Artigo Original

REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ANÁLISE DO MODELO EPISTEMOLÓGICOS DOMINANTE PARA O ENSINO DE CÔNICAS EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Analysis Of The Dominant Epistemological Model For Teaching Conics In High School Textbooks

Thays de Souza BORGES
Universidade Federal do Pará - UFPA, Belém-PA, Brasil
thaysborges1994@gmail.com
https://orcid.org/ 0009-0002-8388-8035

Saddo Ag ALMOULOUD
Universidade Federal do Pará - UFPA, Belém-PA, Brasil
saddoag@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

José Messildo Viana NUNES
Universidade Federal do Pará - UFPA, Belém-PA, Brasil
messildo@ufpa.com.br
https://orcid.org/0000-0001-9492-4914

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo realizar uma investigação nos livros didáticos do ensino médio da rede pública paraense a fim de identificar o modelo epistemológico dominante na exposição do conteúdo de geometria analítica, em particular, o estudo da geometria das cônicas, tomando-se como referência a teoria antropológica do didático e o modelo epistemológico de referência desenvolvido por Benito (2019), em sua tese de doutorado. A metodologia adotada foi a pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico. A escolha dos livros se deu de acordo com a aquisição dos mesmos na rede pública e com base no Programa Nacional do Livro Didático (2020). Buscamos ainda, realizar um levantamento de estudos científicos, para compreender de que forma a aprendizagem das cônicas desenvolve-se no Ensino Médio. Em relação às análises realizadas, identificamos que apesar de haver uma distinção entre a predileção dos autores a respeito de qual geometria trabalhar no ensino e na aprendizagem de cônicas, a geometria analítica se sobressai em relação à geometria sintética. Conclui-se assim, que o conteúdo sobre as Cônicas, ainda recebe um tratamento muito algebrizado na educação básica.

Palavras-chave: Modelo Epistemológico De Referência, Teoria Antropológica Do Didático, Cônicas

ABSTRACT

The objective of this work is to carry out an investigation into high school books from public schools in Pará, in order to identify the dominant epistemological model in exposing the content of analytical geometry, in particular, the study of the geometry of conics, taking as a reference the anthropological theory of didactic and the reference epistemological models developed by Benito (2019), in his doctoral thesis, were used as reference. The adopted methodology was the bibliographical qualitative research. The choice of books was made according to their acquisition in the public network and based on the National Textbook Program (2020). We also seek to carry out a survey of scientific studies, to understand how the learning of conic figures develops in High School. Regarding the performed analyses, we identified that although there is a distinction between the authors' predilection regarding which geometry to work on teaching and learning conics, analytical geometry stands out in relation to synthetic geometry. It is thus concluded that the content on Conics still receives a very algebraic treatment in basic education.

Keywords: Epistemological Model Of Reference, Anthropological Theory Of Didactics, Conics

1 INTRODUÇÃO

Ao longo do tempo, pesquisadores e professores de matemática têm discutido quais são as melhores formas de ensinar e aprender tal disciplina, bem como as possíveis metodologias de ensino para as mais diversificadas áreas de conhecimento dela. Dentre suas vastas ramificações de ensino está o estudo de cônicas, relacionado com a Geometria Analítica.

> Para além das dimensões científica e tecnológica, a Matemática se consolida como fundamental componente da cultura geral do cidadão que pode ser observada na linguagem corrente, na imprensa, nas leis, na propaganda, nos jogos, nas brincadeiras e em muitas outras situações do cotidiano Miguel e Miorim. (2005, p. 378)

Diante disso, é inegável a presença da matemática no cotidiano das pessoas, assim como a presença de noções de cônicas nas práticas sociais, seja pelos seus aspectos físicos, que auxiliam no desenvolvimento das mais diversas áreas de conhecimento, a exemplo: as leis de Kepler na astronomia, os conceitos ópticos e acústicos, cujas propriedades refletoras das Cônicas atuam em objetos como espelhos, antenas parabólicas, ou seja, pelas suas propriedades estéticas, que geralmente são encontradas em pontes, torres e etc.

Devido à riqueza das suas conexões e à frequente presença no cotidiano, poderíamos supor que o ensino de cônicas ocorreria de modo simples e que resultaria em uma efetiva aprendizagem do estudante. Entretanto, investigações acerca do ensino e aprendizagem de Geometria Analítica revelam que o ensino de tal conteúdo é problemático, como aponta Andrade (2007):

> [...] escutamos dos alunos, inclusive daqueles que tinham desempenho satisfatório, o comentário de que esta [geometria analítica] era a parte da matemática mais complicada e difícil, ocasionando, como consequência, baixo rendimento por parte destes, do ponto de vista da avaliação somativa. (Andrade, 2007, p. 22)

Alguns pesquisadores, no âmbito da Educação Matemática, como Siqueira (2016) e Macena (2007) acreditam que este distanciamento de afinidade dos alunos com esta parte de conhecimento da matemática é uma consequência da formação precária dos docentes em particular sobre assuntos da geometria em geral, uma vez que a falta de preparo dos professores também se mostra como ponto determinante para gerar aversão pelo estudo da disciplina.

Por outro lado, existem também aqueles estudiosos como Oliveira (2011) e Jesus, Santos, Sousa e Queiroz (2017) que defendem a ideia de que a complexidade na compreensão e afinidade da disciplina se dá pelo fato de ela misturar mais de uma linguagem matemática, o que leva os alunos a um entrave de sua aprendizagem, uma vez que a incompreensão de qualquer uma delas se torna um fator dificultador da fluência de outros conteúdos matemáticos.

No que tange ao ensino, especificamente de Cônicas, Jesus et al. (2017) destacam que muitos alunos sentem dificuldade neste conhecimento matemático devido ao fato dele envolver mais de uma linguagem em seus conhecimentos, como por exemplo o da álgebra. Os autores também afirmam que:

> [...] As Cônicas pertencem à geometria analítica e esta, por sua vez, trabalha com geometria e álgebra, ou seja, nessa área da matemática são utilizados dois tipos de linguagem: a geométrica e algébrica. A confluência de duas ou mais linguagens dentro dos temas da matemática exige, por vezes, um grau de abstração e compreensão mais aprofundado, o que faz parecer aos olhos dos estudantes tratar- se de raciocínios complexos e quase inatingíveis. (Jesus et al, 2017, p. 4)

Sobe esse enfoque, torna-se pertinente refletirmos acerca do mediador e principal responsável por amenizar tais aflições dos alunos, o professor. Sabe-se que na vida profissional,sobretudo na prática docente, é comum o professor se deparar com conteúdo que não foram trabalhados de maneira consistente em seu período de formação inicial. Isso causa, muitas vezes, certa insegurança ao ter que lecionar futuramente este conteúdo aos seus alunos, e como consequência pode causar certa negligência no ensino ou até mesmo, como qualquer serhumano passivo de erro, equivocar-se em aspectos conceituais.

Para amenizar os aspectos negativos supracitados, faz-se necessário a utilização, por parte do professor, de práticas de ensino, que possuam potencial para auxiliar o aluno no seu processo de aprendizagem e ter a clareza de que precisa analisar de forma crítica a forma com que estão estruturados os materiais didáticos. Nesse sentido, na Teoria Antropológica do Didático (TAD) enfocam-se as organizações matemáticas (OM) e didáticas (OD) (Chevallard, 1999; Delgado, 2006). Tais organizações são frutos de modelos de referências que as conformam, assim consideramos necessário e oportuno por em pauta um estudo direcionado as OM e OD se apresentam em livros didáticos do ensino médio para descortine a forma de fazer e pensar que subjaz os livros e conformam as ações do professor em sala de aula.

2 TEORIA ANTROPOLÓGICO DO DIDÁTICO

A TAD fornece várias ferramentas analíticas para criação e críticas de OM e OD, como por exemplo, as organizações postas nos livros didáticos. Nesse aspecto, enfocaremos o Modelo Epistemológico de Referência (MER) e Modelo epistemológico dominante (MED) (Chevallard, 2009).

Para Benito (2019) o modelo epistemológico de referência se mostra como uma ferramenta de trabalho técnico-experimental, capaz de ser usado e ampliado de acordo com a necessidade da investigação, o autor ressalta ainda que:

> No âmbito da TAD, devemos ter uma referência epistemológica para nos guiar durante uma investigação em Educação Matemática e nos fornecer condições e princípios que nos permitem entender os fenômenos didáticos por uma perspectiva diferente daquela encontrada na literatura atual, muito mais suscetível de interferências humanas. Essa referência epistemológica é apresentada atualmente na TAD como Modelo Epistemológico de Referência (MER). (Benito, 2019, p. 53)

Em consonância com a assertiva supracitada Guadagnini e dias (2022) realizaram estudos pautando-se no desenvolvimento de um MER e do consequente questionamento do Modelo Epistemológico Dominante (MED) para o ensino de fatoração. Tanto o MER quanto o MED estão centrados no ensinar e aprender a fatoração, assim a construção de um MED depende da interpretação do MER, uma vez que o MED, ainda na opinião dos autores, mantém-se implícito, não sendo questionado e justificado explicitamente fazendo-se uso apenas de critérios genéricos do senso comum.

A respeito destes modelos de organizações (matemática e didática), presente no desenvolvimento de cada modelo (MER e MED) citado acima Bosch e Gascón (2010, p. 62) salientam que:

> Entre as organizações matemáticas escolares e as correspondentes organizações didáticas, podemos considerar modelos didáticos de referência que sejam, em primeira instância, específicos de um tema, de um setor, ou de um domínio da Matemática escolar. Porém, igualmente ao que se passa com o MER, a estrutura e a dinâmica dos citados MED devem ser coerentes com um modelo didático de referência geral, cuja descrição se formula no nível da disciplina (Matemática, neste caso).

Portanto, para descortinarmos o MED presente nos livros didáticos, por exemplo, daquelas utilizados na rede pública de ensino paraense a respeito do ensino de cônicas, torna-se de suma importância termos conhecimento de como as organizações didáticas se apresentam tomando como referência o MER, elaborado por Benito (2019), que serve de fundamento para a construção da presente pesquisa.

A vista disto torna-se oportuno aliarmos os conhecimentos abordados no MER de Benito (2019), com os materiais didáticos, mais utilizados em nosso estado, para que seja possível aprofundarmos nossos conhecimentos, a fim de obter clareza e compreensão acerca de quais os tipos de modelos epistemológicos encontram-se de forma dominante, nos livros didáticos, para o ensino de cônicas no ensino médio da rede publica paraense.

Almejando uma maior compreensão acerca dos modelos epistemológicos que perpassam o ensino e a aprendizagem das figuras cônicas bem como um maior entendimento do que, de fato, buscaremos em nossa investigação, explanaremos a seguir sobre o MER anunciado por Benito (2019).

2.1 Modelo epistemológico de referência para o ensino de cônicas

Benito (2019) desenvolveu um MER para o estudo das cónicas por meio de questões técnicas e teóricas. Das quais, segundo o autor as primeiras comtemplam as particularidades matemáticas presentes em cada modelo de geometria apresentado por ele. E as últimas, por sua vez, são aquelas que nortearam a construção do MER propriamente dito.

Em seus estudos, o autor subdividiu a geometria das cônicas em três modelos: *O modelo da geometria Sintética, analítica e por último, o modelo da geometria linear*. No entanto, abordaremos apenas os dois primeiros modelos citados, pois o modelo de geometria linear faz uma abordagem do conceito de cônicas em formato matricial, que só é visto em livros didáticos do nível superior que não é foco de nossa pesquisa.

2.1.1 O modelo da geometria sintética

O modelo da geometria sintética, é aquele que possibilita trabalhar as definições das cônicas de forma mais intuitiva e ilustrativa. Além, de ser possível abordar também conceitos, tanto no espaço como no plano, tal como: Reta diretriz, foco, eixos de simetria, excentricidade (Benito, 2019).

Para o desenvolvimento dessas ideias Benito (2019) buscou inicialmente o corte das cônicas realizado por Apolônio de Perga (262-190 a.C), cujos estudos abordavam diversos cortes cônicos realizados por um plano em um cone, por diferentes ângulos, onde cada corte se dava de forma diferentes do outro, surgindo também figuras geométricas distintas (Figura 1).

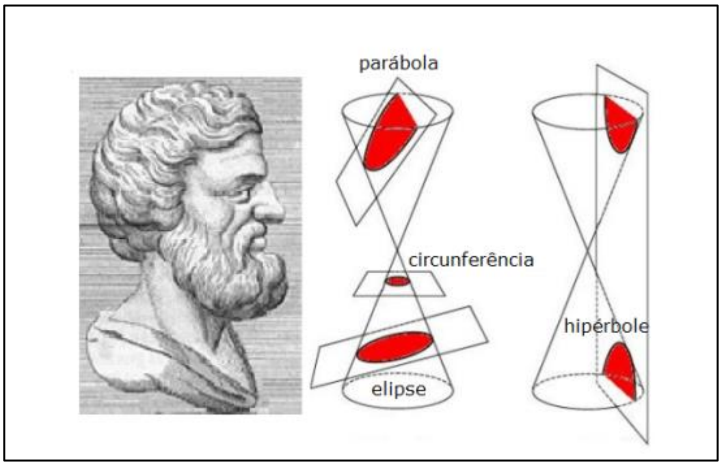


Figura 1: cônicas de acordo com Apolônio
Fonte: Lino (2018, p.13)

Segundo Benito (2019) nesta representação (Figura 1), baseada no corte das cônicas, Apolónio não conseguiu mostrar os principais elementos das referidas cuvas como: Focos, diretrizes e eixos focais. No entanto, o autor ressalta que foi possível perceber o trabalho da geometria sintética no espaço, bem como classificar o tipo de cônica encontrada, devido a descoberta da excentricidade

Com o passar dos anos e a evolução cientifica, estudiosos como Dandelin e Quételet, segundo Benito (2019), foram se aprimorando e aprofundando estes estudos e ao inscreveram esferas em um cone intercetado por um ou mais planos conseguiram determinar os elementos das cônicas (parábola, elipse e hipérbole) geradas por esta intersecção ainda por meio de cortes geométricos (Figura 2).

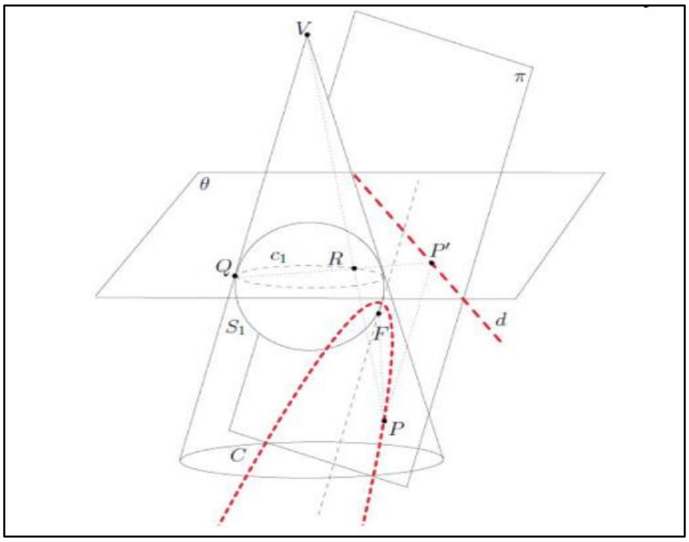


Figura 2: Parábola, foco, eixo de simetria e reta diretriz – construção de Dandelin
Fonte: Monteiro (2014, p. 12 apud Benito, 2019, p. 59)

Na figura 2 O ponto F representa o foco da parábola e sua diretriz d é a reta de interseção entre π e o plano θ, que corta o cone e contém a circunferência $C1$. Nessa situação é possível também determinar o eixo de simetria (ou eixo focal) da parábola na interseção de um terceiro plano, determinado pelo eixo central e o ponto F com o plano π.

Já nas figuras cônicas elipse e hipérbole o autor, destaca que a descoberta de seus elementos por Dandelin e Quételet ocorreu de forma semelhante, uma vez que a obtenção dos dois focos (F e F') se deu a partir de duas esferas inscritas em um cone e duas retas diretrizes (uma para cada foco) para cada uma destas cônicas.

Além do corte das cônicas, o autor aborda ainda, como parte integrante do modelo de geometria sintética, o ensino de cónicas por meio do conceito de lugar geométrico, e chama atenção do leitor para a relação existente entre lugar geométrico e excentricidade de uma cônica: Uma cônica é todo lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão entre as distâncias a um ponto fixo F e a uma reta fixa d é uma constante ε chamada de excentricidade.

Na sequência, Benito (2019) destaca que na geometria sintética, o conceito de lugar geométrico pode ser abordado de diversas formas que permitem a percepção visual do formato da cônica de maneira intuitiva e gradativa, além do desenvolvimento de um discurso por parte do aluno, que justifique a construção daquela figura como, por exemplo: As construções por dobraduras, por fio esticado (barbante), ou até mesmo meios com uma interação digital como o *software Geogebra*.

Ao fim da construção do modelo de geometria sintética, o pesquisador conclui que é perceptível que a noção de lugar geométrico se faz presente em quase todas as construções possíveis para abordar algum conceito de cônicas. Seja como representação do local em que passam as retas tangentes, seja para cumprir com determinado valor de excentricidade ou até mesmo como uma possível definição de cônicas a partir de distâncias como no problema de Pappus.

Para Benito (2019), o problema de Pappus permite aos estudantes uma reflexão a respeito da passagem do modelo da geometria sintética para o modelo da geometria analítica no estudo de cônicas, pelo fato de possibilitar o desenvolvimento de organizações em que esses modelos de geometria se complementem, pois o autor acredita que o estudo das cônicas não se dá por meio de uma única geometria, mas sim da mistura do conhecimento existente em cada uma delas, até que alcance inevitavelmente um completo desenvolvimento do conhecimento que circundam tal temática.

2.1.2 O modelo da geometria analítica

Benito (2019) descreve o modelo da geometria analítica como sendo a algebrização do primeiro modelo (geometria sintética), pois se apoiando nos estudos de Gascón (2002), o autor afirma que “são precisamente as limitações das técnicas sintéticas que dão sentido às técnicas analíticas”, isto é, esta geometria surge para suprir as insuficiências da geometria sintética (Benito, 2019, p. 81). Nas suas pesquisas o autor afirma ainda que, em relação ao ensino e aprendizagem de cônicas, este foi o modelo mais encontrado nos livros didáticos de matemática do ensino básico, tanto no estado de São Paulo quanto no estado de Sergipe.

Neste modelo, as cônicas são definidas como curvas que surgem em um plano cartesiano que representam graficamente uma equação polinomial do segundo grau em duas variáveis, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com os parâmetros A, B, C, D, E e F pertencentes ao conjunto dos números reais e com a condição de que $A^2 + C^2 \neq 0$, para garantir que a equação terá ao menos um termo de grau dois.

Portanto, a principal característica da geometria analítica, em um contexto que trate um corpo que se movimenta em uma trajetória em formato cônico, segundo o autor, é trabalhar com as distâncias, sejam elas descritas em plano cartesiano ou não, e utilizar-se usar-se de manipulações algébricas que leve ao estudante encontrar equações, de grau dois, que possibilitem encontrar elementos característicos das cônicas, inicialmente não fornecidos, a exemplo do foco e vértice.

O estudioso destaca ainda a existência de um importante sistema, utilizado nos dias atuais, que se utiliza do conceito de medições á distância para trabalhar localização de navios, chamado de SISTEMA LORAN.

O sistema LORAN pode identificar a distância de um navio por meio da emissão de ondas sonoras que partem de duas estações de rádios colocadas em pontos diferentes, o que gera uma distância constante entre as velocidades das ondas sonoras e o navio, possibilitando desta forma a identificação da localização do navio. O receptor LORAN do navio mede a diferença de tempo em que os sinais foram recebidos para então definir qual a variação constante, chamada de “s” como vemos na ilustração da Figura 3.

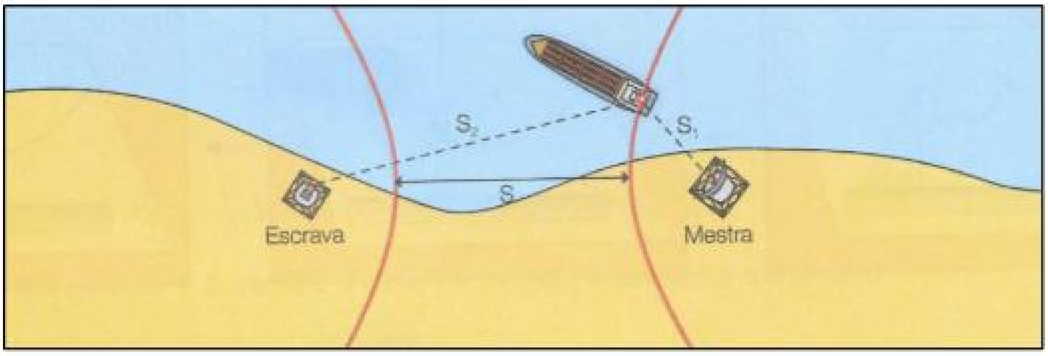


Figura 3: Ilustração do funcionamento do sistema LORAN e uma cônica (hipérbole)
Fonte: Souza e Garcia (2016b, p. 103)

A constante S, mostrada na Figura 3 é a diferenças entre as medidas de duas distâncias exatamente da mesma forma que utilizamos para definir uma hipérbole no plano a partir da noção de lugar geométrico. Desta forma, para que seja possível determinar a localização exata do navio é necessário aliar os conhecimentos acerca da figura cônica hipérbole e a tecnologia utilizada pelo sistema LORAN.

Uma segunda opção de abordagem da aprendizagem de cônicas pautada nos métodos propostos pela geometria analítica, descrita no MER do pesquisador, é a utilização do Geogebra, desde que, na visão de Benito (2019), seja estimulado dentro das atividades propostas ao aluno, a necessidade por parte do discente de introdução de um sistema referencial cartesiano no plano em que se encontra desenhada a cônica e o estimulo em trabalhar com fórmulas algébricas e conceitos de distâncias entre pontos pertencentes a cônica, necessários para se alcançar uma equação do tipo $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, como a fórmula da distância entre dois pontos.

Dando prosseguimento aos estudos propostos por essa pesquisa, analisaremos a diante quais os tipos de geometrias dominantes encontrados nos dois livros didáticos mais utilizados pelas Instituições Estaduais Públicas do ensino médio paraense.

3 ANÁLISE DO MED PRESNTE EM LIVROS DIDÁTICOS

Neste ítem, expenderemos o que há a respeito de cada cônica e de que forma elas estão expostas nas duas obras didáticas mais adquiridas pelo estado do Pará.

A investigação, de ambos os livros didáticos, se deu de forma eletrônica, uma vez que foi possível acessar todo o conteúdo das duas obras, no modo online e em formato pdf pelo site: www.edocente.com.br. Em ambas as coleções, o volume 3 - ensino médio foi o escolhido para análise, em virtude do conteúdo de cônicas ser abordado somente no Terceiro ano do ensino médio das escolas regulares de ensino.

A seguir, realizaremos a explanação acerca do livro (L1) intitulado “Matemática Ciência e Aplicações”.

3.1 Análise no livro didático (L1): matemática contexto e aplicações

No livro didático (L1), intitulado *Matemática Ciência e Aplicações*, mais precisamente no capitulo 4, onde encontra-se os conhecimentos acerca das cônicas – Elipse, Parábola e Hipérbole- Os autores iniciam o capítulo apoiando-se em uma breve representação geométrica, e na sequência, por meio de um sucinto apanhado histórico, mostram o surgimento e os cortes que dão origem a cada figura Cônica e afirmam que neste capitulo eles farão um estudo inicial da elipse, da hipérbole e da parábola, denominadas, juntamente com a circunferência de seções cônicas.

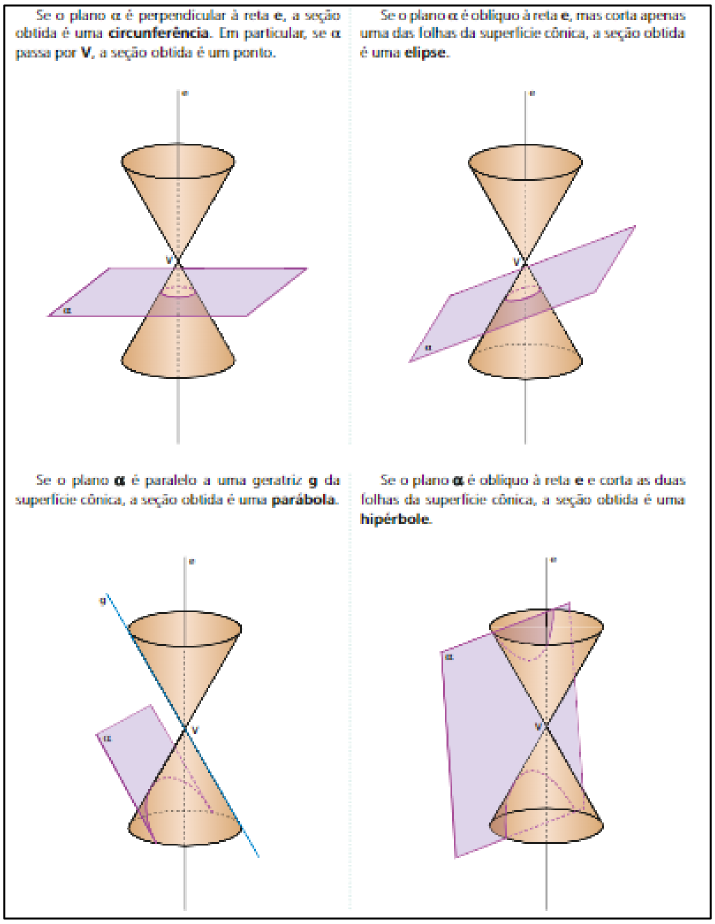


Figura 4: Representação dos cortes que deram origem a cada figura Cônica em (L1)

Fonte: Iezzi et al. (2016, p.88)

Após a ilustração do corte da cada Cônica (Figura 4), os autores abordam individualmente seus conceitos, e buscam familiarizar o aluno por meio da ilustração de objetos encontrados no cotidiano do discente, que tenha o formato da figura Cônica estudada naquele momento, assim como é feito nas abordagens realizadas por meio da geometria sintética. Buscam também destacar características matemáticas como seu conceito, por meio de respostas a perguntas do tipo: O que é? (os autores completam a pergunta com corte de cônica trabalhada). Por fim, abordam seus elementos principais e demonstram a equação reduzida da figura em questão, para então colocar exemplos resolvidos e propostos sobre o que foi aprendido até aquele momento.

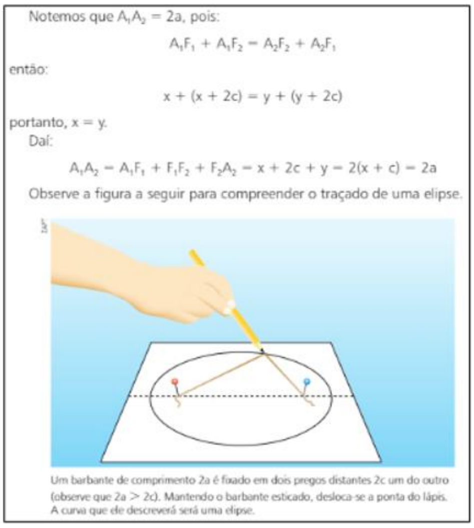
3.1.2 O estudo da elipse

O estudo da elipse se inicia por meio da ilustração de objetos e situações cotidianas onde a cônica é encontrada, como mostra a Figura 5.

Figura 5: Representação dos cortes que deram origem a cada figura Cônica em (L1)
Fonte: Iezzi et al. (2016, p.89)

Com base nos modelos de geometrias descritos por Benito (2019), é possivel afirmar que os autores do livro didático L1, utilizam-se do modelo de geometria sintética, apoiam-se em ferramentas didáticas que abordam o conceito de lugar geométrico, neste caso, o da figura cônica elipse, de maneira ilustrativa, sem deixar de abordar conceitos e condições importantes inerentes desta figura cônica.

Outra técnica abordada é o método de Kepler ou método do fio esticado como é popularmente conhecido, em que as extremidades do barbante são fixadas em dois pontos distintos de uma folha de papel e com o auxílio da ponta do lápis, estica-se o fio do basbante, movimenta-o para direita e para esquerda delimitando assim, os limites das possíveis marcações do lápis (Figura 6).



Notemos que $A_1A_2 = 2a$, pois:

$$A_1F_1 + A_1F_2 = A_2F_2 + A_2F_1$$

então:

$$x + (x + 2c) = y + (y + 2c)$$

portanto, $x = y$.

Daí:

$$A_1A_2 = A_1F_1 + F_1F_2 + F_2A_2 = x + 2c + y = 2(x + c) = 2a$$

Observe a figura a seguir para compreender o traçado de uma elipse.

Um barbante de comprimento 2a é fixado em dois pregos distantes 2c um do outro (observe que 2a > 2c). Mantendo o barbante esticado, desloca-se a ponta do lápis. A curva que ele descreverá será uma elipse.

Figura 6: Representação dos conceitos matemáticos da cônica elipse em (L1)
Fonte: Iezzi et al. (2016, p.90)

Com tal experimento oriundo da geometria sintética, é possível ilustrar de maneira prática que a soma das distâncias de um ponto qualquer até os pontos fixos, será sempre um valor constante, denominado pelos autores de (L1) de 2a. Além disso, com essa abordagem os autores permitem que seus estudantes percebam que a curva descrita pela união de todos os pontos que atendem tal condição forma, por sua vez, a figura cônica elipse.

Na sequência, é possível ver, por meio da Figura 6, que os autores de (L1) passam a conceituar cada elemento pertencente a elipse e destaca a importância da relação existente entre esses elementos com a explanação do triângulo retângulo, o qual leva a aplicação do Teorema de Pitágoras (Figura 7).

Elementos principais

F_1 e **F_2**: focos

O: centro

$\overline{A_1A_2}$: eixo maior

$\overline{B_1B_2}$: eixo menor

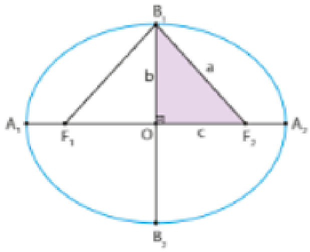
$\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ são perpendiculares entre si

2c: distância focal

2a: medida do eixo maior

2b: medida do eixo menor

$\frac{c}{a}$: excentricidade (*)



(*) Veja, na seção *Aplicações* das páginas 96 e 97, o infográfico "As órbitas dos planetas".

Numa elipse, a medida do semieixo maior **a**, a medida do semieixo menor **b** e a metade da distância focal **c** verificam a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

que decorre do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo OF_2B_1.

Figura 7: Representação dos elementos principais da figura Cônica Elipse em (L1)
Fonte: Iezzi et al. (2016, p.90)

Após especificar cada elemento da elipse, os autores ilustram, geometricamente, a forma que seus elementos se comportam no sistema cartesiano, apoiam-se nesse pensamento geométrico para desenvolver algebricamente, a construção da equação reduzida da elipse, pautando-se na posição em que seu eixo maior se encontra, uma vez que se tem como parâmetro de posicionamento o eixo das abcissas (x) e das ordenadas. (y). Caracteriza-se, neste momento, uma abordagem metodológica pautada na geometria analítica descrita por Benito (2019) como vemos na Figura 8.

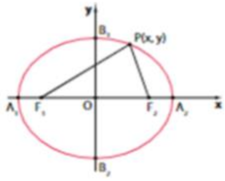
Equação reduzida (I)

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que:

$\overline{A_1A_2} \subset Ox$ e $\overline{B_1B_2} \subset Oy$

É fácil verificar que os focos são os pontos:

$F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$



Chama-se **equação reduzida da elipse** a equação que o ponto genérico da curva, P(x, y), verifica.

$$P \in \text{elipse} \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$$

Vamos deduzi-la.

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado e desenvolvendo, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando os dois membros ao quadrado novamente, temos:

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

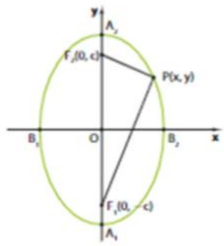
e, dividindo os dois membros da igualdade por a^2b^2, resulta:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equação reduzida (II)

Analogamente, se a elipse apresenta $\overline{A_1A_2} \subset Oy$ e $\overline{B_1B_2} \subset Ox$, temos:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = 2a$$



e, repetindo o raciocínio anterior, decorre novamente a equação da elipse:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Figura 8: Representação da equação reduzida da figura Cônica Elipse em (L1)
Fonte: Iezzi et al (2016, p 91-92)

Posterior a esta primeira parte ilustrada, os autores propõem 2 (duas) tarefas exemplificadas e 10 (dez) para serem resolvidas. As questões exemplificadas em L1 possuíam tarefas similares, mudando somente os valores, e, em ambas as questões exigem somente conhecimentos da geometria analítica. No entanto, apesar de ambas as questões escolhidas tratarem de conhecimentos matemáticos presentes na geometria analítica, nota-se que não foi exigido do aluno os mesmos níveis de dificuldade dos conhecimentos acerca desta geometria, que foram exigidos na questão (equação reduzida I). Uma vez que, no exercício exemplificado, não é cobrado o conhecimento de resolução de sistema linear, nem o conceito de equação Biquadrada. Portanto, nota-se uma relevante diferença entre o exemplo proposto pelos autores e os exercícios propostos para serem realizados pelos alunos, umavez que o segundo utiliza-se de outros conceitos matemáticos não abordados neste capítulo para a resolução da mesma, fato este, que de acordo com os estudos aqui levantados por Jesus et al. (2017) pode acarretar em um entrave na aprendizagem do discente.

Após a investigação realizada, foi possível perceber que os autores de L1 priorizam a geometria sintética, na abordagem da cônica elipse, pois a utilizam em diversos momentos como: Ao introduzir o conceito da cônica, nos aspectos de construção ponto a ponto e no reforço de sua construção de forma intuitiva pelo método do fio esticado, para enfatizar a construção de conceitos pertencentes a mesma, enquanto fazem uso das ferramentas metodológicas presentes na geometria analítica para desenvolver as ideias pertencentes as equações reduzidas , presente na maioria dos exercícios propostos aos alunos.

A seguir, realizaremos a investigação acerca da cônica Hipérbole em (L1)

3.1.3 Estudo da hipérbole

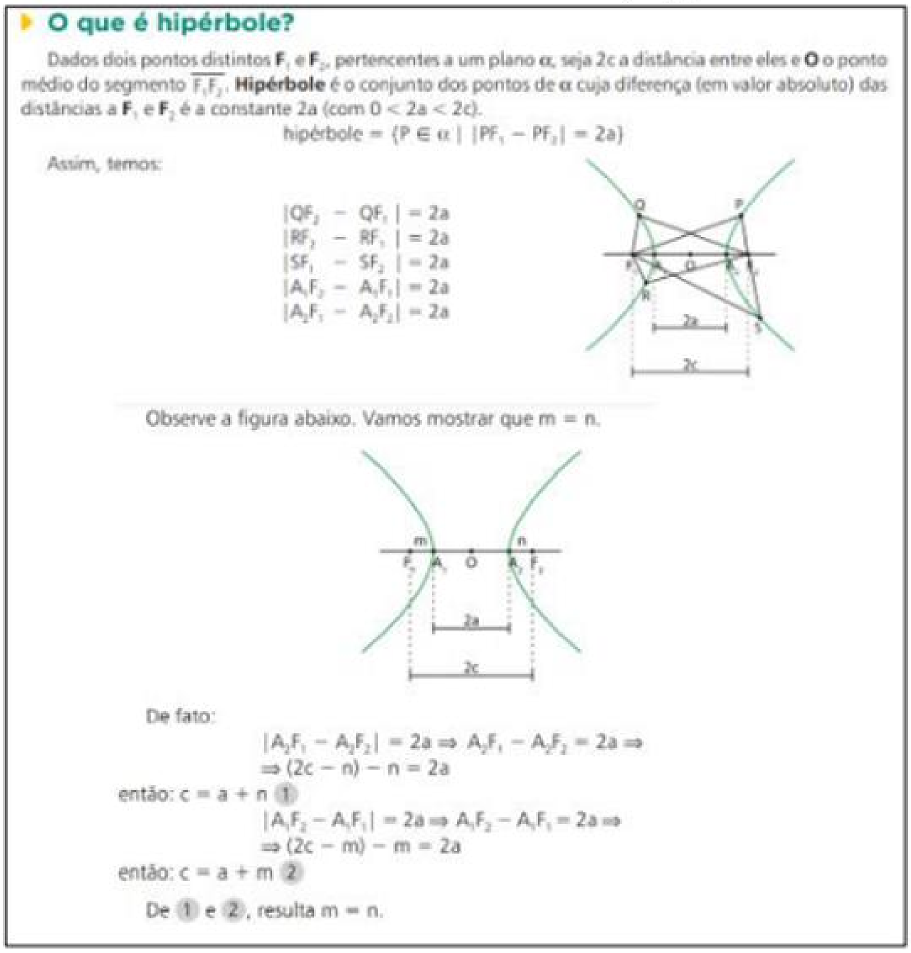
Assim como no estudo anterior, os autores inicialmente mostram ilustrações de objetos encontrados no cotidiano do discente que tenham o formato da Cônica estudada, como mostra a Figura 9. Em seguida, destaca características matemáticas como: Conceito (figura 24), elementos (figura 25) e demonstra a equação reduzida da hipérbole.

Figura 9: Representação da figura Cônica hipérbole encontrada no cotidiano do aluno em (L1)
Fonte: Iezzi et al. (2016, p.98)

Apesar de inciar seus estudos por meio da geometria sintética, ilustrando objetos e construções que tenham o formato cônico da hipérbole, como ja havia feito na figura anterior, foi possível notar que, os autores de L1, abandonam a ideia de utilizar o método de kepler ou método do fio esticada para realizarem a abordagem inicial dos elementos da figura cônica hipérbole.

No entando, optam desta vez, por uma representação geométrica mais direta cujo objetivo é fazer o aluno perceber que fixados dois pontos distintos, F1 e F2 de um plano, a hipérbole pode ser definida como o conjunto de pontos desse plano cuja diferença, em módulo, das distâncias de cada um deles até F1 e F2 seja um valor constante menor que a distância existente entre F1F2, focando assim em uma desenvolvimento mais algébrico característico do geometria analítica descrita por Benito (2019).

Em seguida, os autores fazem a explanação dos principais elementos de uma hipérbole como é possível ver na ilustração da Figura 10.



O que é hipérbole?

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja $2c$ a distância entre eles e **O** o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. **Hipérbole** é o conjunto dos pontos de α cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (com $0 < 2a < 2c$).

$$\text{hipérbole} = \{P \in \alpha \mid |PF_1 - PF_2| = 2a\}$$

Assim, temos:

$$|QF_2 - QF_1| = 2a$$
$$|RF_1 - RF_1| = 2a$$
$$|SF_1 - SF_2| = 2a$$
$$|A_1F_2 - A_1F_1| = 2a$$
$$|A_2F_1 - A_2F_2| = 2a$$

Observe a figura abaixo. Vamos mostrar que $m = n$.

De fato:

$$|A_2F_1 - A_2F_2| = 2a \Rightarrow A_2F_1 - A_2F_2 = 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2c - n) - n = 2a$$

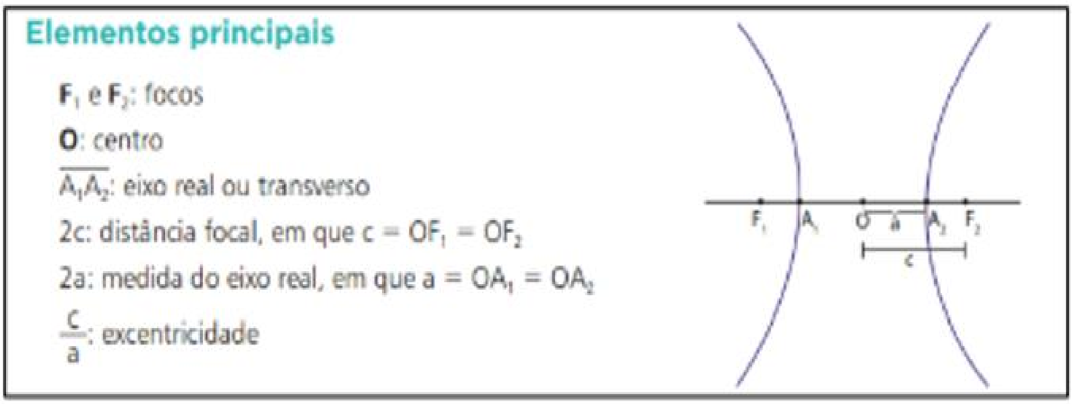
então: $c = a + n$ (1)

$$|A_1F_2 - A_1F_1| = 2a \Rightarrow A_1F_2 - A_1F_1 = 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2c - m) - m = 2a$$

então: $c = a + m$ (2)

De (1) e (2), resulta $m = n$.

Figura 10: Ilustração dos conceitos matemáticos da figura Cônica hipérbole em (L1)
Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 98)



Elementos principais

F_1 e F_2: focos

O: centro

$\overline{A_1A_2}$: eixo real ou transverso

$2c$: distância focal, em que $c = OF_1 = OF_2$

$2a$: medida do eixo real, em que $a = OA_1 = OA_2$

$\frac{c}{a}$: excentricidade

Figura 11: Ilustração dos elementos principais da figura Cônica Hipérbole em (L1)
Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 99)

Na sequêcia, os autores de L1 descrevem a forma representativa da equação reduzida da Hipérbole, em que apresentam, pela primeira vez, o conceito de eixo imaginário aos seus estudantes, e ressaltam que o objetivo de tal “ferramenta” metodologica é identificar se o eixo real encontra-se na reta das ordenadas ou das abscissas como mostra a Figura 11.

Equação reduzida (I)

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que $\overline{F_1F_2}$ esteja contido no eixo **x** e a reta perpendicular a esse segmento, passando por **O** (ponto médio de $\overline{F_1F_2}$) seja o eixo **y**. O eixo real é $\overline{A_1A_2}$ e sua medida é 2a. Os focos são os pontos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

$$P \in \text{hipérbole} \Leftrightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a$$

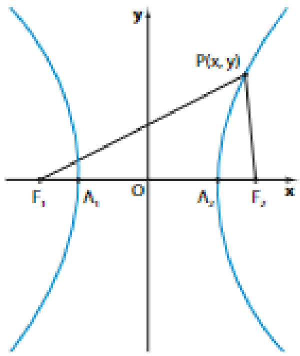


Figura 12: Ilustração da equação reduzida da figura Cônica Hipérbole em I- (L1)
Fonte: Iezzi et al (2016, p.99)

Chama-se **equação reduzida da hipérbole** a equação que o ponto genérico da hipérbole, P(x, y), verifica.

Vamos deduzi-la:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Elevando os dois membros ao quadrado e desenvolvendo, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado novamente, temos:

$$(cx - a^2)^2 = a^2 \cdot (x-c)^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Chamando $c^2 - a^2 = b^2$ (observe que $a < c \Rightarrow c^2 - a^2 > 0$), temos que:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

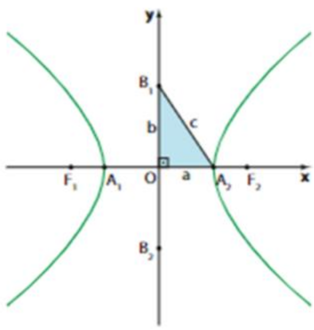
Dividindo membro a membro por a^2b^2, resulta na equação reduzida da hipérbole:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Observe que, se $x = 0$, temos:

$$\frac{0}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = -1 \Rightarrow y^2 = -b^2$$

Como $b \in \mathbb{R}_+^*$, temos que $y \notin \mathbb{R}$. Desse modo, não há pontos em comum entre a hipérbole e o eixo **y**. Os pontos $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$ não pertencem à hipérbole mas determinam o segmento $\overline{B_1B_2}$ de medida 2b, que é chamado **eixo imaginário da hipérbole**.



$\overline{B_1B_2}$: eixo imaginário

$B_1B_2 = 2b$: medida do eixo imaginário

Relação notável: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

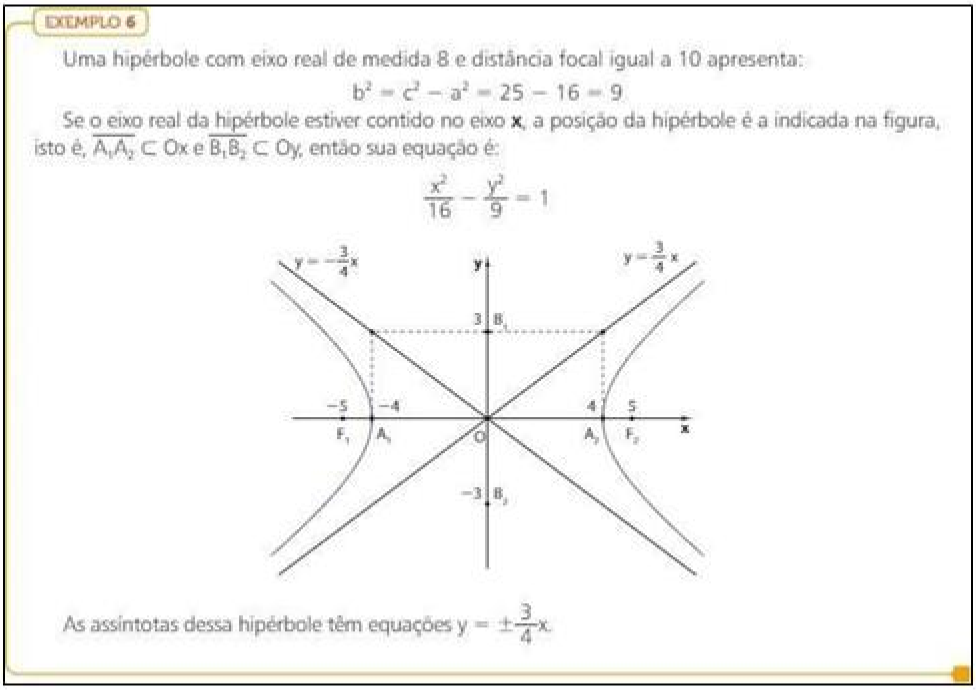
Figura 13: Ilustração da equação reduzida da figura Cônica Hipérbole em (L1)
Fonte: Iezzi et al (2016, p.100)

A partir dos conceitos apresentados, os autores devem explorar, novamente, a ideia de representação do triângulo retângulo no sistema cartesiano e, assim, resulta na aplicação do Teorema de Pitágoras como ferramenta para evidenciar, a relação existente entre esses elementos para o desenvolvimento da equação reduzida da Hipérbole, caracterizando desta maneira, mais uma vez o uso dos conceitos da geometria analítica como base de sua metodologia.

Na continuidade dos estudos das equações da hipérbole, os autores expõem a respeito das retas assíntotas, sobre as quais, eles esclarecem: Servem de suporte para o cálculo do coeficiente angular formado entre a referida reta e o eixo real.

Posto isso, foram expostas 2 questões exemplos similares, cujo a tarefa deambas consiste “ representar a equação das assíntotas" com centro na origem. Além disso, foram estabelecidos 6 exercícios propostos com tarefas diversificadasacerca do assunto tratado até aqui.

A seguir (Figura 14) apresentaremos a questão exemplo referente a Cônica Hipérbole em L1.



EXEMPLO 6

Uma hipérbole com eixo real de medida 8 e distância focal igual a 10 apresenta:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$$

Se o eixo real da hipérbole estiver contido no eixo **x**, a posição da hipérbole é a indicada na figura, isto é, $\overline{A_1A_2} \subset Ox$ e $\overline{B_1B_2} \subset Oy$, então sua equação é:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

As assíntotas dessa hipérbole têm equações $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Fonte: Iezzi et al (2016, p.104)

Figura14: Questão exemplo (Q3) de L

Esse exercício resolvido foi dado logo após o autor destacar os principais elementos da Hipérbole, chamando atenção do leitor para as assíntotas,bem como mostrar a equação reduzida da figura cônica em questão. Como as duas questões propostas em L1 propunham a mesma tarefa, mudando apenas seus valores, escolhemos Q3 para realizar a análise:

Em seguida mostraremos (Figura 15) o exercício proposto P3 referente a figura cônica Hipérbole no L1:

22 Determine as coordenadas dos focos da hipérbole cuja equação é $3x^2 - y^2 = 300$.

Fonte: Iezzi et al (2016, p.103)

Figura 15: Exercício Proposto (P3) de L1

Na Figura 16, destacaremos a resolução do exercício proposto P4, presente em L1.

22-

$3x^2 - y^2 = 300 \quad (\div 300)$

$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{300} = 1$

Então,

$a^2 = 100 \quad e \quad b^2 = 300$

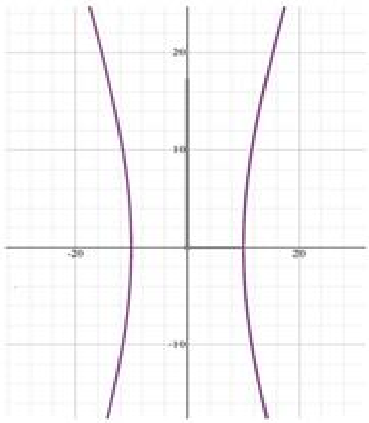
Portanto, c é:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 100 + 300$

$c^2 = 400$

$c = 20$



Já que a Hipérbole tem centro na origem e seu eixo real encontra-se na abscissa, então os focos são:

$(-20, 0) \quad e \quad (20, 0)$

Fonte: Autor

Figura 16: Resolução do Exercício Proposto (P3) de L1

A questão ilustrada na Figura 16, foi escolhida por se tratar de uma tarefa diferente do que foi exposto inicialmente para o aluno na Questão Exemplo (Q3), a fim de entender se somente com o conhecimento que foi ensinado ao aluno por intermédio do livro didático (L1) seria o suficiente para que ele resolvesse oexercício proposto a ele.

Ao fim desta análise realizada, foi possível aferir que os autores de L1, no que diz respeito a abordagem da cônica hipérbole, os autores utilizaram somente a geometria analítica como abordagem para propor uma forma de ensinar aos estudantes, os conceitos pertencentes a mesma, a geometria sintética foi utilizada unicamente no início da abordagem e de maneira ilustrativa ao exemplificar os objetos que se encontram no formato da figura cônica Hipérbole e na ilustração ponto a ponto.

Após as análises da questão proposta P3, percebemos que, apesar de seruma tarefa diferente da exemplificada pelos autores, o nível de conhecimento exigido ao aluno está de acordo com o que é ensinado, através do L1, para o mesmo. Uma vez que, tanto as questões exemplificadas quanto aos exercícios propostos, apoiam se na geometria analítica e apresentam o mesmo grau de dificuldade em relação aos conceitos matemáticos desta geometria, necessários para a sua resolução.

A seguir, realizaremos a investigação acerca da cônica Parábola em (L1)

3.1.4 E da parábola

Assim como nas cônicas anteriormente abordadas no livro didático, os autores iniciam os estudos desta cônica por meio da ilustração de objetos encontrados no cotidiano do discente, que tenham configurações cônicas (Figuras 17 e 18), além de destacarem também características matemáticas como: Conceitos (Figura 19), elementos (Figura 20) e, posteriormente, calculam a equação reduzida da parábola, em seguida finalizam a abordagem a esta figura cônica, ao associar a Parábola com o estudo de equação quadrática.

Parábola

A curva que descreve, por exemplo, o movimento de uma bala lançada por um canhão é chamada parábola.

O movimento com trajetória parabólica já era estudado por Galileu Galilei no século XVI. Observe abaixo uma ilustração elaborada por esse cientista.

Gravura que mostra trajetórias parabólicas de balas de canhão. Os números, próximos a cada parábola, indicam a inclinação do canhão em relação à direção horizontal.

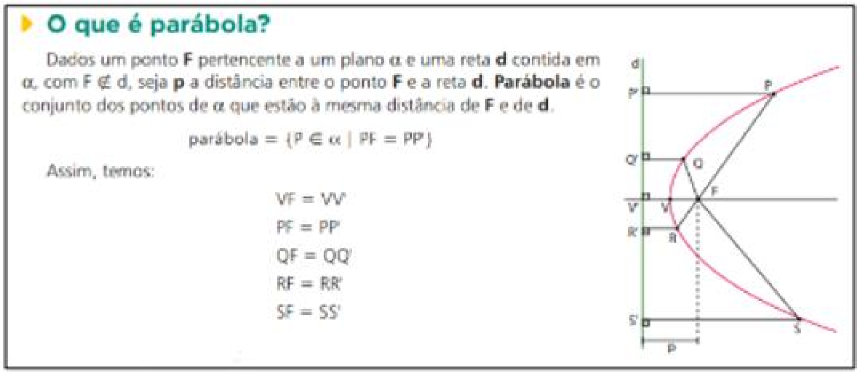
Figura 17: Registros da figura Cônica Parábola encontrada no cotidiano do aluno (I) em (L1).
Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 106)

As fotos seguintes mostram cartões-postais de duas cidades brasileiras. Na primeira, vemos as fontes de água do parque do Ibirapuera, em São Paulo. Na segunda, a ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília.

Lago do parque do Ibirapuera, São Paulo (SP), em 2012.

Ponte Juscelino Kubitschek, Brasília (DF), em 2010.

Figura 18: Registros da figura Cônica Parábola encontrada no cotidiano do aluno (II) em L1
Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 107)



O que é parábola?

Dados um ponto **F** pertencente a um plano α e uma reta **d** contida em α, com $F \notin d$, seja **p** a distância entre o ponto **F** e a reta **d**. **Parábola** é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de **F** e de **d**.

$$\text{parábola} = \{P \in \alpha \mid PF = PP'\}$$

Assim, temos:

$VF = VV'$
$PF = PP'$
$QF = QQ'$
$RF = RR'$
$SF = SS'$

Figura 19: Representação dos conceitos matemáticos da figura Cônica Parábola em L1
Fonte: Iezzi et al. (2016, p.107)

Os autores apoiam-se, inicialmente, na geometria sintética para ilustrar ao leitor que a Parábola é formada por um conjunto de pontos os quais equidistam a uma mesma distância de um ponto F e uma reta d. Portanto, nesse momento o autor faz uso da geometria sintética como ferramenta para o ensino desses conceitos. Em seguida, eles nomeiam cada elemento ressaltado no gráfico (Figura 20).

Elementos principais

F: foco
d: diretriz
p: parâmetro
V: vértice
$\overline{VF}$: eixo de simetria (é a reta que passa por **F** e é perpendicular à diretriz)

Relação notável: $VF = \frac{p}{2}$, pois VF = VV'.

Fonte: Iezzi et al (2016, p.107)

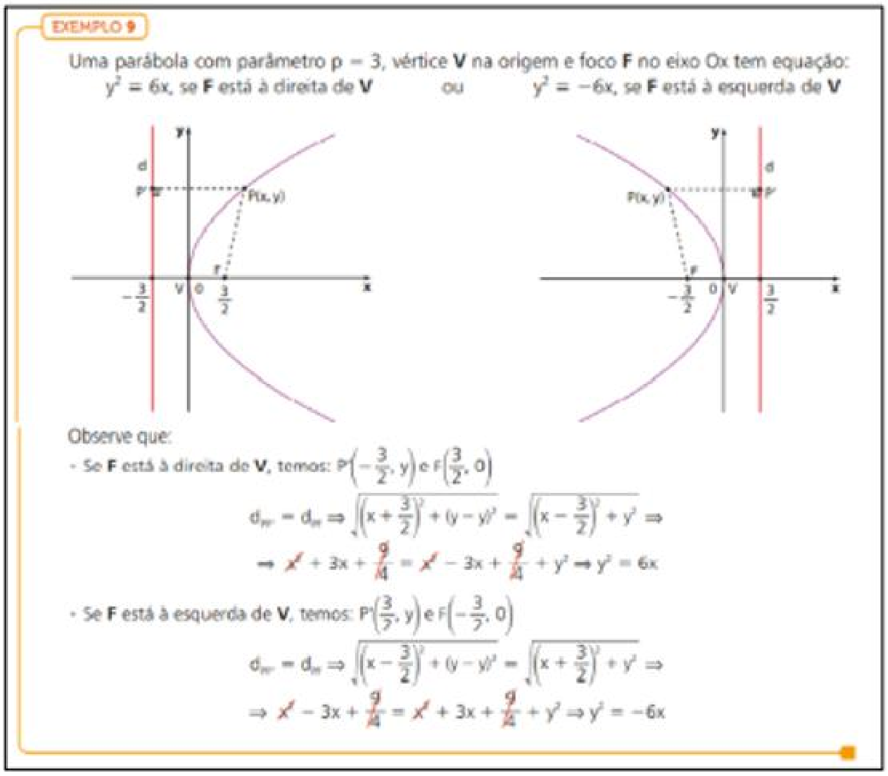
Figura 20: Descrição dos elementos principais da figura Cônica Parábola em L1

A partir da relação existente entre os elementos, foi possível identificar uma relação notável entre o vértice e o foco da parábola com a medida do parâmetro, a qual, em seguida, será aplicada para determinar a equação da reta diretriz d. Além disso, a mesma relação torna-se fundamental no desenvolvimento da equação reduzida da parábola.

Diante do exposto, os autores, por meio da geometria analítica, apresentam ao estudante e ao professor, o foco como elemento principal responsável pela forma de representação no sistema cartesiano. Destacando dois casos com vértice na origem:

1. Quando o foco pertence ao eixo das abscissas (x).
2. Quando o foco pertence ao eixo das ordenadas (y)

Em seguida, apresentam 2 questões exemplos similares para representar visualmente os casos destacados anteriormente.



EXEMPLO 9

Uma parábola com parâmetro $p = 3$, vértice **V** na origem e foco **F** no eixo Ox tem equação:
$y^2 = 6x$, se **F** está à direita de **V** ou $y^2 = -6x$, se **F** está à esquerda de **V**

Observe que:

- Se **F** está à direita de **V**, temos: $P'\left(-\frac{3}{2}, y\right)$ e $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$$d_{PP'} = d_{PF} \Rightarrow \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cancel{x^2} + 3x + \cancel{\frac{9}{4}} = \cancel{x^2} - 3x + \cancel{\frac{9}{4}} + y^2 \Rightarrow y^2 = 6x$$

- Se **F** está à esquerda de **V**, temos: $P'\left(\frac{3}{2}, y\right)$ e $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

$$d_{PP'} = d_{PF} \Rightarrow \sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cancel{x^2} - 3x + \cancel{\frac{9}{4}} = \cancel{x^2} + 3x + \cancel{\frac{9}{4}} + y^2 \Rightarrow y^2 = -6x$$

Figura 21: Questão Exemplo: Quando o foco pertence ao eixo das abscissas (x).
Fonte: Iezzi et al. (2016, p.109)

Este exercício resolvido foi dado logo após o autor destacar a equação reduzida da Hipérbole, bem como mostrar a equação reduzida da figura Cônica em questão.

A seguir apresentaremos o exercício Proposto referente a figura Cônica *Parábola* no L1:

29 Qual é a equação da diretriz da parábola de equação $2x^2 - 7y = 0$?

Fonte: Iezzi et al (2016, p.109)

Figura 22: Exercício Proposto (P5) de L1

Na figura 23, apresentaremos a resolução do exercício proposto P5presente em L1.

29- $2x^2 - 7y = 0$ $2x^2 = 7y$ $x^2 = \frac{7}{2}y$ Então, $2p = \frac{7}{2}$ $p = \frac{7}{4}$	A diretriz é uma reta horizontal de equação: $y = -\frac{p}{2}$ $y = -\frac{\frac{7}{4}}{2}$ $y = -\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2}$ $y = -\frac{7}{8}$

Fonte: autor

Figura 23: Resolução do Exercício Proposto (P5) de L1

A questão ilustrada na figura 23 foi escolhida por se tratar de uma tarefa diferente do que foi exposto inicialmente para o aluno na questão exemplo (Q5). De modo a entender se somente com o conhecimento que foi ensinado ao aluno através do livro didático (L1) seria o suficiente para que o aluno resolvesse o exercício proposto a ele.

Apesar da diferença entre as tarefas solicitadas na questão (Q5) e no exercício (P5), o L1 permite ao aluno aquisição de conhecimento da geometria sintética suficiente para o desenvolvimento da atividade. Uma vez que a mesma exige um embasamento teórico presente no conteúdo abordado até então.

Dando sequência aos estudos conceituais da Parábola, os autores abordam a equação reduzida dessa da parábola com o seu vértice fora da origem. Assim como a abordagem realizada na equação com o vértice na origem, os autores buscam exemplificar os casos na intenção de complementar a forma com que a parábola pode ser representada graficamente e neste momento fazem uso do aplicativo de cunho matemático *Geogebra*, com o intuito de chegar a forma algébrica da equação desta cônica, caracterizando assim mais uma vez, o uso da geometria analítica como forma principal de apoio didático no desenvolvimento cognitivo matemático abordado como apresentamos na Figura 24:

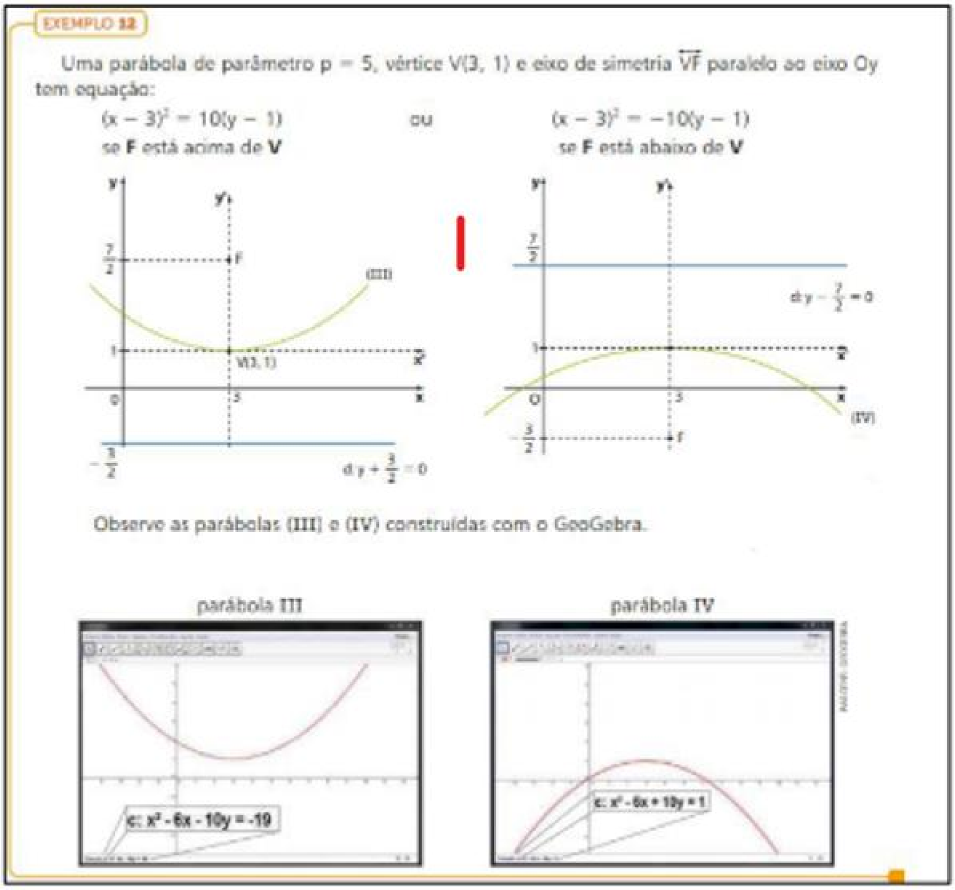


Figura 24: Questão Exemplo: Quando o vértice está fora da origem
Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 111)

A seguir, apresentaremos o exercício proposto (P6) de L1 referente a figura cônica Parábola.

37 Obtenha a equação da parábola cuja diretriz é d: $x = -2$ e cujo foco é $F(6, 0)$.

Fonte: Iezzi et al (2016, p.112)

Figura 25: Exercício Proposto (P6) de L1

Posteriormente, mostraremos, na Figura 25, a resolução do exercício proposto P6.

37- A distância entre o foco e diretriz é igual ao parâmetro, então:

$$p = Fd = \sqrt{(6-(-2))^2 + (0-0)}$$

$$p = \sqrt{(6+2)^2}$$

$$p = \sqrt{8^2}$$

$$p = 8$$

O vértice é o ponto médio da distância entre o foco e a diretriz, logo sua coordenada é (2,0)

Portanto, temos a equação:

$$\left(y - y_0\right)^2 = 2.p\left(x - x_0\right)$$

$$(y-0)^2 = 2.8(x-2)$$

$$y^2 = 16(x-2)$$

Fonte: Autor

Figura 25: Resolução do Exercício Proposto (P6) de L1

A Escolha da questão se deu pelo fato, a priori, de representar a mesma tarefa exemplificada na Questão exemplo (P6), a partir daí buscou-se saber se o mesmo nível de conhecimento exposto na questão exemplificada pelo autor era suficiente para que o aluno conseguisse resolver a questão proposta a ele.

Assim, percebe-se que na questão acima o vértice da Parábola não se encontrava na origem, o que a diferenciou da questão exemplificada. Contudo, mesmo assim, o aluno seria capaz de resolver o exercício, pois os conhecimentos da geometria analítica usados na questão exemplificada (Q6) são os mesmos que o aluno precisaria para resolver o exercício proposto P6.

Por fim os autores utilizam-se mais uma vez da geometria analítica e abordam dois tópicos, o primeiro intitulado “reconhecimento de uma Cônica pela equação”, onde o autor buscar ilustrar, aos estudantes, a maneira algébrica que as equações de cada cônica estudada (elipse, parábola e hipérbole) se estruturará, caso ela esteja com seu eixo maior na vertical ou na horizontal no plano cartesiano. Para exemplificar, mostraremos na Figura 26 a abordagem realizada na figura cônica elipse.

Reconhecimento de uma cônica pela equação

Elipses

Comparemos as equações das elipses:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

(elipse com eixo maior horizontal)

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

(elipse com eixo maior vertical)

Concluímos que:

- uma equação do 2º grau nas incógnitas **x** e **y** representa uma elipse com eixo maior paralelo a Ox ou Oy se for redutível à forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{k_1}+\frac{(y-y_0)^2}{k_2}=1, \text{ com } k_1>0,\ k_2>0 \text{ e } k_1\neq k_2$$

- se $k_1 > k_2$, $k_1 = a^2$ e $k_2 = b^2$, então o eixo maior é horizontal.
- se $k_1 < k_2$, $k_1 = b^2$ e $k_2 = a^2$, então o eixo maior é vertical.
- (x_0, y_0) é o centro da elipse.

Figura 26: Representação do reconhecimento de uma cônica pela equação

Fonte: Iezzi et al (2016, p 113)

Já o segundo tópico, intitulado: *Interseção de Cônicas*, tem o intuito de aprofundar os conhecimentos algébricos acerca das equações cônicas, mostrando como seria realizado os cálculos algébricos caso as figuras venham a se encontrar em algum ponto em comum das curvas no plano cartesiano, como ilustramos na Figura 27.

Interseções de cônicas

É regra geral na Geometria Analítica que, dadas duas curvas $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$, a interseção delas é o conjunto dos pontos que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

Já aplicamos esse conceito para achar a interseção de duas retas, de uma reta e uma circunferência e de duas circunferências. O mesmo conceito se aplica para obter a interseção de uma reta e uma cônica, de duas cônicas etc.

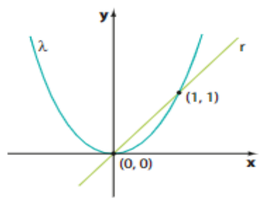
EXEMPLO 13

Vamos determinar os pontos comuns à reta r: $x - y = 0$ e à parábola λ: $y = x^2$.
Para isso, devemos resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} x=y & (1) \\ y=x^2 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), resulta:

$$y=y^2 \Rightarrow y^2-y=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow x=0 \\ \text{ou} \\ y=1 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$



Assim, temos: $r \cap \lambda = \{(0, 0), (1, 1)\}$.

Figura 27: Ilustração da interseção de cônicas

Fonte: Iezzi et al (2016, p 118)

Desse modo, percebe-se por meio das ilustrações da Figura 27, que o autor faz uso, novamente, da geometria analítica em ambos os tópicos nas OM e OD para o desenvolvimento e aprofundamento dos conhecimentos algébricos relacionados com a construção conceitual das cônicas.

Diante da investigação aqui realizada no livro *Matemática Ciência e aplicações*, notou-se a preocupação dos autores em desenvolver por meio da geometria sintética, o primeiro contato do aluno com o conteúdo de secções Cônicas recorrendo a um apanhado histórico do corte que originou cada cônica, bem como, a exemplificação por meio da ilustração de objetos e monumentos arquitetônicos encontrados no dia a dia dos discentes que possuíam formatos cônicos.

Tal relação, também, é vista dos estudos desenvolvidos por Macena (2007), a qual aponta que a importância desse tipo de abordagem se dá pelo fato do discente conseguir perceber a aproximação da matemática com o seu cotidiano, além de mudar a alusão de uma disciplina engessada e inalcançável.

No entanto, há uma discrepância no que se refere à abordagem conceitual quanto à exemplificação do trânsito de cônica para outra. Uma vez que a primeira abordagem inicia o ensino da elipse com o uso do método de Kepler. Os autores utilizam-se das organizações matemáticas da geometria sintética, para desenvolver um pensamento algébrico acerca dos conceitos que circundam a cônica estudada de forma intuitiva e quando passam para o estudo das demais cônicas (Hipérbole e Parábola), utilizam as organizações da geometria sintética somente como suporte para ilustração inicial de onde encontrar a cônica estudada e passam a conceituar suas características com enfoque maior na parte algébrica, utilizando, desta vez, da geometria analítica em ambas as cônicas.

A falta de linearidade no desenvolvimento dos conceitos pertencentes as cônicas podem ocasionar confusões no entendimento do objeto matemático, bem como um menor desempenho do aluno, uma vez que segundo Jesus et al. (2017), a retomada de ideias auxilia na eficácia da aprendizagem do discente. Assim, entendemos que a ausência dessa retomada pode dificultar a fluidez desse ensino e refletir diretamente em seu desempenho acerca da temática estudada.

No que tange às tarefas propostas e exemplificadas presentes em todo livro didático, foi possível identificar uma notória redução de atividades ao longo do estudo de cada cônica e uma predileção dos autores em priorizar, nas tarefas propostas aos estudantes, as técnicas algébricas em detrimento das técnicas que fazem apelo à geometria, explorando, desta maneira mais a geometria analítica do que a sintética, uma vez que as representações gráficas das cônicas são ilustradas por meio de *prints* da tela do aplicativo *Geogebra*, sem explorar os conhecimentos que podem ser notados mediante essa construção.

Tais situações são identificadas ainda na investigação de Macena (2007), a qual aponta que os estudos deixados de serem exploradas causam lacunas no conhecimento para o aluno, assim como na pesquisa de Siqueira (2016), o qual explica que no estudo de cônica, o que mais se observa é que o ensino geométrico sendo esquecido, com ênfase para perspectiva algébrica.

4 QUADRO COMPARATIVO:

Para conclusão de nossas análises, elaboramos um quadro comparativo entre os livros analisados para comparar as abordagens feitas nesses materiais didáticos, bem como um rsumo a respeito das geometrias encontradas em cada parte das obras analisadas. Como apresentado no Quadro 1 Comparativo entre L1 e L2.

Quadro 1: Comparativo entre L1 E L2

GEO SINTÉTICA X GEO ANALÍTICA	L1: Matemática ciência & aplicações	L2: Matemática contexto & aplicações
Metodologia na descrição das figuras cônicas (GERAL)	GEOMETRIA SINTÉTICA ✓ Abordagem histórica; ✓ Cortes cônicos; ✓ Representação cotidiana (em todas as figuras)	GEOMETRIA SINTÉTICA ✓ Representação cotidiana; ✓ Cortes cônicos; (em todas as figuras)
ABORDAGEM DA FIGURA CÔNICA ELIPSE	GEOMETRIA SINTÉTICA ✓ Introdução ✓ Construção ponto a ponto ✓ Método de Kepler (Elipse) --- GEOMETRIA	GEOMETRIA SINTÉTICA ✓ Introdução ✓ Construção ponto a ponto ✓ Método de Kepler (Elipse) ✓ Abordagem da equação reduzida da reta

	ANALÍTICA ✓ Abordagem da equação reduzida da reta	
ABORDAGEM DA FIGURA CÔNICA PARÁBOLA	GEOMETRIA SINTÉTICA ✓ Introdução ✓ Construção ponto a ponto ------------------------------- GEOMETRIA ANALITICA ✓ Abordagem da equação reduzida da reta	GEOMETRIA SINTÉTICA ✓ Introdução ✓ Construção ponto a ponto ✓ Abordagem intuitiva ✓ Abordagem da equação reduzida da reta
ABORDAGEM DA FIGURA CÔNICA HIPÉRBOLE	GEOMETRIA SINTÉTICA ✓ Introdução ✓ Construção ponto a ponto ------------------------------- GEOMETRIA ANALITICA ✓ Abordagem da equação reduzida da reta	GEOMETRIA SINTÉTICA ✓ Introdução ✓ Construção ponto a ponto ✓ Abordagem intuitiva ✓ Abordagem da equação reduzida da reta
TAREFA MAIS ABORDADA	GEOMETRIA ANALITICA Determinar equação	GEOMETRIA ANALITICA Determinar equação

Fonte: Os autores

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, realizou-se uma investigação nos livros didáticos do ensino médio da rede pública paraense a fim de identificar o modelo epistemológico dominante na exposição do conteúdo de Geometria Analítica, em particular, o estudo da geometria das Cônicas, tomando-se como referência a Teoria antropológica do didático (TAD) de Chevallard (1999) e os modelos epistemológicos de referência desenvolvidos por Benito (2019), em sua tese de doutorado.

Revisamos literaturas sobre o ensino das Cônicas, para que fosse possível identificar as dificuldades acerca deste conteúdo matemático para melhor compreender de que forma a aprendizagem de cônicas vem se desenvolvendo no ensino médio, e porque tais dificuldades perduram entre os estudantes. Estudos científicos como os de Oliveira (2011), Siqueira (2016), Macena (2007) e Jesus (2017) revelam preocupação com o ensino e a aprendizagem das Cônicas. Tais estudos apontam que este conteúdo matemático é pouco tratado na educação básica e revelam uma defasagem acerca de seu conhecimento.

Com as análises realizadas presentes no livro L1: Matemática ciências e aplicações foi possível verificar a partir da análise que o viés algébrico da geometria analítica prevalece em detrimento de um ensino e aprendizagem de aspectos mais intuitivos como o proposto na geometria sintética, que por sua vez é utilizada, em grande maioria, como apoio introdutório de cada figura cônica abordada.

No que se refere ao livro L2: Matemática conceito e aplicações, notou-se por meio da análise que ao contrário de L1, a geometria Sintética é utilizada como suporte principal no desenvolvimento do raciocínio de todo conteúdo referente à cônicas, uma vez que o autor deixa explicitado ao seu leitor, que por trás de cada equação cônica ali destacada, existe uma quantidade significativa de cálculos algébricos que não seriam destacados naquele momento. Além disso, o referente livro didático utiliza-se de noções de caráter intuitivo sempre que faz referência a construção de uma cônica.

No entanto, as atividades mais propostas aos alunos tanto por L1 quando por L2, focam a determinação da equação de cada cônicas, os tipos de tarefas propostas exigiam para seu cumprimento por parte dos discentes técnicas e tecnologias oriundas da geometria analítica para desenvolver os cálculos algébricos, uma vez que as ideias de gráfico não são muito utilizadas pelos autores.

Desta forma, diante das análises realizadas, reiterou-se a importância do Livro Didático nos processos de ensino e aprendizagem, e entendemos que tal recurso pode ser uma grande ferramenta de desenvolvimento intelectual quando utilizado de maneira correta. Além do mais, estimamos que a Teoria Antropológica do Didático seja um referencial para futuras pesquisas que abordem sobre o Livro Didático.

Esta pesquisa constitui-se em uma investigação teórica sobre as Cônicas nos Livros Didáticos, o qual propiciou emergir, no decorrer de sua construção, algumas possibilidades de pesquisas futuras. Uma primeira possibilidade seria a proposição de um estudo voltado para o ensino superior, no qual se poderá realizar uma análise dos Livros Didáticos de Geometria Analítica adotados nos cursos de Licenciatura das universidades públicas do Estado do Pará, quanto ao conteúdo de cônicas. Outra possibilidade seria a construção de Percurso de estudo e Pesquisa para o ensino do objeto matemático em estudo, destinada à educação básica, na qual poderemos explorar aspectos geométricos que favoreçam a aprendizagem dos discentes, no que se refere a tal conteúdo.

Ao concluir o presente estudo, acredito que tal investigação, pode contribuir para abordagem do conteúdo matemático sobre cônicas, principalmente no que se refere à escolha por propostas de tarefas e metodologias didáticas adotadas pelo professor, que seja adequada a geometria encontrada em cada livro didático presente nas instituições de trabalho desse profissional, aliando assim, prática docente e materiais didáticos, rumo à contínua melhora de uma educação de sucesso.

REFERÊNCIAS

Andrade, R. C. A. (2007). Geometria analítica plana: praxeologias matemáticas no ensino médio. 2007. 121 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém.

Balestri, R. Matemática: Interação e tecnologia, v. 3. 2. ed. São Paulo, 2016.

Benito, R. N. (2019). Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas. 220 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica De São Paulo- PUC, São Paulo.

Brasil. Ministério da Educação e Cultura. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. (2006). v. 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. MEC/SEB.

Chevallard, Y. (1986). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. Petit X, 19, p. 43-75.

Chevallard, Y. (19980. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique. Actes de l'U. E. de La Rochell.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en didactiques desmathématiques. V. 19, 221-265.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In: Congrés international sur la théorie anthropologique du didactique, Jaén Anais [...]. Jaén: Universidad de Jaén.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (2001). Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes, Porto Alegre: Artmed.

Costa, A. C. (2015). Geometria analítica no espaço: Análise das organizações matemática e didática nos materiais didáticos. 113 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC), São Paulo.

Dante, L. R. (2016). Matemática: contexto e aplicações. Ensino médio. 3. Ed. São Paulo: ática.

Gil, A. C. (2005). Metodologia do ensino superior. São Paulo: Atlas.

Delgado, T. A. S. (2006). Lo Matemático en el Diseño y Analisis de Organizaciones Didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes. Memória para optar al Grado de Doctor. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación, Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Madri.

Gascón, J. (2018). Os modelos epsitemológico de referência como instrumento de emancipação da didática e da história da matemática. In: Almouloud, S. A.; Farias, L. M. S.; Henriques, A (org.). A Teoria Antropológica do Didático:princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 51-76.

Iezzi, G., Dolce, O. D. D., Périgo, R. A., Nilze, A. (2016). Matemática: ciência e aplicações. Ensino médio. v. 3. 9. ed. São Paulo: Saraiva.

Jesus, C. S., Santos, L., Sousa, W., Queiroz, D. C. (2017). Os processos de ensino e aprendizagem das Cônicas no ensino médio- desafios e possibilidades .Instituto federal de Goiás- IFG- Campos Valparaiso. Goiás.

Leonardo, F. M. (2016). Conexões com a Matemática. Ensino médio: v. 3. 3. Ed. São Paulo: Morderna.

Macena, Marta Maria Maurício. (2007). Contribuições da investigação em sala de aula para uma aprendizagem das secções cônicas com significado. Disertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2007.

Machado, N. J. (1996). Sobre livros didáticos: quatro pontos. Em aberto, v. 16, n. 69, 4-10.

Siqueira, C. A. F. (2016). UM ESTUDO DIDÁTICO DAS CÔNICAS: Quadros, Registros e Pontos de Vista. (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica De São Paulo.

Varella, M. (2010). Provas e demonstrações na geometria analítica: análise das organizações didática e matemática nos materiais didáticos. 214 p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC). São Paulo

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA

Análise do modelo epistemológicos dominante para o ensino de cônicas em livros didáticos do ensino médio

Thays de Souza BORGES
Universidade Federal do Pará - UFPA, Belém-PA, Brasil

thaysborges1994@gmail.com
https://orcid.org/0009-0002-8388-8035

Saddo Ag ALMOULOUD
Universidade Federal do Pará - UFPA, Belém-PA, Brasil
saddoag@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

José Messildo Viana NUNES
Universidade Federal do Pará - UFPA, Belém-PA, Brasil
messildo@ufpa.com.br
https://orcid.org/0000-0001-9492-4914

Endereço de correspondência do principal autor
Rua 14 sul, lote 5, apt. 1602, resid. Donatello – Águas Claras, Brasília/DF 71.939-720, Brasília, DF, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Agradecemos ao Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática da Universidade Federal do Pará (GEDIM-UFPA), cujas reuniões geraram debates contribuíram substancialmente para elaboração deste manuscrito.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: T. S. Borges, S. A. Almouloud, J. M. V. Nunes
Coleta de dados: T. S. Borges
Análise de dados: T. S. Borges, S. A. Almouloud, J. M. V. Nunes
Discussão dos resultados: T. S. Borges, S. A. Almouloud, J. M. V. Nunes
Revisão e aprovação: T. S. Borges, S. A. Almouloud, J. M. V. Nunes

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 03-08-2023 – Aprovado em: 11-07-2024