Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

RUPTURAS E OMISSÕES ENTRE MANIPULAR, VER, DIZER E ESCREVER: HISTÓRIA DE UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES EM GEOMETRIA[1]

Ruptures Et Oublis Entre Manipuler, Voir, Dire Et Écrire: Histoire D'une Séquence D'activités En Géométrie.

Raymond **DUVAL**
Professor Emérito da Université du Littoral Côte d'Opale/France

Trad.:
Celia Finck **BRANDT**
Universidade Estadual de Ponta Grossa, Paraná
brandt@bighost.com.br
https://orcid.org/0000-0002-1620-3633

Méricles Thadeu **MORETTI**
Universidade Estadual de Ponta Grossa, Paraná
mthmoretti@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

As observações centraram-se na experiência de um procedimento que tratou de um modo de introduzir a geometria. O objetivo primordial do ensino era, primeiramente, ensinar os alunos a verem figuras como os matemáticos as veem, pois, esta condição é essencial para a aquisição de conhecimentos em geometria e para se torná-los capazes de utilizá-los em outra situação. Concretamente isso significa que é necessário, primeiramente, fazer com que os alunos passem da *maneira natural de ver as figuras*, que consiste em um reconhecimento perceptivo imediato de contornos fechados em 2D, *à maneira matemática de olhá-las* que, ao contrário, focaliza retas e segmentos 1D e pontos de intersecção 0D. Isto leva a ver uma rede de retas subjacentes às diferentes formas 2D reconhecidas em um primeiro olhar (Duval, 2005; Duval e Godin, 2005).

[1] Texto publicado em português e em francês em: As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática (Org. C. F. Brandt; M. T. Moretti), 256p. Ijuí: Editora da Unijuí, 2014.

Nesse procedimento, a simetria axial apresenta uma vantagem considerável. Sua aquisição exige, evidentemente, que se passe do reconhecimento perceptivo das figuras à maneira matemática de olhá-las. Mas, o ponto essencial é que a introdução desse procedimento permite que se utilize outras figuras diferentes das figuras geométricas canônicas, como por exemplo, árvore, asas de borboletas, bola de tênis etc. Essas figuras se prestam melhor à tomada de consciência da maneira matemática de olhar as figuras, enquanto a introdução prematura de figuras euclidianas privilegia o reconhecimento perceptivo das formas 2D e restringe, a maioria dos alunos, a uma abordagem botanista[2] da geometria.

A experiência compreendeu a introdução da simetria axial para alunos de 10 a 11 anos. A escolha das atividades e sua organização em sequências didáticas são, evidentemente, feitas de maneira com que o olhar estivesse centrado nas retas que se prolongavam de segmentos traçados e em outras retas que se podia traçar entre dois pontos de intersecção. Dois tipos de atividades foram, então, selecionados. A primeira atividade consistia em operações com o suporte material de uma folha de papel sobre a qual uma figura foi traçada e na utilização de uma transparência: *plissá-la*, evidentemente, mas sobretudo reproduzi-la sobre uma transparência a fim de *retornar* à transparência e *sobrepor* a figura reproduzida na figura de partida. *Pode-se, assim, verificar se os dois contornos sobrepostos coincidem ou não.* Isto constitui um critério exploratório do caráter simétrico ou não de uma figura. As operações desse procedimento experimental são *operações em 3D*. O segundo tipo de atividade, sobre a própria figura, consistia em prolongar os traços de um contorno 2D para obter pontos de intersecção e assim testar se eles estavam alinhados e se seu alinhamento poderia ser um eixo de simetria. As operações desse procedimento instrumental de construção de novos traços *são operações 2D*. O procedimento material era, primeiramente, proposto para introduzir os procedimentos instrumentais de construção e, em seguida, utilizado para controlar e confirmar a conclusão da atividade de construção do traçado nas figuras.

[2] N. de Trad. O olhar botanista diz respeito a um tipo de olhar que permite reconhecer e diferenciar formas, um triângulo de um quadrilátero ou de uma figura oval, por exemplo. As propriedades diferenciadas são características visuais de contornos (Duval, 2005).

A organização de diferentes sequências de atividades problemas fez-se tendo por base duas hipóteses ainda que questionadas por alguns membros do grupo.[3] Primeiramente assumiu-se que a passagem das operações 3D, com o apoio material das figuras, às operações 2D para prolongar os lados, obter pontos de intersecção e procurar os alinhamentos, não constituíam um degrau difícil de ser alcançado pelos alunos. As manipulações de plissagem, de retorno e superposição deviam ajudá-los no reconhecimento da presença ou da ausência da simetria axial. E, também, assumiu-se que a combinação destes dois tipos de atividades devia permitir que se descobrisse a simetria axial e suas propriedades *antes mesmo de qualquer explicação verbal*. Além disso, devia ser esta compreensão prática, fundada em uma experiência concreta e instrumental, que iria permitir a compreensão de formulações matemáticas que descrevem e explicam a simetria axial.

Esta hipótese era tão mais interessante uma vez que a experiência de ensino se fazia em uma classe de alunos de 10 a11 anos em que nem todos tinham um bom domínio da língua francesa. O objetivo da observação era saber se os alunos iriam ter consciência do que se queria que eles adquirissem por meio deste dispositivo de atividades propostas.[4]

É no quadro desta experiência de ensino que observei o trabalho de muitos alunos durante uma dezena de sequências, uma por semana durante dois anos consecutivos. Como o professor tomava a metade do número de alunos da classe, de cada vez, a outra metade ia para a sala de informática, assim pude assistir cada sequência duas vezes. Este trabalho de observação eu vou evocar aqui, não para apresentar os resultados de um ensino da simetria axial ao fim do primário, mas para levantar o problema das condições e dos critérios que permitem analisar e interpretar isto que os alunos fazem, ou não, em uma atividade ou problema.

[3] A experiência de ensino tinha sido elaborada na parte de um seminário IUFM sobre ensino da geometria para o primário, dirigido por M. –J. Perrin. Todas as situações propostas foram concebidas por Marc Godin. Este texto incorpora alguns elementos de dois cursinhos para a PUC/V de Valparaiso em 2010: “Que decisões e qual proposta eleger para ensinar geometria: atividades concretas, figuras, provas, demonstração?” e “Que decisões e qual proposta eleger para ensinar geometria: atividades concretas, figuras, provas, demonstração” traduzidos por Ismenia Guzman.

[4] As observações foram feitas numa turma de alunos de 10 a 11 anos em Lille, em 2008, e depois em 2009. O registro das observações de cada sessão, enviada ao professor à noite ou no dia seguinte à reunião, está disponível a pedido.

1. POR QUE FUI ME INTERESSAR POR PRODUÇÕES VERBAIS?

Eu me interessei pelo que os alunos faziam nas manipulações com a transparência, nas construções sobre a figura (prolongar os lados para obter pontos de interseção, em seguida, traçar retas nesses pontos de interseção) e igualmente ao que os bloqueava. Eu tinha ainda menos razões para me interessar pela linguagem uma vez que uma grande parte entre eles apresentava dificuldade no domínio da língua.

As dificuldades surgiram no trabalho em comum em uma atividade que tratava de completar uma das asas de uma borboleta (Figura 1 a seguir). Os alunos que mais avançaram nesse trabalho ficaram bloqueados quando da construção do ponto simétrico do triângulo preto. Questões de linguagem surgiram, de forma intensa, quando tiveram que descrever e explicar o procedimento utilizado.

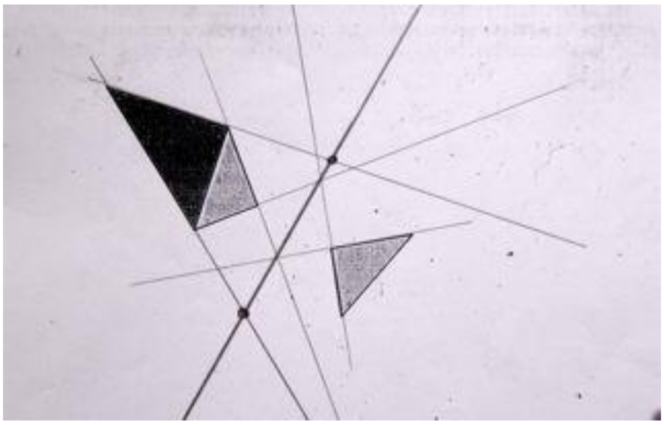


Figure 1. Bloqueio na construção do ponto de simetria do terceiro vértice
Fonte: elaborado pelo autor

Para explicar de qual ponto partir para continuar a construção, o professor introduziu uma notação para marcar de quais vértices, à esquerda do eixo de simetria, os vértices do triângulo à direita eram as “imagens”: 2 $\rightarrow$2’, 3 $\rightarrow$3’. Dois alunos questionaram por que ele chamava de vértices 2’ e 3’. E, a partir daí, tudo se tornou incompreensível. Tanto o professor quanto os alunos se encontravam em uma situação na qual *não se podia nem ver e nem mostrar na figura sem recorrer à uma designação que reunisse duas unidades 0D que são figuralmente separadas e distantes uma da outra em um único e mesmo objeto matemático.* Isto constitui um salto cognitivo considerável.

Por outro lado, uma diferença importante apareceu entre o que *o professor falava e o que escrevia no quadro*. Ele introduzia a explicação da relação objeto → imagem, oralmente, e se contentava em escrever no quadro aquilo que dizia respeito aos procedimentos de traçados para completar a configuração por simetria axial.

Enfim, essa diferença entre expressão oral e expressão escrita encontrava-se, igualmente em um *nível de expressão verbal que era habitualmente solicitada aos alunos*. Nas trocas orais entre o professor e alunos, *a resposta solicitada limitava-se, na maioria das vezes, à uma palavra, que era esperada na utilização do vocabulário geométrico*. A solicitação de uma produção escrita era mais excepcional, limitada à redação de mensagens sobre construção de figuras, para "transmitir informações". Durante esta atividade de redação, em uma sessão anterior, a maioria dos alunos se mostrava, muitas vezes, em grande dificuldade. A passagem da expressão oral à escrita, de uma mensagem, constituía um salto muito grande para estes alunos.

2. OPERAÇÕES DE DESIGNAÇÃO: A ARTICULAÇÃO ENTRE UNIDADES FIGURAIS E TERMOS GEOMÉTRICOS

Também, no ano seguinte o professor incluiu a mesma sequência de atividades, mas ele tinha decidido consagrar mais três sessões para a escrita de mensagens de construção de uma figura.

2.1 As operações de designação na redação de um texto de construção

O professor havia escolhido uma figura relacionada às atividades feitas anteriormente que resulta da reiteração do procedimento seguinte: tomar o ponto médio do raio que acabamos de traçar e construir um semicírculo que passa pelas extremidades deste raio.

Figura dada	Duas listas escritas no quadro	
	Vocabulário a utilizar	**VOCABULÁRIO A NÃO UTILIZAR**

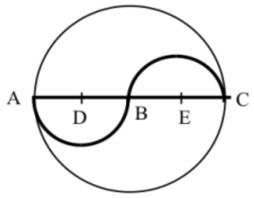
	**centro** (de um círculo) **ponto médio** (de um segmento), **meio** de um segmento, raio	ponta seca do compasso (*centro*) ponto médio ≅ meio ponta do lápis ou grafite (*ponto sobre o círculo*)

Figura 2. Figura e instruções dadas para escrever um texto de construção
Fonte: elaborado pelo autor

Após o insucesso de quase todos os alunos, o professor elaborou, em um trabalho em conjunto, a formulação de uma sequência de instruções:

1. Traçar um segmento [AB] 2. B é o ponto médio de [AC] 3. Traçar um círculo de centro em B que passa por A e C.	4. D é o ponto médio de [AB] 5. Traçar um círculo de centro em D que passa por A e por B	6. E é o ponto médio de [BC] 7. Traçar um círculo de centro E, raio [BE] ou [EC]

Em seguida, a partir de uma variação da figura precedente (uma reiteração suplementar da precedente) o professor pediu que os alunos escrevessem um texto de construção que utilizasse o modelo de redação feita no quadro e recopiado nos cadernos.

Cada aluno, entre dois, escreveu um texto que observava o modelo de redação com alguma insuficiência de informação. Mas, as produções da outra metade de alunos, revelaram importantes dificuldades relativas *às operações que permitem designar unidades* figurais. De fato, para escrever um texto de instrução *é necessário lidar com uma gama de maneiras diferentes para designar as unidades figurais e, sobretudo, poder nomear, ao menos, de duas maneiras diferentes a mesma unidade figural.*

Denominação por LETRAS		Denominação por PALAVRAS QUE QUALIFICAM unidades figurais 1D		
Unidades 0D	Unidades 1D		segundo pertence a	em função de sua relação com uma

Nome próprio contextual para assegurar a unicidade	Sintagmas formadas a partir de nomes próprios	Diretamente	uma figura de dimensão superior	outra unidade figural de mesma dimensão
Pontos figurais: vértice, interseção ... Pontos codificados por uma marca Extremidade ou ponto médio de um segmento	AB (AB) [AB]	Segmento Reta	Raio Diâmetro Diagonal Lado (de um polígono)	Perpendicular, Paralela, Simétrica

Figura 3: Gama de operações de designação a mobilizar para escrever as instruções
Fonte: elaborado pelo autor

Há, primeiramente, a heterogeneidade do vocabulário que surgia com a existência de três tipos de termos para designar apenas unidades figurais 1D! E, ao contrário, *uma mesma unidade figural pode ser sucessivamente qualificada de várias maneiras.* Isto depende da figura delimitadora na qual se retira esta unidade figural com fundo dado ou possível. Assim, um mesmo traço 1D pode ser designado como “metade de um segmento” maior já traçado ou como “o raio de um círculo”, ou ainda, “o lado de um polígono”, etc. É essa multidesignação possível que abre o campo da análise e ao raciocínio em geometria e é requerida para escrever uma série de instruções. Encontramo-nos, portanto, diante desta primeira questão: os alunos são introduzidos nestas operações de designação figurais 0D e 1D ou permaneceram *no reconhecimento perceptivo das formas 2D que exclui esta multidesignação?*

A análise das formulações dos alunos em função desses critérios relativos às únicas operações de designação revela várias incompreensões que inibem as únicas operações discursivas de designação. Estas incompreensões merecem, entretanto, mais que especial atenção já que elas constituem a prática mais elementar da descrição geométrica de uma figura, isto é, da articulação entre enunciados de instrução e uma figura.

(1) As letras pertencem já à figura da qual eles escrevem a mensagem de construção: *“coloque o ponto B no meio do segmento AD”, “e posicione o ponto O no centro do círculo”, “encontre [E] ponto médio de [A]”*, etc.

(2) Não há diferença entre a designação literal de um ponto 0D e de um segmento 1D. Para estes dois tipos de unidade figural, uma parte dos alunos utiliza uma única letra. Um aluno pode chegar mesmo ao ponto de colocar todas as letras entre parênteses.

(3) Observa-se esta mesma ausência na designação das unidades figurais 1D. Um aluno procurou descrever a construção da figura a partir de divisões sucessivas de um segmento, a sua formulação de instruções mostra que não se deu conta de que o emprego de um termo de propriedade se refere à duas unidades figurais 0D e 1D e não a uma única.

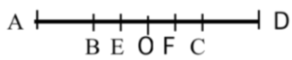
Uma produção escrita de aluno	Características	Isto que é visto da figura a descrever
“1) Trace um segmento [A], à direita coloque [B]. Ao fim do segmento coloque [D]. **Coloque ao centro [O]** À esquerda de [D] coloque [C] 2) **Coloque o centro sobre [O]** depois trace passando por [AD] 3) Encontre [E] et [F] ponto médio de [AB} et [CD] 4) Coloque o centro sobre [C] passando por [OD] 5) Faça a mesma coisa para [ABO] 6) Coloque o centro sobre [E] depois trace passando por [AB] e, em seguida, faça a mesma coisa para [CFD]”	1. O segmento AD é simplesmente chamado de [A]. Depois as três instruções se referem à colocação dos pontos B, O, em seguida, C. 2. A instrução “coloque o centro sobre [O] significa”: coloque a ponta do compasso sobre o ponto O. 4. Resta, apenas, sobrepor o círculo sobre o segmento [A] descrito na instrução 1. 5 e 6. Reiteração para a construção do segundo círculo. [AOB] designa um círculo	

Figura 4. Confusão nas operações de designação e compreensão das propriedades como qualidade de uma única unidade figural 1D ou 0D
Fonte: elaborado pelo autor

(4) Não há nenhuma consciência da dupla designação possível de uma unidade figural, mesmo quando dois termos referentes à duas figuras englobantes diferentes sejam

empregados: "*Coloque teu centro no meio de A e de B (um segmento). Em seguida trace seu semicírculo"*.

Esta formulação é, entretanto, tão mais interessante uma vez que ela condensa, em uma única, as duas instruções da mensagem modelo supra:

2. B é o meio de [AC]

3. Traçar um círculo de centro B

Este exemplo diz respeito apenas à dupla designação de um ponto. Ora esta prática da dupla designação (aqui de uma mesma unidade figural) é a operação fundadora de toda atividade matemática, assim como Frege[5] havia assinalado na sua célebre distinção entre sentido e referência (*Sinn e Bedeutung*). Com efeito, ela é a base de toda atividade de substituição por equivalência referencial como no cálculo ou no desenvolvimento do raciocínio. Aqui ela não tem somente uma razão de economia na expressão, ela assegura a continuidade no desenvolvimento da atividade de construção.

Apesar de todas as intervenções do professor, as instruções foram formuladas em termos de adições ou, mais exatamente, de uma descrição de gestos a serem feitos para a utilização concreta dos instrumentos. Tudo se passa como se a construção de uma figura era uma fabricação material que consistia em justapor unidades figurais e letras.

2.2 O problema do emprego dos termos puramente relacionais: "perpendicular"

A particularidade dos termos relacionais é que eles não são associáveis a nenhuma unidade figural 1D nem à nenhuma unidade figural 2D, mas unicamente à uma relação entre duas unidades figurais 1D. E a dificuldade de seu emprego vem daquilo que designamos os dois termos da relação {xRy}, com apoio no primeiro termo expresso. A questão não é, portanto, saber se se pode reconhecer visualmente esta relação, mas como ela é dita e como é aplicada em uma construção.

Tanto nas trocas orais quanto na escrita de mensagens de construção, no entanto, a maior parte dos alunos emprega o termo "perpendicular" considerando-o como uma propriedade de uma unidade figural 1D, reta ou segmento. E isto conduz de um lado a empregar a palavra "perpendicular" sem outra indicação.

---

[5] Nota de Trad. Frege, G. Lógica e filosofia da linguagem. Trad. Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix e Ed. da USP, 1978.

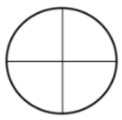
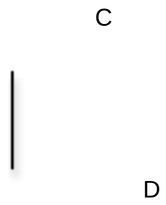
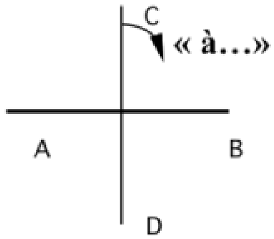
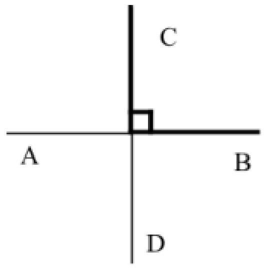
Subfigura a ser descrita	Expressão oral: a perpendicular CD	O (segmento) perpendicular à [AB] Trace CD perpendicular à [AB]	
	propriedade de uma unidade visual 1D	relação entre duas unidades visuais 1D	mas, vista como uma só unidade 2D, um ângulo reto
			

Figura 5. "Perpendicular" e "perpendicular à"
Fonte: elaborado pelo autor

A assimilação do sentido do termo "perpendicular" na borda de um ângulo reto pode ser uma dificuldade que surgiu depois das sessões sobre a simetria axial quando da utilização de um esquadro para construir uma reta perpendicular à outra. O professor havia introduzido a construção do ponto imagem de um ponto dado, traçando uma perpendicular ao eixo passando por esse ponto dado, e transferindo para o outro lado do eixo um comprimento igual àquele do ponto dado ao eixo. Solicitou que este procedimento fosse utilizado para completar a asa da borboleta (Figura 1). A dificuldade recaía sobre o posicionamento do esquadro para traçar a perpendicular ao eixo para construir o simétrico de um vértice do triângulo preto. *Em que lugar posicionar o ângulo reto do esquadro sobre a figura?* Muitos deslocamentos tinham sido ensaiados depois de uma procura em comum no quadro negro.

Era necessário, não somente que o professor mostrasse o bom posicionamento, mas que deslizasse o esquadro para prolongar a perpendicular do outro lado do eixo até ao ponto imagem. Esta dificuldade subsistiu como um bloqueio na aplicação do procedimento na atividade da asa incompleta da borboleta. De fato, tudo se passou como se os alunos não conseguissem dissociar as duas bordas que formam o canto retangular do esquadro. Ora, esta dissociação é necessária para que se possa ver e antecipar o traçado.

Podemos concluir, sem muito risco, que a linguagem e as dificuldades que suscitam não estão nem no conhecimento do "vocabulário" geométrico nem nos conceitos que as palavras significam, mas nas operações de designação que elas pressupõem, assim como no discernimento visual de diferentes unidades figurais possíveis 2D e 1D em uma figura. Pudemos perceber que os alunos não suspeitam nem da diversidade nem da complexidade uma vez que elas excedem em muito o campo da designação oral dos objetos materiais. Em geometria, elas se ligam ora à linguagem ora à visualização.

3. INTRODUÇÃO DO VOCABULÁRIO E DAS FORMULAÇÕES GEOMÉTRICAS

A redação de instruções para reconstruir uma figura mostra ser um simples processo de descrição e não de elaboração de uma definição ou de enunciação de uma conjectura. A descrição requer simplesmente que se designe unidades figurais que são necessárias, evidentemente, que sejam reconhecidas ou distinguidas em uma configuração. Ora, sobre este único gênero de formulação, há uma distância considerável entre a produção essencialmente oral dos alunos e aquela somente escrita que é esperada ao final de numerosas sessões de ensino. Entre os alunos e o professor há como duas linguagens e dois mundos. Como superar esta distância cognitiva?

3.1 Um esquema consensual de organização didática de atividades à ser reconsiderado

Consiste em começar por atividades concretas com a manipulação de objetos materiais que deve permitir uma transferência das observações feitas ao curso da manipulação na representação figural destes objetos. As manipulações supuseram, desta forma, fornecer a base intuitiva necessária para introduzir, por associação, o vocabulário geométrico. E os dois únicos momentos que reconhecemos o papel importante da língua, são a apresentação da tarefa e a reunião (feita com os alunos e o professor) após um trabalho individual ou em grupo. As fases de formulação, depois de validação, constituem os dois momentos fortes da reunião sob a direção do professor. O lugar dado à linguagem se reduz, portanto, a estes momentos que é preciso comunicar as instruções e fazer a síntese do que é necessário reter.

Eis um exemplo simples. Tratava-se de completar o contorno de uma figura simétrica representando um pinheirinho de Natal. a primeira atividade de toda a sequência de ensino sobre a simetria axial.

Figura projetada no quadro	Explicação da tarefa pelo professor	
	*O que é que representa esta figura?* *O que é que se pode fazer?* *Como fazer para completá-la?* *Será que é a metade ou mais do que a metade?* *E necessário terminar os ramos. Você tem para isto uma tira, um esquadro, um compasso.*	*Um pinheirinho de Natal* *Terminar a figura* *É preciso terminar a metade ou mais do que a metade*

Figura 6. Construir um eixo de simetria para completar o contorno de uma figura simétrica
Fonte: elaborado pelo autor

3.2 Linguagem, ação e compreensão

É clássico, na literatura didática ou psicológica, opor globalmente a linguagem, à ação, ao pensamento e mesmo, simultaneamente, aos dois. E estas oposições gerais servem para justificar um esquema de organização de situações de *teaching/learning* tendo por objetivo “a construção de conceitos”: a ação precederia a linguagem para preparar a compreensão conceitual, isto é, a utilização da língua natural para dizer ou para expressar, pois a linguagem serviria não mais do que para comunicar o que se pensa ou o que se compreende. Não vamos nos alongar na inadequação de um tal esquema que aconteceu para analisar diferenças consideráveis que se pode observar entre as produções verbais dos alunos e a linguagem que o professor de matemática utiliza e espera dos alunos, pois as observações mostram um fosso entre as manipulações materiais e o trabalho sobre as figuras, e também entre as figuras e a compreensão das propriedades, assim como entre a expressão oral e expressão escrita. A verdadeira questão para o professor é: como iniciar os alunos nesta linguagem, ou de maneira menos vaga, como introduzir os alunos nas operações discursivas que ocorrem na linguagem matemática da geometria?

Piaget insistiu em dois pontos essenciais. Por um lado, na diferença entre as ações materiais que deixam um traço e as operações que não deixam nenhum traço, mas que são reversíveis. Assim, a superposição e a reversão, ao contrário da plissagem, são operações no espaço que não deixam traço algum. Por outro lado, na tomada de consciência das operações que apenas pode ser feita *por expressão da operação, ela mesma, e de seu resultado próprio*. Assim, o resultado da reversão por superposição está no fato de que os ramos do pinheirinho que estavam à direita na figura inicial se encontram à esquerda na figura reversa, e inversamente. *Ora, nas atividades propostas, o resultado que retinha a atenção era aquele da tarefa de construção*: completar os ramos faltantes do pinheirinho. A superposição apenas intervinha para a verificação do resultado – a coincidência dos contornos – independentemente do fato que ela resulte de uma operação de reversão 3D ou de translação 2D.

Para permitir uma transferência das manipulações materiais para as construções gráficas, é necessário *introduzir atividades de descrição oral espontânea*. O seu desafio é fazer com que os alunos expressem, com suas palavras, as observações matematicamente úteis resultantes das manipulações materiais. Por exemplo, os pontos que estavam à esquerda se encontram no lugar dos pontos que se encontravam, inicialmente, à direita, e reciprocamente. E isto mesmo antes de introduzir o trabalho sobre as figuras. Não pode haver transferência de manipulações de uma superfície que se plissa, reversa, superponha em construções gráficas sobre figuras 2D para resolver um mesmo problema, uma vez que *para alcançar na figura 2D o mesmo resultado com a operação 3D de reversão da transparência,* antes de superpô-la na figura 2D*, é necessário efetuar outras operações.*

Em seguida, é preciso uma atividade de verbalização que se faça ao nível da formulação de uma instrução, principalmente aquelas que exigem o emprego de um termo de relação entre duas unidades figurais. De fato, *entre a escrita e o oral a diferença não está somente no modo de produção, ela está igualmente em nível de explicitação e de precisão exigida*. A espontaneidade da palavra tende à reduzir os sintagmas e as proposições às palavras, omitindo as designações complexas e relacionais (figura 5), assim como a quantificação como Lew Vygotsky havia longamente explicado. Isto significa que a produção oral requer muito menos operações discursivas do que a produção escrita.

Para ilustrar esta atividade de verbalização intermediária entre dois níveis de explicitação, eu vou evocar *um efeito de observação feita em sala de aula*. Após cada sessão eu enviei um relatório escrito dos dados recolhidos. E, naturalmente, eu lhes pedi para participar pela primeira vez na organização em um documento. Retornei no ano seguinte para seguir as primeiras sessões correspondentes ao ciclo de ensino do ano precedente. O professor havia modificado tudo aquilo que dizia respeito à atividade de construção de mensagens. A primeira sessão foi inteiramente consagrada à *escrita de uma única instrução* na atividade de construção de um segmento perpendicular à um segmento dado. Os alunos deviam, a cada passo, formular uma instrução. A cada resposta ele reproduzia o traço correspondente ou possível à formulação dos alunos mesmo que o traçado ficasse fora da figura. Isto teve uma troca muito viva que fascinou muito os alunos e que tomou quase todo o tempo da sessão. Eu jamais tinha visto uma participação tão animada como nos dois anos precedentes. E, ao curso desta sessão, eu pude constatar a relevância da compreensão da palavra "perpendicular" como propriedade de uma unidade figural 2D e a tomada de consciência necessária para fazer com que a compreensão se inclinasse no sentido de uma relação entre duas unidades figurais 1D.

4. PLANO TEÓRICO DE FUNDO, DIDATICAMENTE AMBÍGUO E UNILATERAL, DA ORGANIZAÇÃO DE SEQUÊNCIAS DE ENSINO EM SALA DE AULA

Para analisar e compreender o sentido das trocas orais e das produções escritas recolhidas nas sessões de introdução da simetria axial, tornou-se necessário retornar às escolhas de diferentes atividades propostas e à sua organização em uma sequência didática.

4.1 A escolha dos tipos de atividades

Dois tipos de atividades foram selecionados. O primeiro consistiu em ações com suporte material de figuras não canonicamente euclidianas. O interesse nestas ações era para que elas fossem o suporte de duas *operações* 3D matematicamente importantes para a simetria axial: *a reversão* da transparência que inverte os lados, direito e esquerdo, do contorno da figura desenhada, e *a superposição* da figura revertida sobre a figura não revertida para verificar se os dois contornos coincidem ou não coincidem, isto é, se o contorno 2D permanece.

O segundo tipo de atividade nestas figuras era de natureza geométrica, pois as únicas operações utilizadas eram *operações* 2D de prolongamento de traços 1D, utilizando um instrumento. A originalidade da experiência de ensino portava essencialmente neste segundo tipo de atividade, na medida em que as atividades propostas visavam a apropriação da maneira de ver matemática, isto é, a desconstrução dimensional de formas 2D em configurações de unidades figurais 2D, 1D (Duval, 2005)[6]. Para isto, foi crucial, de um ponto de vista cognitivo, separar dois tipos de atividades distintas:

- que tratam da visualização geométrica, isto é, sobre a discriminação de todas as unidades visuais 2D, 1D, 0D que se pode ver sobre uma figura dada e sobre o reconhecimento rápido das configurações variadas às quais estas unidades figurais ocorrem;

- que concernem às grandezas e relações de grandezas (comprimentos, áreas) à comparar ou à calcular.

De um ponto de vista matemático, esta separação pode surpreender, pois as atividades geométricas propõem principalmente atividades de comparação qualitativa de comprimentos ou de áreas (maior, menor ou igual) ou de atividades no cálculo de comprimentos ou de áreas com o uso de fórmulas ou propriedades. Mas, na realidade, estas atividades legitimam a percepção imediata de tipos de contornos 2D, não permitem que se entre na maneira matemática de ver as figuras que é muitas vezes requerida para reconhecer uma fórmula ou propriedade à utilizar. Isto conduz inevitavelmente os alunos a ver figuras como objetos materiais nas quais se pode medir o comprimento dos lados, para decidir suas propriedades geométricas, e não como representações. Isto porque as tarefas que mobilizam a utilização de grandezas, a utilização da régua graduada ou de um quadriculado, foram excluídas das atividades selecionadas para introduzir a simetria axial.

[6] N. de Trad. Esse artigo foi traduzido do francês e se encontra disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/3332

4.2 A organização de diferentes tipos de atividades em uma sequência didática

A organização de uma sequência didática suscita duas questões: a primeira refere-se á *transferência* quando se passa de um tipo de atividade à outra. O que foi feito, bem-sucedido ou compreendido, em um primeiro tipo de atividade vai facilitar a compreensão dos procedimentos requeridos em um segundo tipo de atividade que mobiliza a mesma propriedade matemática? Assim, a introdução da simetria axial baseada na ideia de que as manipulações do suporte material de figuras (papel e transparência) preparariam os alunos para as atividades de novas construções traçadas sobre as figuras, inicialmente para verificar a presença ou ausência de um eixo de simetria, em seguida para encontrar um ponto simétrico de um outro ponto em relação ao eixo. Esta era a ideia de progressão evidente que se encontra em quase todas as teorias didáticas. As observações feitas no decorrer das sequências mostraram que este tipo de transferência, na aprendizagem, enfrentaria dois obstáculos maiores:

- os procedimentos utilizados nas atividades com figuras (operações 2D/2D) são radicalmente diferentes daqueles utilizados com objetos materiais (operações 3D/3D), pois as restrições dos instrumentos utilizados para construir traçados não são restrições físicas, nem do tipo dos dados levantados *in loco*, mas restrições relativas à propriedade matemática específica ao instrumento utilizado (alinhamento, curvatura constante, etc) ou pela instrução de um menu em um computador.

- as operações feitas em 3D/3D (plissagem, reversão, superposição) fortalecem o reconhecimento perceptivo dos contornos enquanto que as operações feitas em 2D/2D (completar uma figura com a adição de novos traçados) exigem que esqueçamos os contornos para que se focalize em todos os pontos remarcáveis 0D (vértices, pontos de intersecção).

Dito de outro modo, elas não se referem à mesma propriedade matemática, *as atividades em 3D/3D e as atividades 2D/2D não têm nada em comum nem nos procedimentos nem na maneira de serem mobilizados.* Não pode haver transferência direta e objetiva de ações feitas com objetos materiais àquelas feitas em figuras geométricas.

A segunda questão diz respeito à completude cognitiva das atividades propostas, em relação à diversidade dos sistemas de produção, físicos e semióticos que os alunos devem se apropriar e coordenar para fazer geometria. Todos os tipos de atividades requeridas para a tomada de consciência da propriedade matemática a adquirir e de suas possibilidades de utilização são consideradas? Deste modo, na experiência de introdução da simetria axial, a linguagem não era levada em conta. Ela correspondia à uma outra ideia dominante nas teorias didáticas: a formulação vem somente após uma fase de atividades destinadas a explorar, de maneira concreta, pois a conceitualização se desenvolve, primeiramente, com a ação. A linguagem não desempenharia nenhum papel essencial no desenvolvimento da conceitualização. Assim, a introdução dos termos matemáticos permitiria fixar o conhecimento de uma propriedade que já foi implicitamente mobilizada para ter sucesso em uma ação concreta ou para ter sucesso na construção de traços em uma figura. O emprego da linguagem para descrever, ou para efetuar um raciocínio, não deve mais, então, provocar maiores dificuldades para os alunos. As observações feitas, ao final das sessões, mostraram que as coisas não se passaram de modo algum desse jeito.

As manipulações 3D do suporte das figuras (plissagem ou reversão) não ajudaram os alunos a ver, na construção 2D traçadas a partir do contorno da figura, a correspondência dos pontos do contorno em relação a um eixo simétrico e sua transformação de um ponto em outro. Para descrever o que eles tinham feito e notado, os alunos não distinguiam os gestos concretos a efetuar e a operação geometricamente pertinente. Eles permaneciam focados no resultado da ação sem relacionar àquela operação já feita. Igualmente, as atividades de construção de figuras e de traços sobre figuras, não ajudaram os alunos a articular os termos das propriedades geométricas com as figuras. Eles empregavam o vocabulário geométrico da mesma maneira que associam palavras às imagens.

4.3 Como tomar consciência das rupturas e transferências entre ação, visualização e enunciados matemáticos? As verbalizações intermediárias

A importância das verbalizações intermediárias é devida à existência de uma verbalização implícita e espontânea, mais ou menos contínua e difusa como estes monólogos interiores que alguns romancistas têm procurado capturar. Poderia se falar de *verbalização silenciosa*, um pouco como se fala de “leitura silenciosa” para a leitura feita sem nenhuma oralização nem movimento dos alunos. A verbalização silenciosa se próxima da expressão oral espontânea de Vygotsky. A expressão oral espontânea explícita mais para o locutor do que para aquele que se endereça. *É esta verbalização silenciosa que* *comanda a gestão de toda atividade intencional e a compreensão daquilo que se obtém em ação*. Assim, por meio desta verbalização silenciosa, a linguagem não segue a ação, ela a acompanha permanentemente, permitindo, de cada vez, atingir o resultado e de antecipar o seu desenvolvimento. A verbalização silenciosa acompanha também a percepção, pois ela intervém no reconhecimento imediato do que se vê e se entende, por palavras implicitamente associadas e que se tornaram como o eco de identificação.

A verbalização silenciosa pode modificar-se apenas por meio de um trabalho de formulação explícita da atividade com a qual ela está em fase. É por isto que o objetivo da primeira verbalização intermediária é de que se evidencie a operação de reversão e de seu resultado (uma troca de posições, à direita e à esquerda de um eixo, de segmentos e de vértices de contorno) no lugar de se ter um resultado da atividade, quer dizer, da coincidência perceptiva dos contornos obtidos por superposição. Esta atividade de verbalização oral, para descrever a atividade concreta, é necessária porque vai contra esta verbalização silenciosa que comandou o trabalho dos alunos e que continua orientar sua compreensão e percepção numa outra direção. A verbalização oral permite uma tomada de consciência quando ela modifica uma primeira verbalização silenciosa e contra isto que ela conduz espontaneamente a dizer. A tomada de consciência da operação de reversão 3D é a condição cognitiva para que os alunos possam ver e identificar matematicamente os resultados de todo trabalho de construção de traçados que efetuaram sobre as figuras.

O objetivo da segunda verbalização intermediária é totalmente diferente. Trata-se de levar os alunos a tomarem consciência que em geometria as palavras não podem ser associadas diretamente à uma figura, do mesmo modo que para todos os objetos concretos que vemos. E geometria plana, uma palavra que designa uma propriedade corresponde sempre à uma relação entre duas unidades figurais 1D ou 2D e um termo que designa um objeto e que corresponde à uma configuração de unidades figurais consideradas nas suas relações respectivas duas a duas. Dito de outra maneira, uma só unidade figural não pode tornar visível uma propriedade ou um objeto geométrico, então é isto que se passa com as imagens ou os esquemas para objetos ou para relações espaciais com referências na realidade física. A tomada de consciência da maneira pela qual os termos geométricos se articulam com as figuras é condição cognitiva para que os alunos possam compreender enunciados matemáticos (definições, axiomas, teoremas etc.), frequentemente reduzidos, na comunicação oral, à uma palavra.

Para esta segunda verbalização intermediária, o recurso à uma produção escrita, e não somente oral torna-se necessária. A produção escrita revela, com efeito, dificuldades de compreensão que não podem aparecer na palavra, submetidas às restrições de brevidade e de alusão que são feitas na comunicação oral. A palavra procede por chaves lexicais sucessivas e cada ouvinte toma as palavras que o atinge em função de seu próprio campo de associações. As interações verbais em classe não escapam à estes limites cognitivos muito estreitos da expressão na comunicação oral.

A produção escrita apresenta também esta vantagem de remeter, cada aluno, *a produzir ele mesmo uma descrição, uma explicação ou uma justificativa e não somente entendê-la ou lê-la.* Pois há um fosso considerável entre estas duas situações e que não se deve confundir jamais quando se emprega o termo mais geral “linguagem”: se expressar por si mesmo ou, ao contrário, entender o que os outros dizem. Toda tomada de consciência passa, necessariamente, por atos de expressão pessoal, oral ou escrita. Em matemática, o nível de expressão oral depende da capacidade de produzir uma expressão escrita, inseparável da operação que se efetua e não o contrário.

4.4 Distinção de zonas de atividade a serem desenvolvidas e coordenadas na aquisição de conhecimentos em geometria

Pode-se resumir as observações e as análises precedentes no quadro a seguir:

	REALIDADE: Objetos físicos (2, 3)D/3D	Verbalização silenciosa à ser explicitada	Registro de FIGURAS: Unidades figurais nD/2D	Emprego de termos matemáticos	Registro DISCURSIVO: Propriedades e relações entre unidades figurais 2D, 1D, 0D
FORMAS 2D PERCEBIDAS E DE CONSTRUÇÃO DIMENSIONAL	Operações 3D Reversão e superposição	Dissociação e operação (transformação)	Operações 2D Prolongamento de traçados e busca de	Designação de relações entre duas unidades figurais	Encadeamento (de instruções ou de proposições)

(ASPECTO QUALITATIVO: INTUIÇÃO E RACIOCÍNIO)			alinhamentos		dupla designação, inferência
GRANDEZAS *(ASPECTO NUMÉRICO : MEDIDAS E CÁLCULOS)*	medidas de distâncias entre duas marcas		medidas dos lados de uma figura		FÓRMULAS em relação com propriedades

Figura 7. As zonas de atividades cognitivas mobilizadas em geometria**.**
Fonte: elaborado pelo autor

Pode-se observar que todos os tipos de atividades se dividem em três grandes zonas, cada uma dando lugar à uma aproximação diferente da geometria.

A primeira linha da divisão situa-se entre o aspecto qualitativo e numérico da atividade geométrica (figura 7, linhas 1 e 2). Ela leva a um outro modo de reformulação da questão, muito debatida há mais de um século, sobre a abordagem que se deve privilegiar para introduzir e ensinar a geometria. Esta oposição, que contorna o papel, central ou não, a ser dado à demonstração em geometria destinado a todos os alunos até a idade de 16 anos. Ao contrário, a separação entre o que é qualitativo e o que é numérico concerne às atividades geométricas, elas mesmas. Ela toca a questão, raramente posta, do papel crucial da visualização na aprendizagem matemática. É necessário introduzir, prioritariamente, atividades específicas de desconstrução dimensional, como na experiência que nós acabamos de evocar, ou será suficiente se deter no reconhecimento perceptivo das figuras euclidianas elementares sem separá-las das atividades de medida e de cálculo como é quase sempre é feito no ensino?

Sem querer terminar aqui a questão, nos contentaremos com duas observações. Em primeiro lugar, a visualização não é tão somente independente dos conceitos, como é a condição cognitiva pré-requerida de sua aquisição, pois a compreensão e a mobilização das propriedades geométricas implicam a desconstrução dimensional das formas 2D perceptivamente reconhecidas. Em segundo lugar, para se tornar capaz de resolver, sozinho, problemas em geometria e de maneira mais prática, *para reconhecer quando e como aplicar fórmulas para calcular grandezas (distância, área etc.) é necessário se apropriar desta maneira de ver as figuras.*

A segunda linha de divisão é trivial (Figura 7, colunas 1 e 2 e colunas 3 e 5). Ela opõe as manipulações feitas sobre um material com objetivo de observar invariâncias das formas e as leituras de distâncias de referências *in loco*, à todas as operações feitas que mobilizam registros de representação semiótica, isto é, por um lado transformar figuras para fins exploratórios e, por outro lado, encaixar enunciados em um programa de construção ou em um procedimento de prova, utilizar fórmulas. Dito de outro modo, *ela contraria as ações concretas da realidade circundante à diversidade de operações semióticas de visualização e de dedução que constituem a zona da atividade geométrica propriamente dita*. As dificuldades, que atrasam os alunos em geometria, à medida que avançam no currículo, vêm da maneira de ver a argumentar em geometria e que vão ao encontro daquelas espontaneamente praticadas por sujeitos fora do contexto da matemática.

A utilização da linguagem ocorre em todas as etapas de uma sequência de atividade numa abordagem qualitativa, e não somente numérica, da geometria. Mas, as modalidades de expressão, o vocabulário utilizado e o grau de explicitação requeridos variam consideravelmente de um tipo de atividade à outra (Figura 7, linha1, colunas 2, 4 e 5). Para a compreender, é necessário lembrar que a linguagem, por aquele que fala ou que escreve, não cumpre somente uma função social de comunicação, mas ela cumpre primeiramente funções cognitivas de:

- Tomada de consciência. Fala-se ou escreve-se para si com o objetivo de explicitar para si mesmo seja o que se faz ou que se pensa;

- Conceitualização. Coordena-se o que se percebe (um objeto real, uma representação produzida num outro registro) com uma palavra que a designa na sua generalidade, isto é, que coloca aquilo que se percebe em relação a todos os outros fenômenos ou todos as outras representações tendo um mesmo traço característico comum;

- Tratamento. A partir de definições e de axiomas, deduz-se enunciados que são verdadeiros independente de toda verificação empírica ou intuição. As etapas de demonstração portam, então em proposições que derivam de outras proposições e que se substitui assim umas às outras. Este tipo de produção na língua natural requer uma produção escrita que seja uma explicitação completa das operações discursivas de ligação e de substituição que provam uma conjectura (Duval, 2007).

A utilização da linguagem pode apenas cumprir estas funções cognitivas para aquele que está em posição de ter que dizer ou escrever. Ao contrário, para aquele que está em posição de ouvinte ou leitor ela cumpre apenas a função social, mais ou menos interativa, de comunicação.

Essa dualidade da linguagem, na palavra ou na escrita, e a relação dissimétrica que ela provoca quanto ao sentido do que é expresso tem duas consequências importantes para o ensino. Primeiramente, as atividades de verbalização favorecem, passo a passo, estas diferentes funções cognitivas que devem ser levadas em conta para o bom desenvolvimento de uma sequência didática. Assim, após a experiência, o professor remediava as insuficiências da sequência sobre a simetria propondo uma atividade de formulação de uma só instrução, pois se tratava de fazer descobrir que um termo de propriedade reenviava à uma relação entre duas unidades figurais 1D e não à forma de um só unidade figural 2D. A segunda consequência diz respeito à interpretação das interações verbais em classe. O que os alunos dizem deve primeiramente ser analisado em relação à função cognitiva de verbalização que a atividade em curso mobiliza e não em relação à formulação matemática que é visada como aquisição ao fim da sequência.

CONCLUSÃO

As pesquisas sobre o ensino da matemática são institucionalmente centradas na formação de professores. Elas privilegiam questões sobre as quais os professores devem reproduzir em sala para introduzir conhecimentos a serem adquiridos e fazer com que estes conhecimentos interessem aos alunos. Nessa perspectiva o eixo principal da pesquisa é a elaboração de sequências de atividades – "engenharias didáticas" - que devem permitir atender este objetivo *para cada uma das noções e dos procedimentos* já fixados por um programa de ensino, para um ano ou para um ciclo de ensino. Naturalmente, a escolha das atividades e sua organização em uma sequência didática não pode se fazer sobre exigências puramente matemáticas. É preciso levar em conta exigências não matemáticas e, mais, exigências que dizem respeito aos processos de aquisição dos conhecimentos e do funcionamento cognitivo do pensamento. E está lá a questão crucial que as pesquisas sobre o ensino da matemática são postas, *trata-se do funcionamento cognitivo do pensamento que a atividade matemática implica e mobilisa.* E isto é o mesmo do que espontaneamente acontece em outros domínios do conhecimento é profundamente diferente? Em outros termos, compreende-se e aprende-se matemática da mesma maneira como acontece com outras disciplinas ou será necessário apropriar-se de gestos intelectuais que são próprios aos matemáticos para poder compreendê-la?

Esta questão estabelece uma linha de divisão entre as teorias cognitivas escolhidas como quadro para elaborar sequências didáticas (Duval, 2012). Todas as teorias que se referem ao construtivismo piagetiano ou ao semio-pragmatismo de Peirce, por exemplo, postulam que os processos de aquisição dos conhecimentos são essencialmente os mesmos para a matemática e de outros domínios de conhecimento. Assim, como na experiência sobre a simetria axial, que acabamos de descrever o seu desenvolvimento, *postula-se uma transferência, mais ou menos espontânea*, de situações ou de manipulações concretas à representações como as figuras que seriam uma primeira matematização, depois de um trabalho sobre figuras para a formulação matemática ou simbólica da propriedade mobilizada por meio dessas diferentes atividades. Todas estas teorias parecem bem adaptadas à uma abordagem local do ensino de matemática, isto é, *uma abordagem inteiramente centrada nos conceitos a serem adquiridos progressivamente no tempo*. Mas, elas ignoram dois pontos fundamentais para o ensino de matemática endereçada a todos alunos do ensino fundamental ao médio, quer dizer, antes que o sistema de ensino comece a se diversificar e tornar especializado.

O primeiro ponto fundamental é o fato de que os matemáticos se deparam e continuam a se deparar com dificuldades sistemáticas e recorrentes de compreensão e de aprendizagem na grande maioria dos alunos. Ora, essas dificuldades, os alunos não as encontram em outras disciplinas! Este fato deve-se à situação epistemológica especial que tem a matemática. À diferença de outras disciplinas científicas, o modo de acesso aos objetos matemáticos, mesmo em geometria, não é jamais empírico, é semiótico, o que não quer dizer teórico. Isto quer dizer que a atividade matemática *exige que utilizemos, desenvolvamos e coordenemos muitos sistemas de representação semióticos* e, também a língua natural, mesmo que não sirva para calcular. O segundo ponto concerne à própria atividade matemática, que não consiste, inicialmente, na utilização de conceitos, de propriedades, de algoritmos, mas em uma maneira particular de ver, de definir, de designar, de passar de uma representação semiótica à outra para um mesmo objeto matemático etc. que é a condição cognitiva para poder compreender e utilizar os conceitos e algoritmos. Dito de outro modo, a atividade matemática é independente do conhecimento de conceitos, ela lhes é transversal, implica, por exemplo, na utilização não habitual da língua natural para designar as propriedades de uma figura, ou nas propriedades que devem ser imobilizadas em uma situação concreta, para demonstrar uma conjectura ou para justificar o emprego de um procedimento. Como os alunos podem descobrir, por eles mesmos, se isto não está explicitamente e especificamente cobrado na preparação do ensino?

As únicas teorias cognitivas pertinentes para entender a complexidade dos problemas de compreensão apresentados pela maioria dos alunos são aquelas que levam em conta, o que denominamos de "paradoxo cognitivo" da matemática. Elas evidenciam outros fenômenos, além desses que se observa em apenas uma turma, no quadro de um ensino que permanece totalmente focado em uma lista de conceitos e procedimentos a serem adquiridos de forma progressiva.

REFERENCIAS

DUVAL R., 2005. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n° 10, 5-53.

DUVAL R., 2007. Cognitive functioning and the understanding of the mathematical processes of proof. In (Ed. P. Boero) *Theorems in schools*, 137-161. Rotterdam/Tapei : Sense

DUVAL R., 2012. Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches sur l'enseignement des mathématiques ? *Praxis Educativa* Vol/ 7, N° 2, p. 305-330. http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa

DUVAL R., GODIN M., 2005. Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, n° 76, 7-27.