003b) Décrire, visualiser ou raisonner: quels "apprentissages premiers" de l'activité mathematique? In *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*.

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. *Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemátic*. Trad. de Myriam Vega Restrepo.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2004). *Les problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Trad. Myrian V. Restrepo. Santiago de Cali: Merlín I. D.

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. In *Annales de didactique et sciences cognitives, Irem de Strasbourg*, 10, 5-53.

Duval, R. (2011). Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. Méricles T. M. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 6, 96-112. doi: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96

Duval, R. (2012a). Diferenças semânticas e coerência matemática. Trad. Méricles T. M. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7, 99-117. doi: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p97

Duval, R. (2012b). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles T. Moretti. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7, 118-138. doi: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118

Duval, R. (2022). As condições cognitivas da aprendizagem da geometria: desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 17, 1-52. doi: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e85937

McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., & Van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. American Journal of Physics, 55(6), 503-513. doi: https://doi.org/10.1119/1.15104

Moretti, M. T. (2002) O papel dos registros de representação na aprendizagem de Matemática. *Contrapontos*, 6, 343-362. Recuperado de: https://siaiap32.univali.br/seer/index.php/rc/article/download/180/152

Morreti, M. T. (2013). Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. *Acta Scientiae*, 17, 289-303. Recuperado de: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/568

Peirce, C. S. (2000). *Semiótica*. Trad. J. T. Coelho Netto. São Paulo: Perspectiva.

Sabel, E (2021). *O papel das funções discursivas na análise da produção de alunos na resolução de problemas* (Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Van Hiele, P. M., & Van Hiele-Geldov, D. (1958). *Report on methods of initiation into geometry, edited by H. Freudenthal, J.B. Woters* (pp. 67-80). Then Netherands: Groningen.

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA
Elaboração de uma arquitetura semiocognitiva para a aprendizagem do olhar nas representações gráficas cartesianas

Thiago Henrique das Neves Barbosa
Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia (UTFPR)
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Camboriú, Coordenação Geral de Ensino, Camboriú, Brasil.
Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, Brasil.
thiago.barbosa@ifc.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-3127-8393

Méricles Thadeu Moretti
Doutorado em Didática da Matemática (UNISTRA).
Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, Brasil.
mthmoretti@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Francisco Barreto, 285, apto 73, CEP: 88.340-401, Camboriú, SC, Brasil

AGRADECIMENTOS
Ao Fundo de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior (FUNDES/UNIEDU)

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito:,T. H. N. Barbosa; M. T. Moretti.
Análise de dados T. H. N. Barbosa; M. T. Moretti.
Discussão dos resultados: T. H. N. Barbosa; M. T. Moretti.

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO

Fundo de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior (FUNDES/UNIEDU/SC)

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 05-04-2023 – Aprovado em: 03-10-2023