

# REPRESENTAÇÕES AUXILIARES NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: O CASO DOS MATERIAIS MANIPULATIVOS NO ENSINO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

## Auxiliary Representations in Mathematics Learning: The Case of Manipulative Materials in Teaching of the Decimal Number System

Eduardo **SABEL**Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil  
eduardosabelmatematica@gmail.com <https://orcid.org/0000-0002-6334-4893>Everaldo **SILVEIRA**Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil  
derelst@hotmail.com@gmail.com <https://orcid.org/0000-0002-2113-2227>A lista completa com informações dos autores está no final do artigo 

### RESUMO

O uso de materiais manipuláveis faz parte da cultura escolar, principalmente nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Por isso, diferentes perspectivas, por parte de diferentes autores, têm sido usadas para investigar suas contribuições à aprendizagem. Neste artigo, buscamos colaborar com essas discussões, tendo como base a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a partir do olhar sobre as representações transitórias. O objetivo é ampliar o debate acerca das representações auxiliares na aprendizagem matemática, sobretudo o caso dos materiais manipulativos utilizados no ensino do sistema de numeração decimal. Para fins de recorte e exemplificação, refletimos sobre o caso dos Blocos base dez e o Ábaco, amplamente usados nos anos iniciais do Ensino Fundamental e incentivados pelos livros e documentos norteadores. Por meio de uma abordagem qualitativa, realizamos um diálogo teórico entre os manipulativos e o conceito de representação auxiliar da teoria de Duval. Como resultados, foi possível entender o papel semiótico desse tipo de representação para a aprendizagem matemática, considerando que são recursos que contribuem para mobilizar diferentes pensamentos matemáticos, embora seu papel principal seja o de auxiliar o estudante compreensão e transição entre outros registros de representação semiótica.

**Palavras-chave:** Representações Auxiliares, Materiais Manipulativos, Ábaco, Blocos Base Dez, Registros de Representação Semiótica

### ABSTRACT

The use of manipulatives is part of school culture, especially in the early years of elementary school. Therefore, different perspectives, by different authors, have been used to investigate its contributions to learning. In this article, we seek to contribute to these discussions, based on the Theory of Registers of Semiotic Representation, from the perspective of transitive representations. The goal is to expand the debate about the auxiliary representations in mathematical learning, especially the case of manipulative materials used in teaching the decimal numbering system. For the purpose of clipping and exemplification, we reflect on the case of the Base-10 blocks and the Abacus, widely used in the early years of elementary school and encouraged by textbooks and guiding documents. Through a qualitative approach, we carried out

a theoretical dialogue between manipulatives and the concept of auxiliary representation of Duval's theory. As results, it was possible to understand the semiotic role of this type of representation for mathematical learning, considering that they are resources that contribute to mobilize different mathematical thoughts, although their main role is to help the student understanding and transition between other registers of semiotic representation.

**Keywords:** Auxiliary Representations, Manipulative Materials, Abacus, Base Ten Blocks, Semiotic Representation Registers

## 1 INTRODUÇÃO

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), o objetivo do ensino de matemática é proporcionar aos estudantes uma aproximação com os diversos campos do conhecimento da área, a fim de desenvolver sua capacidade de ampliar, abstrair, consolidar e aperfeiçoar o raciocínio lógico ao longo de sua jornada acadêmica. No entanto, tanto os professores quanto os alunos enfrentam diversas dificuldades históricas nesse processo (D'ambrosio, 1989), o que se configura como um motor motivacional para o desenvolvimento de novas pesquisas quanto aos processos de ensino e aprendizagem de matemática.

É na esteira desses esforços que investigações sobre o uso de materiais manipulativos para ensinar e aprender matemática têm sido desenvolvidas. Diversos autores sustentam que a utilização desses recursos para estabelecer relações entre conceitos abstratos é uma forma de ilustrar os processos de abstração propriamente (Fiorentini, 1995; Bjorklund, 2014; Uttal, 2003). É possível constatar um consenso (Dienes, 1969; Piaget, 1970; Glasersfeld, 1990; Kamii, 2001) sobre a importância de que as crianças iniciem o estudo da matemática a partir de materiais manipuláveis, que serviriam como recursos pedagógicos às aulas da disciplina.

Mas por que esses materiais auxiliam na aprendizagem? Uma possível resposta se encontra no âmbito da semiótica e nos pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Raymond Duval. Para esse pesquisador, o ensino deve levar em conta a utilização de diferentes representações dos objetos matemáticos. Os manipulativos também assumem um papel de representar certos objetos de estudo, embora, pela TRRS, recebam o status de representação auxiliar (Duval, 2011). Contudo, não só o conceito de representação auxiliar, mas também o estudo de manipulativos, têm sido pouco investigados nas pesquisas brasileiras que fazem uso da TRRS, conforme se atesta em Costa (2021).

Desta forma, por meio de uma pesquisa de abordagem qualitativa e caráter teórico-descritivo (André, 2013), estabelecemos teoricamente um debate sobre algumas perspectivas sobre os materiais manipulativos em Educação Matemática para em seguida, estabelecer um diálogo com a TRRS. Para tanto, delineamos o objetivo da pesquisa aqui relatada como: ampliar a discussão sobre as representações auxiliares na aprendizagem matemática, sobretudo o caso dos materiais manipulativos utilizados no ensino do sistema de numeração decimal hindu-arábico. Nossa intenção é propor novos debates acerca das representações auxiliares e, ao mesmo tempo, refletir sobre as contribuições dos materiais manipulativos usados no ensino do sistema de numeração decimal, à luz da TRRS.

Este recorte faz parte de um estudo maior de doutoramento que investiga os manipulativos e as implicações didáticas que produzem a partir de suas indicações em livros didáticos. Neste artigo, destacaremos dois materiais: os Blocos base dez e o Ábaco, amplamente indicados nos livros de matemática dos anos iniciais (Silveira, 2014, 2016, 2018, 2021) e presentes também em diversas habilidades do componente de matemática na Base Nacional Comum Curricular (Sabel, Pires e Silveira, 2022).

O texto está organizado da seguinte maneira: após a presente introdução, apresentamos algumas concepções sobre os materiais manipulativos; na sequência, o marco teórico da TRRS com seus principais conceitos e um foco nas representações auxiliares; depois, uma discussão que articula os manipulativos em questão com seu papel semiótico na aprendizagem. Por fim, algumas considerações e perspectivas futuras.

## **2 MATERIAIS MANIPULATIVOS**

Se analisarmos a trajetória histórica e os proeminentes nomes da educação, constataremos que, desde o pedagogo tcheco Comenius, que elaborou sua famosa obra *Didática Magna* em 1649, já se sugeria a utilização de diferentes recursos pedagógicos nas aulas. Ao longo do tempo, vários educadores contribuíram com novos materiais didáticos e perspectivas inovadoras para o ensino e aprendizagem da matemática. De maneira geral, tem-se defendido a importância de empregar materiais manipuláveis e outros recursos pedagógicos nas aulas da disciplina.

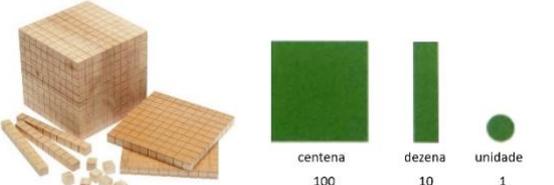
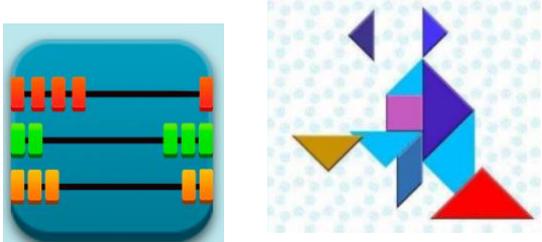
De acordo com Nacarato (2005), a história dos materiais manipuláveis na educação remonta ao século XIX, quando o pedagogo suíço Johann Heinrich Pestalozzi mencionou seu uso pela primeira vez. Pestalozzi acreditava que a educação deveria começar com a percepção de objetos concretos e com a experimentação prática. No Brasil, as primeiras

recomendações para o uso de recursos didáticos na disciplina surgiram na década de 1920, mediante a influência de tendências como a empírico-ativista, a Escola Nova e o Movimento da Matemática Moderna. Esses movimentos trabalharam na popularização do uso de materiais manipuláveis (Murari, 2011).

Devido ao fato de que o uso e a pesquisa acerca de materiais manipuláveis já remontam ao início do século passado, não é de se surpreender que haja uma grande variedade de pesquisas sobre o tema e que estas apresentem diferentes perspectivas, segundo apontam Fiorentini e Miorim (1990). É importante destacar que diferentes termos têm sido utilizados para se referir a esses materiais, conforme argumentam Sabel, Pires e Silveira (2022). Em seu estudo nos Anais do ENEM 2019, os autores identificaram que, nos trabalhos analisados, “não há um consenso por parte da comunidade científica sobre como estes materiais podem ser definidos, caracterizados e classificados de acordo com suas formas de construção e utilização” (Sabel, Pires & Silveira, 2022).

Apesar das diferentes perspectivas, entendemos a importância, em uma pesquisa acadêmica, de os autores apresentarem sua concepção sobre o tema. Neste sentido, este projeto se apoia em Silveira, Powell e Grandó (2023, p. 01, no prelo), que definem os materiais manipulativos como “quaisquer objetos físicos, pictóricos ou virtuais utilizados como recursos para o ensino de determinado conhecimento”. O trio de autores tem contribuído para a possível caracterização dos recursos manipulativos, ao apresentar quatro classificações: os materiais didaticamente construídos, que podem ser físicos ou pictóricos, criados artificialmente pelos educadores para ensinar especificamente matemática; os instrumentos culturais herdados da tradição, relacionados aos materiais históricos da matemática e usados em contextos pedagógicos; os objetos retirados da vida cotidiana, que servem para outros fins no cotidiano, mas que apresentam alguma característica que possibilita extrair ou mobilizar algum conhecimento matemático; e os objetos manipulativos virtuais, que são as representações dinâmicas de objetos ou instrumentos matemáticos produzidos digitalmente e manipulados por meio de um dispositivo tecnológico. Na tabela a seguir, eis alguns exemplos dessas classificações:

**Tabela 1:** Exemplos dos quatro tipos de categorias para os manipulativos

Categoria e descrição dos exemplos	Exemplos de materiais
<p>Materiais didaticamente construídos</p> <p>(Material Dourado e das Fichas Verdes, amplamente presentes nos livros de L. R. Dante)</p>	
<p>Instrumentos culturais herdados</p> <p>(Ábaco vertical, régua e compasso)</p>	
<p>Objetos retirados da vida cotidiana</p> <p>(Palitinhos e tampinhas de garrafa)</p>	
<p>Objetos manipulativos virtuais</p> <p>(Ábaco e Tangram virtuais para uso em celular ou computador)</p>	

Fonte: elaborado pelos autores a partir de Silveira, Powell e Grandó (2023, no prelo)

Diferentes autores apresentam diferentes perspectivas sobre o termo "concreto" e os materiais manipulativos. Lorenzato (2006) amplia o significado do termo para além do material palpável, considerando qualquer objeto com conteúdo de significação. Nacarato (2005) se refere aos materiais manipulativos como algo tangível e palpável, muitas vezes chamado de "material concreto". Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) definem esses materiais como objetos que podem ser movidos e manipulados para entender uma situação matemática. Björklund (2014) argumenta que os materiais manipulativos são instrumentos que representam conceitos matemáticos abstratos de forma explícita. Uttal (2003) entende esses materiais como um sistema de objetos físicos que ajudam as crianças a aprender conceitos matemáticos sem a necessidade de compreender representações escritas desses conceitos. Fiorentini (1995) destaca que os manipulativos são importantes para promover processos de abstração reflexionante, que ocorrem pela reflexão dos sujeitos acerca de suas atividades, levando à tomada de consciência. Para Lorenzato (2006), esses

materiais são uma ferramenta importante para auxiliar o estudante na construção de seu conhecimento matemático, levando em consideração o contexto social em que o material é utilizado.

Por outro lado, existem estudos que olham para esses recursos de forma mais crítica, como o de Silveira (2018, p. 4) que, em seu levantamento, afirma que “muitos pesquisadores apresentam ressalvas e ligam alertas quanto aos limitantes em relação ao uso de manipulativos”. Nacarato (2005), por exemplo, percebe que o material pode agir tanto como um facilitador, quanto como um complicador, a depender de como é usado. Neste sentido, Carraher, Carraher e Schliemann (1988) sugerem que o professor faça uma profunda reflexão sobre o material e que busque as finalidades de ensino, para assim fazer uma conexão com o mundo do estudante.

Da mesma forma, Laski et al. (2015) argumentam que esses materiais devem ter a maior semelhança possível com o conceito que representam. Para esses autores, quanto mais básicos forem os manipulativos, sem características perceptivas irrelevantes ou referências ao mundo real, maiores serão as chances de aumento do aprendizado. Brown, McNeil e Glenberg (2009) também enfatizam a necessidade de que os alunos entendam que, ao trabalhar com manipulativos, não estão adentrando a um novo sistema isolado da matemática. Pelo contrário, eles precisam compreender que estão fazendo uso de um tipo de material que deve auxiliá-los na compreensão de um sistema simbólico matemático que o professor deseja ensiná-los.

Pelo exposto, percebemos que existe uma vasta literatura que discute tema dos manipulativos com diferentes pontos de vista. O foco deste artigo é acrescentar sobre eles uma discussão a partir do ponto de vista semiótico. No próximo tópico, apresentamos um breve resumo da teoria de Duval para, na sequência, estabelecer as relações com os materiais manipuláveis.

### **3 MARCO TEÓRICO: TEORIA OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica foi criada pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval durante a década de 1980, com o objetivo de explorar a aprendizagem matemática através da análise dos processos cognitivos que a promovem.

Segundo essa perspectiva, os objetos matemáticos são ideais, abstratos e conceituais, o que explica o fato de requererem uma representação para serem trabalhados.

Quando consideramos a natureza do conhecimento matemático, é necessário refletir acerca do lugar que ocupam os conceitos matemáticos. E a resposta a essa questão se concentra no mundo das representações, dos conceitos, das ideias e da semiótica. Ao contrário de um objeto de estudo em biologia (como uma planta, por exemplo), que pode ser trazido fisicamente à sala de aula para que os estudantes entrem em contato direto com ele, a compreensão de um conceito matemático, como uma função afim, não pode ser obtida diretamente por meio de observação física, já que não faz parte do mundo cotidiano e físico. Em vez disso, os conceitos matemáticos são compreendidos por meio de representações, como equações algébricas, gráficos, números e linguagem natural (materna) (Duval, 2004).

Desta maneira, entendemos que todo processo de ensino e aprendizagem da matemática só ocorre por meio do trabalho com as representações semióticas de seus conceitos. Os conceitos matemáticos “não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata” (Duval, 2012, p. 268), sendo ideais e não reais. De acordo com Duval (2011), os conceitos matemáticos são abstratos e mentais, o que exige que as representações semióticas sejam utilizadas para torná-los perceptíveis e, conseqüentemente, facilitar o seu estudo. É importante ressaltar que, como observado por Duval (2004), a representação externa dos conceitos matemáticos só é possível por meio de um sistema semiótico adequado. Isso significa que a escolha do modelo visual para representar a matemática é fundamental para permitir o acesso aos conhecimentos. Quanto aos sistemas semióticos específicos voltados ao ensino de matemática, Duval (2004) define-os como Registros de Representação Semióticos, os quais cumprem três atividades cognitivas: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. As explicações a seguir de cada uma destas atividades é base em Duval (2004):

A formação de uma representação identificável é a possibilidade de reconhecer o conceito dentro de um sistema semiótico<sup>1</sup>, por meio de características e regras específicas daquela representação. Isso ocorre, por exemplo, quando um sujeito olha para uma função do tipo  $f(x) = ax + b$  e identifica se tratar de uma representação algébrica da função afim (desde que ele esteja familiarizado com essa linguagem). Deste modo, a formação de

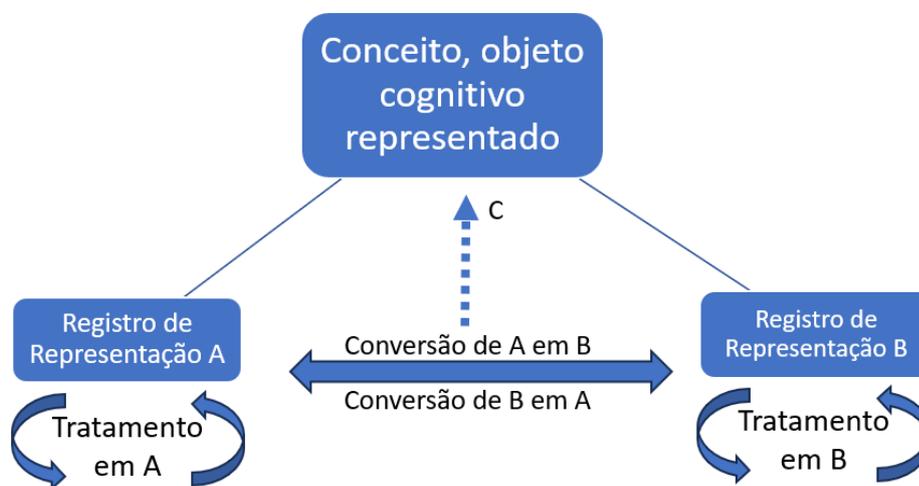
---

<sup>1</sup> Um sistema semiótico é, de acordo com Duval (2011), um conjunto de signos, organizado segundo regras próprias de formação e convenções que apresentam relações internas, as quais permitem identificar os objetos representados.

representação identificável é composta pelo conjunto de elementos, unidades, princípios e regras que identificam o conceito.

Já o tratamento é uma atividade que consiste em mudar o conteúdo da representação, por meio de operações específicas do registro em que estamos trabalhando. Essas alterações ajudam a fornecer novos dados do objeto, porém, sem extrapolar o registro de representação de origem. Um exemplo é pensarmos na expressão  $(x + 3)^2$ , que pode ser tratada algebricamente para se tornar  $x^2 + 6x + 9$ . Neste caso, o registro inicial era o algébrico, de modo que, com algumas operações, podemos produzir uma nova expressão, que ainda está no sistema algébrico.

A atividade cognitiva de conversão consiste em trabalhar com um objeto dentro de um registro de representação inicial, e depois obter outro registro de chegada. Pensamos, por exemplo, nas expressões: um terço e  $\frac{1}{3}$ . Primeiro, temos a fração em sua representação escrita, e logo, sua representação simbólica (numérica). Com esses dois registros diferentes, o trânsito entre ambos é o que configura a atividade de conversão, a mais importante das três. Para entendermos porque Duval (2004) fala sobre tais atividades cognitivas, devemos entender sua hipótese de aprendizagem, conforme podemos observar na figura a seguir:



**Figura 1.** Esquema da hipótese fundamental da aprendizagem de Duval  
Fonte: Elaborado a partir de Duval (2012, p. 282)

Na Figura 1 constam os processos cognitivos para a aprendizagem que fundamentam a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Dispondo de dois registros diferentes (A e B), é no processo de trânsito entre um e outro que nos

aproximamos do conceito matemático (C). Por isso, quanto mais registros trabalharmos, mais discussões sobre diferentes representações teremos nos processos de ensino.

A teoria de Duval justifica a importância de trabalhar com diferentes registros de representação na aprendizagem da matemática, uma vez que a compreensão desse conhecimento está intrinsecamente relacionada com a relação entre *noesis* e *semiose*. De acordo com o autor, a *semiose* refere-se à apreensão do registro de representação semiótica, enquanto a *noesis* está voltada à apreensão conceitual do objeto. Em outras palavras, na matemática, a compreensão conceitual não é possível sem a utilização de representações semióticas (Duval, 2012). Portanto, ao ensinar um conceito matemático sob a perspectiva dessa teoria, é necessário utilizar vários registros de representação de um objeto e realizar as três atividades cognitivas pertinentes, destacando a importância das conversões nesse processo.

De acordo com Duval (2004), os sistemas semióticos podem ser divididos em quatro categorias principais, como demonstrado na tabela abaixo:

**Tabela 2:** Diferentes tipos de registros semióticos

	<b>REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA</b>	<b>REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA</b>
<b>REGISTROS PLURIFUNCIONAIS</b> <b>(tratamentos não algoritmizáveis)</b>	Célula 11  Língua Natural: linguagem materna, descrições, explicações, definições. Formas de raciocínio, deduções, observações, argumentos...	Célula 12  Figuras geométricas: planas ou em perspectiva, com suas dimensões, além das as apreensões da geometria.
<b>REGISTROS MONOFUNCIONAIS</b> <b>(tratamentos algoritmizáveis)</b>	Célula 21  Sistemas de Escrita: simbólico, algébrico, numérico, fração, binária, línguas formais...	Célula 22  Gráficos cartesianos: sistemas de coordenadas, interpolação, extrapolação, variações do plano...

Fonte: adaptada de Thiel e Moretti (2012, p. 8) e elaborada a partir de Duval (2004, p. 52)

A seguir, apresentamos a noção de Registro de Representação auxiliar, articulando-o com o caso dos materiais manipulativos.

#### 4 AS REPRESENTAÇÕES AUXILIARES NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: UM OLHAR PARA OS CASOS DOS BLOCOS BASE DEZ E O ÁBACO

A evolução da matemática trouxe consigo uma ampla gama de sistemas semióticos que contribuíram para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Cada registro possibilita representar certas informações (conteúdos) de um objeto matemática e alguns registros são semioticamente mais polivalentes que outros. Em Bosch e Chevallard (1999) temos um pouco dessa discussão quando os autores falam sobre objetos ostensivos<sup>2</sup> com maior ou menor valência semiótica. Se pensarmos, exemplo, no registro algébrico, ele é necessário em vários anos da escolaridade, usado desde o estudo de equações, funções, sistemas lineares, geometria analítica, sequencia numéricas, etc. Isso mostra sua polivalência semiótica, ou seja, é um registro versátil que permite produzir diferentes *semioses*. Já se tomarmos como exemplo o Digrama de Veen, sua importância se restringe no estudo de alguns objetos matemáticos em específico, que auxiliam outras representações a formar um certo pensamento matemático.

Esse tipo de representação classificada como Registro Representação Auxiliar para o funcionamento do pensamento matemático (Duval, 2001). Existem diferentes registros que podem ser definidos como representações auxiliares de transição, usados principalmente para apoiar, auxiliar e contribuir na passagem de um registro a outro. Duval (2001 pp. 56-62) os define como legendas, desenhos, tabelas, esquemas e materiais frequentemente utilizados como ferramentas para a aprendizagem da matemática, conhecidos também como representações auxiliares, assim consideradas porque auxiliam a compreender outra representação, chamada de 'principal'.

Como nosso foco são os manipulativos usados em matemática, tomemos como exemplo agora, os Blocos base dez (BBD) amplamente utilizados no ensino do sistema de numeração decimal. Este tipo de material também cumpre a função de um registro de representação auxiliar, contribuindo por meio de sua organização física a entender os agrupamentos e desagrupamentos do nosso sistema de numeração. Embora ofereçam diversas possibilidades de aprendizagem, esses materiais apresentam limitações impostas por sua própria concretude, como a impossibilidade de dividir uma unidade ao meio para formar uma fração ou transformar uma peça de 100 em duas peças de 50. Logo, as

---

<sup>2</sup> Bosch e Chevallard (1999) entendem os ostensivos como objetos que possuem uma natureza sensível, uma certa materialidade, isto é, que têm para o sujeito uma realidade perceptível e que assumem um caráter relativamente concreto. Este conceito não será aprofundado no presente artigo.

atividades cognitivas de tratamento e conversão são restritas, pois ele consegue representar apenas uma quantidade limitada dos números. Por isso, ele é usado em conjunto com o registro principal do sistema de numeração, que é o simbólico (indo-arábico).

A discussão acerca da pesquisa com representações auxiliares tem sido timidamente abordada, conforme podemos observar na investigação de Costa (2021) sobre o estado de arte da TRRS. Nela, a autora fez um levantamento de teses e dissertações brasileiras defendidas no período de 1995 a 2019, elencando um total de 266 trabalhos. Destes, nenhum se centrou nas representações auxiliares, ou então, nos materiais manipulativos voltados aos anos iniciais. Do pouco material encontrado a respeito do termo, Moretti e Baerle (2022) apontam algumas reflexões acerca dos diferentes usos de representações auxiliares e apresentam os materiais concretos como representações auxiliares do tipo material, pois servem como materiais que substituem ostensivamente os objetos a partir de uma natureza concreta. Já Pires, Sabel e Silveira (2022) mencionam que os materiais manipulativos podem ser entendidos como uma representação auxiliar e ajudar a promover abstrações matemáticas. Contudo, a discussão conectada com a teoria de Duval não se aprofunda, já que o objetivo do texto era outro.

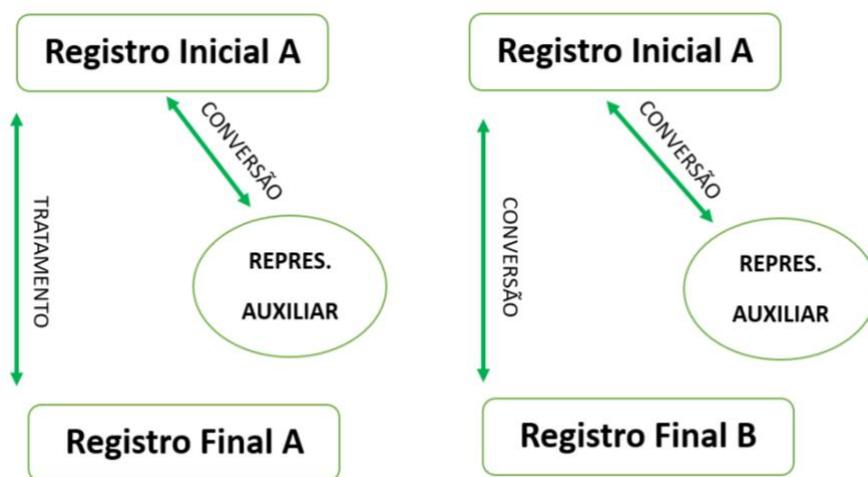
Segundo Duval (2001, pp. 57-62), há oito funções que uma representação auxiliar pode cumprir quando é utilizada em conjunto com outra representação semiótica. Estas funções incluem: (1) elaborar informações adicionais; (2) oferecer interpretação heurística; (3) oferecer interpretação explicativa; (4) selecionar elementos relevantes; (5) produzir exemplos contextuais; (6) ilustrar uma situação; e (7) assumir uma função material, substituindo um objeto fisicamente. Os Blocos base dez e o Ábaco se enquadram neste tipo de representação que cumpre a função material.

Sobre as representações auxiliares que cumprem a função material, Duval (2001) comenta:

O recurso a representações que podem cumprir a função de material é frequentemente feito em tarefas que se pretende ir de um material constituído por objetos fisicamente manipuláveis para uma simples codificação desses objetos. [...] Mas tais representações não têm nem o poder semântico nem o poder combinatório que os sistemas semióticos fornecem. Tal recurso, pois, não é mais do que um esboço de semiotização que não preenche o abismo entre os objetos reais e as representações semióticas (Duval, 2001, p. 62, tradução nossa)

O que o autor deseja alertar no fragmento é sobre termos ciência das limitações que os materiais físicos possuem na aprendizagem da matemática. O fato de manipularmos concretamente uma peça do Bloco base dez que possui 100 unidades, não significa que o objeto número se torna concreto, mas sim, que a visualidade (ostensividade) do material nos permite estabelecer relações com a ideia de número. Neste caso, “a representação auxiliar serve de material para as operações cuja execução é necessária para compreender o que a representação principal representa” (Duval, 2001, p. 61, tradução nossa). Tal argumento não significa que os manipuláveis não devem ser usados, mas que é necessário que saibamos mediá-lo corretamente para extrair os aspectos conceituais abstratos dos objetos que buscam representar.

Na busca de concretizar a ideia de que os manipulativos assumem o papel da representação auxiliar, entendemos que, se porventura acrescentássemos à Figura 2 um campo para tais representações, elas precisariam estar dentro e fora de cada célula. Isso ocorre porque as representações auxiliares podem ser usadas para fins internos a um sistema, no intuito de auxiliar em tratamentos, e também para fins externos, nas conversões. Por causa dessa característica, sintetizamos esse pensamento na figura a seguir:



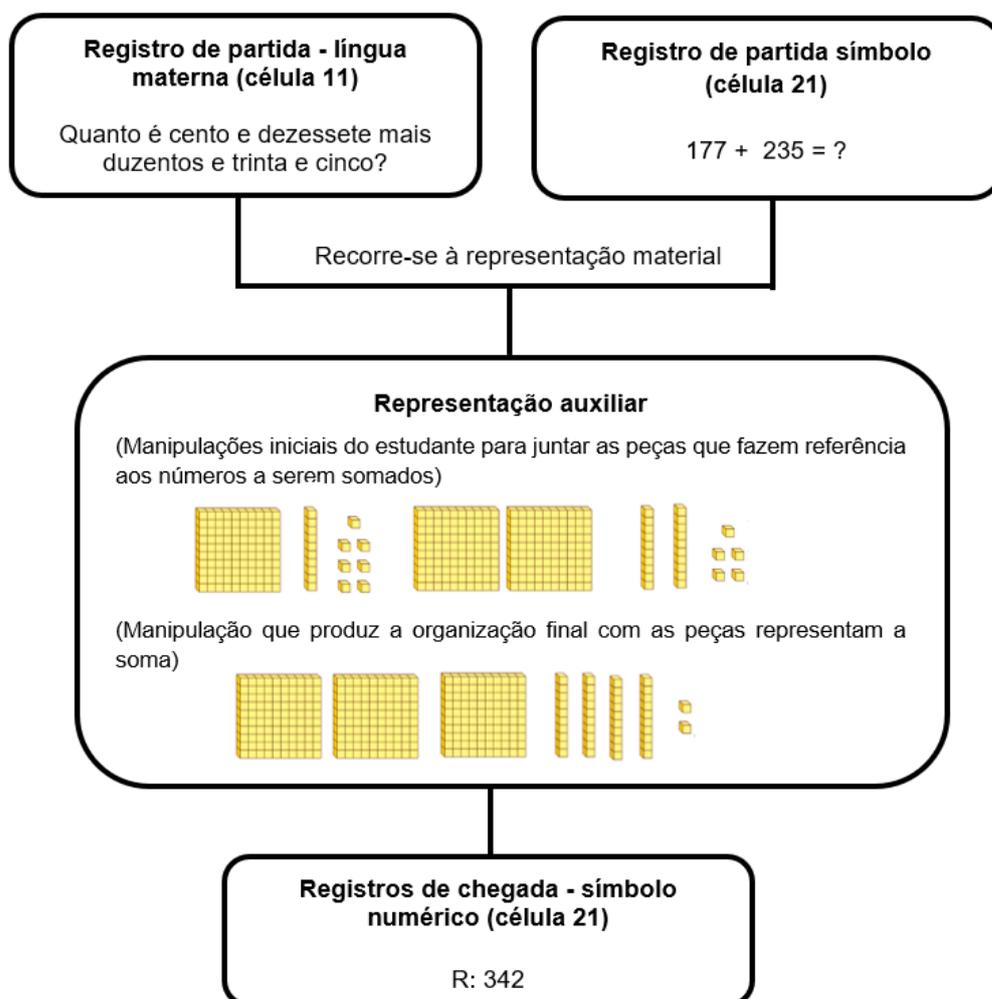
**Figura 2.** Esquema do uso de representações auxiliares em situações intra/inter-registros  
 Fonte: Elaborado pelos autores

Na figura acima, adicionamos uma nova linha que busca localizar conceitualmente o lugar das representações auxiliares, a partir dos pressupostos da TRRS. No caso da esquerda, temos uma situação em que a representação auxiliar é usada para fins intra-registro de representação. A partir de um dado registro A, converte-se seu conteúdo em uma representação auxiliar, que é manipulada concretamente para formular uma resposta

que termina no mesmo registro inicial A. Já no caso da direita, a representação auxiliar concreta apresenta uma função inter-registro de representação. A partir de um registro de partida A, manipula-se o material concreto para auxiliar na produção de uma resposta que se encontra em outro registro de representação B.

Portanto, podemos dizer que as representações auxiliares de função material contribuem não só para realizar a atividade cognitiva de tratamento, mas também a conversão de uma dada situação. É por isso que esses materiais são auxiliares, pois sua natureza semiótica objetiva ajudar na passagem entre as informações necessárias para os tratamentos e a conversão, embora sejam apenas um caminho, e não o fim. Retomando os exemplos mais comuns desses manipuláveis para ensinar números, o Bloco base dez e o Ábaco, apresentamos alguns exemplos que elucidam suas contribuições semióticas:

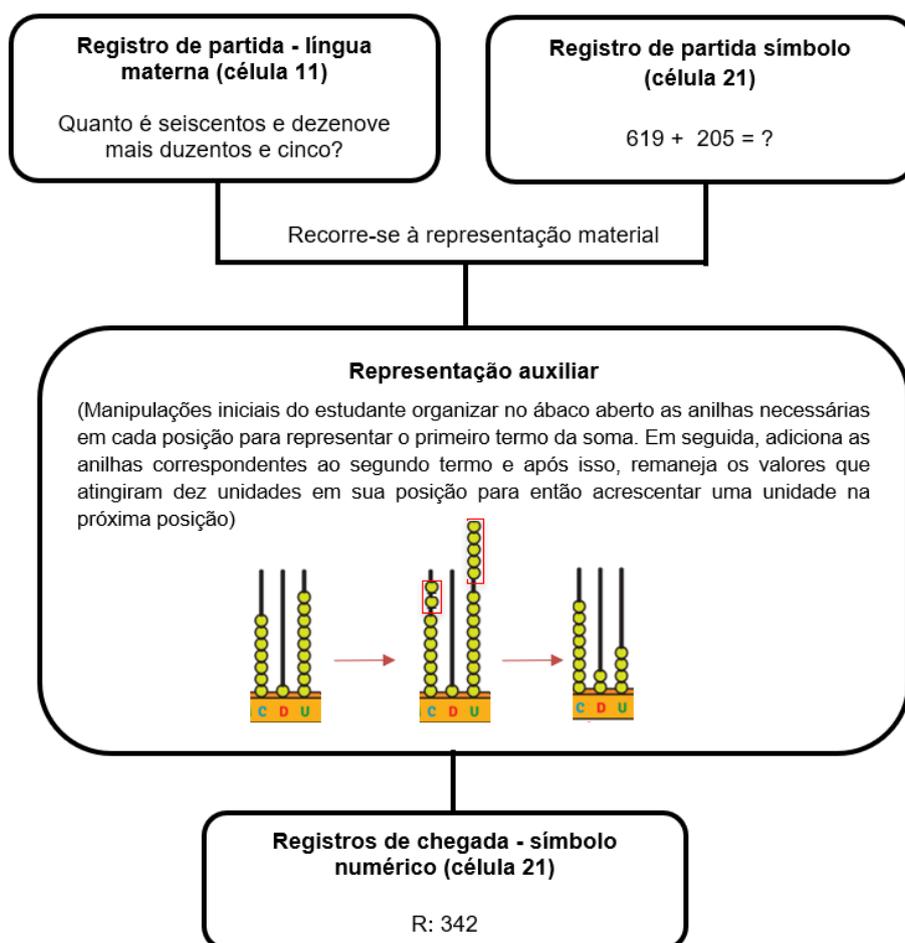
### Exemplo 1. Uso dos Blocos base dez



Na situação anterior, mostramos as duas possibilidades de uso apresentadas no esquema da Figura 2. Em um caso, partimos, por exemplo, de um registro em língua natural (célula 11 da Tabela 2), enquanto o registro final da atividade encontra-se no registro simbólico (célula 21 da Tabela 2). No outro caso, o registro de saída é o símbolo (indo-arábico), assim como o final. Em ambos os casos, os Blocos base dez cumprem a função material de uma representação auxiliar, já que seu uso, por parte dos alunos, pode facilitar a compreensão do sistema de numeração e suas questões de agrupamentos de dez, o que posteriormente auxiliará no entendimento dos algoritmos das operações.

Contudo, Duval (2001) menciona que, ao se fazer uso desse tipo de material, toda a precaução é necessária para que não haja confusão acerca de sua eficácia no contexto matemático em relação ao contexto cognitivo. Matematicamente, o material pode ajudar a resolver muitas situações e problemas variados envolvendo números, mas, do ponto de vista cognitivo, apresenta uma funcionalidade semiótica limitada, implicando no fato de não ser usado como único ou principal recurso. Similarmente a isso, temos o exemplo com o uso do Ábaco:

### Exemplo 2. Uso do Ábaco



Aqui se repetem as mesmas implicações didáticas mencionadas no caso anterior com os Blocos base dez, podendo ser usadas para fins intra e inter-registros. Porém, no caso do Ábaco, seu uso articula a compreensão dos agrupamentos dentro da ideia de valor posicional do sistema de numeração, diferente do BBD que não aborda noções posicionais. Em qualquer caso, a função desses materiais surge da busca por representações adequadas para os diferentes modos de pensar matematicamente, sempre ressaltando seu caráter transitório e passageiro, para que sejam gradativamente substituídos por sistemas cognitivamente mais criadores. Em outras palavras, trocar a representação auxiliar concreta por um registro de representação. O grande valor cognitivo repousa nas relações, padrões, problemas e símbolos que esse tipo transitório de representação pode mobilizar.

Os manipulativos mencionados nos exemplos 1 e 2 são do tipo didaticamente construídos e herdados da cultura matemática, respectivamente. Mas, independentemente da classificação de um manipulativo, entendemos que o papel pedagógico de tais materiais, enquanto representações auxiliares concretas, repousa em: serem utilizados de forma adequada; seu uso deve explorar as propriedades matemáticas que são evidenciadas pela *semiose* (elementos da representação) que o material oferece ao sujeito; conectar os conceitos que emergem a partir de sua manipulação com outras representações; não ser um substituto fixo para os objetos (neste caso os números), mas sim, um recurso didático-semiótico de passagem para mobilizar um pensamento matemático.

Toda representação semiótica possui uma forma específica e cada forma releva um certo conteúdo matemático (Moretti e Thiel, 2012), e por isso, a forma concreta das representações auxiliares contém um conteúdo representado. Não afastado, retomamos a relação entre *noesis* e *semiose*, pressuposto do entendimento de Duval (2004) sobre a aprendizagem. No caso dos exemplos anteriores, os materiais utilizados atuam na esfera da *semiose* (representações), pois são instrumentos ostensivos sobre o sistema de numeração que auxilia na *noesis* (apreensão conceitual).

## 5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Neste estudo, apresentamos uma discussão que envolve a temática dos materiais manipulativos utilizados no ensino do sistema de numeração decimal, a partir do entendimento de sua função semiótica de representação auxiliar para a aprendizagem.

Essa abordagem tem sido pouco realizada no âmbito da pesquisa em educação matemática, sobretudo nos estudos à luz da teoria de Duval.

Pelas ideias debatidas, nosso entendimento é de que as representações auxiliares (do tipo material) podem contribuir na aprendizagem matemática, uma vez que possibilitam os sujeitos a transitar entre registros mais abstratos de menor concretude. Vimos o caso de dois tipos de materiais manipulativos, os Blocos base dez e o Ábaco, utilizados respectivamente para fins de compreensão dos agrupamentos e do valor da posição do sistema de numeração decimal. Seu uso pode ser exemplificado tanto para fins intra como inter-registros de representação. Em ambos os casos, eles oferecem uma esfera semiótica, conectado ao poder de representar os objetos de forma ostensiva e ao mesmo tempo, a capacidade instrumental de manipulação.

Além disso, há questões primordiais que precisam ser consideradas no uso das representações auxiliares, dentre as quais destacamos: o entendimento de seu papel transitório, ou seja, de que são um caminho para compreender representações objetivadas no ensino; de que seu uso precisa ser mediado pelo professor, que conduzirá o estudante a extrair dessas representações as ideias e as relações matemáticas; e a importância de não serem confundidas com o objeto que representam e por isso, devem ser usados em conjunto com outros registros. Duval (1995) já alertava que as criações didáticas não podem se afastar do objeto de ensino, devendo destacar as unidades significativas pertinentes para auxiliar o estudante a entender como, a partir delas, se pode chegar à outra representação do mesmo objeto, mas de forma coordenada.

Portanto, consideramos que o presente artigo amplia a discussão acerca das representações auxiliares, que podem ser pensadas para além da função material, conforme aqui abordadas na perspectiva semiocognitiva de Duval. Os Blocos base dez e o Ábaco foram tomadas como exemplos, uma vez que seu uso Anos Iniciais é estimulado pela BNCC (Sabel, Pires e Silveira, 2022). Entendemos que outros trabalhos podem surgir sobre essa temática, refletindo sobre as implicações das representações auxiliares na matemática, como por exemplo, o papel dos diagramas, esquemas ou tabelas, dentre outros tipos. Por fim, não buscamos apresentar todos os tipos de materiais manipulativos usados nos anos iniciais para ensinar o sistema de numeração hindu-arábico, mas sim, perceber como eles podem servir como um modelo semiótico que ajuda a concretizar em determina fase da escolaridade um certo pensamento matemático.

## REFERÊNCIAS

- André, M. (2013). O que é um estudo de caso qualitativo em educação. *Revista da FAAEBA: Educação e Contemporaneidade*, 22(40), 95-103.
- Björklund, C. (2014). Less is more – mathematical manipulatives in early childhood education. *Early Child Development and Care*, 184(3), 469-485.
- Bosch, M.; Chevallard, Y.(1999). La sensibilité de l'activité aux ostensifs dans mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, v.19, n°1, p. 77 – 124.
- Brown, M. C., McNeil, M. M., & Glenberg, A. M. (2009). Concretude na educação: problemas reais, soluções potenciais. *Perspectivas do Desenvolvimento Infantil*, 3(3), 160-164.
- Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1988). *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo, SP: Cortez Editora.
- Costa, C. (2021). *Teoria dos registros de representação semiótica: estado do conhecimento em dissertações e teses (1996-2019)* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.
- D'ambrósio, B. S. (1989). Como ensinar matemática hoje. *Temas e Debates. SBEM. Ano II N, 2*, 15-19.
- Dienes, Z. P. (1970). *Aprendizado moderno da Matemática*. Rio de Janeiro, RJ: Zahar Editores.
- Duval, R. (2001). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo* (M. V. Restrepo, Trad.). Santiago de Cali: Mérlin I.d.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. V. Restrepo, Trad.). Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar, os registros de representações semióticas* (M. A. Dias, Trad.). São Paulo, SP: PROEM.
- Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Zetetiké*, ano 3, 4, 1-37.
- Glaserfeld, E. (1990). An exposition of constructivism: why some like it radical. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Monographs of the journal for research in mathematics education* (pp. 19-29). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kamii, C. (2001). *Aritmética: novas perspectivas - Implicações da Teoria de Piaget* (7a ed.). Campinas, SP: Papyrus.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington: National Academy Press.

Lansky, S. et al. (2014). Pesquisa Nascido no Brasil: perfil da mortalidade neonatal e avaliação da assistência à gestante e ao recém-nascido. *Caderno de Saúde Pública*, , 192-207.

Lorenzato, S. (Org.). (2006). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores* (Vol. 1). Campinas: Autores Associados.

Martin, T. (2009). Uma teoria da aprendizagem fisicamente distribuída: como os ambientes externos e os estados internos interagem na aprendizagem da matemática. *Child Development Perspectives*, 3, 140-144.

Moretti, M. T., & Thiel, A. A. (2012). O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. *Práxis Educativa*, 7(2), 379-396.

Moretti, M. T., & Baerle, L. M. (2022). O uso de Representações Auxiliares na Aprendizagem Matemática: um Olhar Semiocognitivo segundo Raymond Duval. *Educação Matemática em Pesquisa*, 24(1), 582-610.

Murari, C. (2011). Experienciando materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da Matemática. *Boletim de Educação Matemática*, 25(41), 187-211.

Nacarato, A. M. (2004-2005). Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática*, ano 9, (9-10), 1-6.

Peltier, C., & Vannest, K. J. (2017). Uma meta-análise da instrução do esquema sobre o desempenho na resolução de problemas de alunos do ensino fundamental. *Review of Educational Research*, 87(5), 899-920.

Piaget, J. et al. (1995). *Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais* (F. Becker & P. G. da Silva, Trads.). Porto Alegre, RS: Artes Médicas.

Pires, E. M., Sabel, E., & Silveira, E. (2022). Objetos manipuláveis em livros didáticos: realidade x representação. In *Anais do 1º Colóquio de Livros Didáticos de Matemática*, Rio Claro, SP.

Sabel, E., & Silveira, E. (2022). Processos de Abstração Matemática: reflexões a partir da articulação entre o Desvanecimento da Concretude e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. *Revista Catarinense de Educação Matemática*, 1(1), 1-17.

Sabel, E., Pires, E. M., & Silveira, E. (2022). Materiais Manipulativos: uma análise de definição e caracterização no Ensino de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. In *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática*, Brasília, DF.

Silva Filho, J. P. (2022). *Contribuições da teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval para a análise da produção discente com discalculia do desenvolvimento* (Tese de Doutorado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.

Silveira, E., & Powell, A. (2019). Representações e Indicações de Uso de Materiais Manipulativos em Livros Didáticos de Primeiro ao Quinto Ano: Serão Consistentes? In *Anais do XIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática*, Cuiabá, MT.

Silveira, E. (2016). Materiais manipuláveis e alguns riscos que envolvem sua utilização. In E. Silveira et al. (Org.), *Alfabetização na perspectiva do letramento: letras e números nas práticas sociais* (Vol. 1, pp. 221-240). Florianópolis: NUP-CED-UFSC.

Silveira, E. Afinal, está certo ou errado? Um estudo sobre indicações de uso de blocos base dez em livros didáticos de matemática no Brasil. (2018). In *Anais do VII SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Foz do Iguaçu, PR.

Silveira, E. A Study on the indications to the use of Base Ten Blocks and Green Chips in Mathematics textbooks in Brazil. (2021). *The Mathematics Enthusiast*, 18(3), 469-501.

Silveira, E., Powell, A. B., & Grando, R. C. (no prelo). Materiais manipulativos em educação matemática. In E. Silveira, A. B. Powell, & R. C. Grando (Org.). *Glossário de Verbetes em Educação Matemática*. [s.l.]: [s.n.].

Uttal, D. H. (2003). On the relation between play and symbolic thought: the case of mathematics manipulatives. In O. N. Saracho, & B. Spodek (Eds.), *Contemporary perspectives on play in early childhood education* (pp. 97-114). Charlotte/NC: Information Age Publishing.

## NOTAS DA OBRA

### TÍTULO DA OBRA

Representações Auxiliares Na Aprendizagem Matemática: O Caso Dos Materiais Manipulativos No Ensino Do Sistema De Numeração Decimal

#### Eduardo Sabel

Mestre e Doutorando em Educação Científica e Tecnológica  
Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil  
Membro dos grupos de pesquisa GPEEM (UFSC) e GEPPROFEM (UFSC)  
Especialista de Ensino III no SENAI/SC  
eduardosabelmatematica@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0002-6334-4893>

#### Everaldo Silveira

Doutor em Educação Científica e Tecnológica  
Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Metodologia de Ensino, Florianópolis, Brasil  
Vice-líder do grupo de pesquisa GEPPROFEM (UFSC)  
derelst@hotmail.com@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0002-2113-2227>

#### Endereço de correspondência do principal autor

Rua José Junges, 3119, 89117-086, Gaspar, SC, Brasil.



## AGRADECIMENTOS

À Secretaria da Educação do Estado de Santa Catarina pela bolsa de estudo do programa de bolsas universitárias UNIEDU/FUMDES pela concessão de bolsa de doutorado concedida ao primeiro autor, iniciada em 2022.

Também agradecemos aos grupos de pesquisa GPEEM (UFSC) e GEPPROFEM (UFSC), pelas constantes trocas e aprendizagens.

## CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

**Concepção e elaboração do manuscrito:** Sabel, E. Silveira, E.

**Coleta de dados:** Sabel, E. Silveira, E.

**Análise de dados:** Sabel, E. Silveira, E.

**Discussão dos resultados:** Sabel, E. Silveira, E.

**Revisão e aprovação:** Sabel, E. Silveira, E.

## CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA

O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

## FINANCIAMENTO

Programa de bolsas universitárias UNIEDU/FUMDES

## CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM

Não se aplica

## APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Não se aplica

## CONFLITO DE INTERESSES

Não se aplica

## LICENÇA DE USO – uso exclusivo da revista

Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution](#) (CC BY) 4.0 International. Esta licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

## PUBLISHER – uso exclusivo da revista

Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

## EQUIPE EDITORIAL – uso exclusivo da revista

Mérciles Thadeu Moretti  
Rosilene Beatriz Machado  
Débora Regina Wagner  
Jéssica Ignácio de Souza  
Eduardo Sabel

## HISTÓRICO – uso exclusivo da revista

Recebido em: 18-04-2023 – Aprovado em: 07-06-2023

