Artigo Original

REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA OS NÚMEROS COMPLEXOS POR MEIO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A Teaching Approach To Complex Numbers Through The History Of Mathematics

Mayane Silva de SOUSA
Universidade Federal do Norte do Tocantins, Araguaína-TO, Brasil
mayane.silva@mail.uft.edu.br
https://orcid.org/0009-0005-7838-3747

Rogerio dos Santos CARNEIRO
Universidade Federal do Norte do Tocantins, Araguaína-TO, Brasil
rogerioscarneiro@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5387-0435

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

A necessidade de pensar novas abordagens para o ensino da matemática, especialmente dos Números Complexos, que possam possibilitar uma aprendizagem efetiva dos conceitos matemático. Este artigo tem como objetivo propor uma sequência didática para o ensino e aprendizagem dos Números Complexos na Educação Básica, com o uso metodológico da História da Matemática. Ele segue uma abordagem qualitativa, tendo como instrumento a pesquisa bibliográfica, desenvolvida em livros, dissertações, artigos, dentre outros, na qual foram reunidos diálogos conceituais que serviu para compor a sequência didática, contribuindo para responder algumas indagações, a saber: como se deu o surgimento dos Números Complexos? E, de que maneira a História da Matemática pode ser usada como um recurso na elaboração de uma proposta didática que promova a construção das noções matemáticas pelos estudantes durante a aprendizagem dos Números Complexos? Tendo em vista que o correto planejamento e execução de uma sequência didática para o ensino de um conteúdo, pode propiciar a formalização de conteúdo e aumentar a motivação dos alunos durante o desenvolvimento das competências e habilidades. A propositura resultante desta pesquisa, é uma sequência didática para o ensino, com uso da História da Matemática, intenciona contextualizar e atribuir significados ao aprendizado dos Números Complexos, para os alunos da educação básica.

Palavras-chave: Números Complexos, História da Matemática no Ensino, Proposta Didática

ABSTRACT

The need to think about new approaches to teaching mathematics, especially Complex Numbers, that can enable effective learning of mathematical concepts. This article aims to propose a didactic sequence for teaching and learning Complex Numbers in Basic Education, with the methodological use of the History of Mathematics. It follows a qualitative approach, using bibliographical research as an instrument, developed in books, dissertations, articles, among others, in which conceptual dialogues were brought together that served to compose the didactic sequence, contributing to answering some questions, namely: how did it happen? the emergence of Complex Numbers? And, how can the History of Mathematics be used as a resource in the development of a didactic proposal that promotes the construction of mathematical notions by students while learning Complex Numbers? Bearing in mind that the correct planning and execution of a didactic sequence for teaching content can facilitate the formalization of content and increase student motivation during the development of skills and abilities. The proposal resulting from this research is a didactic sequence for teaching, using the History of Mathematics, intended to contextualize and attribute meanings to the learning of Complex Numbers, for basic education students.

Keywords: Complex Numbers, History of Mathematics in Teaching, Didactic Proposal

1 INTRODUÇÃO

A matemática é frequentemente percebida como uma disciplina complexa e desafiadora, muitas vezes criticada por sua abordagem centrada em fórmulas e teoremas, conforme destacado por Motta e Ferreira (2007, p. 9), que afirmam que “a Matemática vem sendo apresentada com um amontoado de fórmulas e teoremas que o aluno tem que decorar para a prova, não se conhecendo a história daquele conteúdo com o qual estamos tendo contato em sala de aula”. Nesse contexto, a utilização da História da Matemática emerge como uma ferramenta que pode superar as limitações apontadas por Motta e Ferreira, abrindo caminho para uma abordagem que imprime qualidade e significado ao processo de ensino e aprendizagem da matemática (Pereira, 2002).

O conhecimento histórico de um determinado tema viabiliza tanto ao professor como ao aluno responder a alguns “porquês" que surgem durante o ensino e a aprendizagem, especialmente, dos conteúdos matemáticos; e também analisar e discutir as razões que levaram à aceitação de determinados fatos, raciocínios, procedimentos e ideias matemáticas (Paraná, 2008). Ainda, o uso da História da Matemática como um recurso metodológico se faz importante, uma vez que ela representa um contexto significativo para aprender e ensinar matemática (Brasil, 2018), pois, além de trabalhar datas e fatos marcantes que contribuíram para o surgimento dos conceitos matemáticos, ela proporciona um desenvolvimento mais amplo acerca deles, como evidencia Farago (2003, p. 17), ao afirmar que a História da Matemática "permite compreender a origem das ideias que deram forma à nossa cultura”.

Consoante a isso, esta pesquisa tem como objetivo geral, propor uma sequência didática para o ensino e aprendizagem dos Números Complexos na Educação Básica, com o uso metodológico da História da Matemática. Dessa maneira, este trabalho busca responder à seguinte questão: de que maneira a História da Matemática pode ser usada como um recurso metodológico na concepção de uma proposta didática que promova a construção das noções matemáticas pelos estudantes durante a aprendizagem dos Números Complexos?

Portanto, este trabalho se justifica, ao ressaltar a importância do uso da história da matemática como um instrumento metodológico no ensino e na aprendizagem dos Números Complexos na Educação Básica. Esse instrumento facilita promover o pensamento crítico dos estudantes em relação às abordagens tradicionais, contribuindo para desmistificar a matemática, visto que a história revela a falsa ideia de que essa disciplina está pronta e acabada; proporciona a formalização de conceitos matemáticos que envolvam os Números Complexos; e, ainda, serve como fonte de métodos pedagogicamente adequados, objetivos didáticos a serem atingidos pelos alunos e motivação no ensino e aprendizagem desses números (Miguel, 2009).

Outrossim, este trabalho adota uma abordagem qualitativa, concentrando-se na descrição e interpretação do fenômeno em estudo, em conformidade com Gerhardt e Silveira (2009). Agora, do ponto de vista do objetivo, essa pesquisa é, portanto, descritiva, visando caracterizar a população ou fenômeno e estabelecer relações entre variáveis (Gil, 2002) e quanto aos procedimentos, foi conduzida uma pesquisa bibliográfica, envolvendo a revisão de artigos, livros, dissertações e monografias que exploram a História da Matemática e os Números Complexos.

Ademais, essa proposta didática, se configura uma sequência didática de acordo com os pressupostos teóricos de Zabala (1998). Além disso, as atividades que compõem essa sequência foram construídas tendo como referência o modelo teórico-prático apresentado por Miguel *et al.* (2009) referente à elaboração de atividades que utilizam a história no ensino da matemática no Ensino Fundamental e Médio. Esse modelo adota uma perspectiva investigatória e segue um esquema para atividades históricas, apresentando os seguintes elementos caracterizadores: o nome de cada atividade; os objetivos das atividades; o conteúdo histórico; o material a ser utilizado nas atividades; a operacionalização das atividades; os desafios propostos nas atividades; o exercício da sistematização e formalização do conhecimento; outras atividades complementares.

O desenvolvimento deste texto é composto por duas seções, na próxima seção, que é a segunda do artigo, está descrito o contexto histórico, que envolve o surgimento e o reconhecimento dos Números Complexos, até a sua representação geométrica e como o resultado do estudo teórico se desenrolou. Já na terceira seção, apresenta-se uma breve reflexão teórica sobre o uso da História da Matemática no Ensino, além de uma proposta didática para o ensino dos Números Complexos, constituída por cinco atividades, divididas em dois momentos, que tem como finalidade auxiliar o professor de matemática no ensino introdutório dos Números Complexos, trabalhando, em suas atividades, as equações que deram subsídios para o descobrimento desses números e atividades práticas que possam favorecer a compreensão da unidade imaginária.

2 UMA ABORDAGEM HISTÓRICA ACERCA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Ao longo da história, alguns matemáticos demonstraram uma notável afinidade por resolver equações polinomiais, contribuindo de maneira significativa para o desenvolvimento e a aceitação dos Números Complexos. Especificamente, isso ocorreu devido às tentativas e às falhas dos antigos matemáticos italianos no início do século XVI, nas resoluções algébricas de equações cúbicas (Struik, 1992). Entretanto, não foram nessas tentativas e falhas que os Números Complexos se apresentaram pela primeira vez aos matemáticos. De acordo com Mendes e Chaquiam (2016), o primeiro matemático que se deparou com uma raiz quadrada de um número negativo foi Heron de Alexandria (séc. I d. C.), que, ao tentar calcular o volume de um tronco de uma pirâmide quadrada no Egito Antigo (3100 a.C. – 30 a.C.), obteve como resultado $\sqrt{-63}$. Esse é o primeiro registro conhecido de uma raiz quadrada de um número negativo.

Dessa forma, mesmo com a existência e aparição desses números, os antigos matemáticos durante séculos julgavam trabalhar com tais resultados um absurdo, coibindo a aceitação desses números. Uma virada nesse cenário ocorreu na Europa no século XVI, principalmente por meio dos estudos dos matemáticos italianos, que enfrentaram desafios relacionados a equações polinomiais e contribuíram para a compreensão dos Números Complexos (Cendron, 2021).

Assim, centralizando nos matemáticos italianos do século XVI e focando ainda mais nos alunos da Universidade de Bolonha, pode-se ter uma visão ampla sobre a aceitação dos Números Complexos através de uma nova teoria matemática referente à resolução geral de equações cúbicas, desenvolvida pelos matemáticos italianos, a qual, até então, não tinha sido explorada pelos antigos árabes e gregos (Struik, 1992).

Em vista disso, a história dos Números Complexos pode ser compreendida como um conjunto de contribuições de diferentes matemáticos, ao longo da história, principalmente dos matemáticos italianos, como Scipione del Ferro (1465 – 1526), Niccollo Fontana (1500 – 1557), Girolamo Cardano (1501-1576) e Rafael Bombelli (1526 – 1572) (Struik, 1992) . Além desses matemáticos italianos, outros nomes importantes da História da Matemática também se destacaram nesse processo, são eles: John Wallis (1616 – 1703), Caspar Wessel (1745 – 1818), Jean-Robert Argand (1768 – 1822), Gauss (1777 – 1855) (Stewart, 2013).

A Itália da renascença foi um lugar onde a política e a violência se destacaram fortemente, forçando o florescimento da arte, da ciência, e com a invenção da imprensa a matemática também floresceu (Stewart, 2013). Dessa forma, começaram a ser publicados livros sobre o ensino da matemática e suas aplicações comerciais, espalhando a arte matemática por toda parte (Struik, 1992). Nesse cenário, o primeiro grande livro de matemática publicado naquela época foi escrito por Luca Bartolomeo de Pacioli (1445 – 1517), um frade franciscano e um renomado matemático italiano, que ficou conhecido como o pai da contabilidade moderna. Este livro foi descoberto em 1494, sob o nome de *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalit*a, contendo 600 páginas (Struik, 1992).

Essas 600 páginas continham tudo o que era conhecido naquela altura sobre aritmética, álgebra, geometria e trigonometria. Assim, "Pacioli terminou o seu livro com a observação de que as soluções das equações que na nossa notação atual se escrevem $x^3 + mx = n$, $x^3 + n = mx$ parecia tão impossível no estado da ciência de então quanto a quadratura do círculo" (Struik, 1992, p. 145), em que essas equações não necessariamente possuem coeficientes iguais, mas também podem ser escritas com outros coeficientes, como $x^3 + px = q$ e $x^3 + q' = p'x$. Então, por meio dessa observação, os matemáticos da Universidade de Bolonha na Itália iniciaram alguns trabalhos em busca da solução geral para esse tipo de equação, a equação cúbica. Os gregos e os orientais já haviam resolvidos alguns casos numericamente, contudo os matemáticos bolonheses se interessavam em uma solução geral para todos os tipos em que podiam ser reduzidas as equações cúbicas, que são: $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$ (Struik, 1992).

Assim, o primeiro matemático que descobriu a existência de uma solução algébrica para equações cúbicas foi Scipione del Ferro, que embora não a tenha publicado, antes de morrer, revelou-a a um aluno, Antonio Fior (Boyer & Merzbach, 2010). Como resultado desse feito, Niccollo Fontana conhecido principalmente como Tartaglia, ao saber da existência da solução algébrica de equações cúbicas, dedicou seu tempo à descoberta da mesma, tendo sucesso em sua busca (Boyer & Merzbach, 2010). Em decorrência desse feito, foi organizado um duelo entre Antonio Fior e Tartaglia, que consistia na resolução de equações cúbicas, onde cada um propôs trinta perguntas para o outro resolver em um tempo determinado. Contudo, Fior não conseguiu resolver nenhuma das perguntas propostas a ele, ao contrário de Tartaglia, que resolveu todas (Boyer & Merzbach, 2010).

De acordo com Boyer e Merzbach (2010), Fior estava restrito a um tipo específico de equação cúbica, ou seja, ele conseguia resolver apenas equações do tipo $x^3 + px = q$, enquanto Tartaglia, conseguia resolver equações que envolviam tanto cubos quanto quadrados, ainda, os autores sugerem que Tartaglia pode ter aprendido a reduzir o caso mais geral ($x^3 + ax^2 = b$) ao caso que Fior conseguia resolver.

Desse modo, a notícia do triunfo de Tartaglia sobre Fior chegou a Cardano, um médico, astrólogo, filósofo e matemático, que pediu que Tartaglia revelasse o método que ele utilizou para resolver equações que envolviam tanto cubos quanto quadrados e, assim, ele fez, mas pediu para que Cardano não publicasse tal método, o que não ocorreu, pois, em 1545, ele o publicou em seu famoso livro Ars *Magna* (Dante, 2016), que, traduzido para a língua portuguesa, leva o título de *A grande arte*, que trata de união de todas as ideias algébricas mais avançadas daquele tempo (Stewart, 2013). Em virtude disso, Tartaglia acusou Cardano de ter o copiado, mas ele tinha uma justificativa, pois, em 1543, ao viajar para Bolonha descobrira alguns papéis com as resoluções dos três tipos de equações cúbicas referente ao feito de Scipione, o que levou Cardano a alegar que estava publicando o método de Spicione e não o de Tartaglia (Stewart, 2013).

Sendo assim, Cardano, em seu livro Ars *Magna,* publicou a solução geral para esse tipo de equação, a qual ficou conhecida como a "Fórmula de Cardano", que, para o caso de $x^3 + px = q$, toma a seguinte forma:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (1)$$

Ao longo de seu livro, Cardano se deparou com um obstáculo, pois apesar dessa fórmula funcionar brilhantemente, apareciam resultados perturbadores que não podiam ser ignorados, já que, além de existirem raízes quadradas de números negativos, Cardano também chegou a raízes cúbicas de números de natureza desconhecidas. Assim, quando nas equações de grau 2 apareciam raízes quadradas de números negativos, era notável que esse fato indicava que não havia soluções. O mais enigmático da fórmula de Cardano são as equações cúbicas com soluções reais conhecidas, mas cuja solução passava por raízes quadradas de números negativos (Cerri & Monteiro, 2001).

Para exemplificar esse fato, pega-se a equação $x^3 = 15x + 4$, para a qual há uma solução perfeita, $x = 4$ e, aplicando a fórmula de Cardano chega-se ao seguinte resultado: $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. No entanto, -121 é um número negativo que não possui raiz quadrada. Assim, Cardano, apesar de não conseguir resolver tal enigma, também considerou os números negativos, chamando-os de fictícios. Esse caso no qual há três raízes reais que aparecem como somas ou diferenças daquilo que, agora, se chama de

Números Complexos, ficou conhecido com o “caso irredutível da equação cúbica" (Struik, 1992, p. 146). Como Cardano não resolveu esse mistério, o matemático bolonhês do século XVI, Rafael Bombelli, o fez. Ele foi o primeiro matemático a aceitar a existência desses números fictícios. Sua habilidade de trabalhar com esses números foi tão significativa que ele conseguiu resolver a equação $x^3 = 15x + 4$ (Júnior, 2009).

Essa luz dada por Bombelli está registrada na sua obra *L'Algebra* (Álgebra), a qual teve como principal objetivo clarificar o livro Ar*s Magna,* de Cardano, permitindo que os Números Complexos perdessem essa característica de sobrenatural. Com esse livro e um manuscrito sobre geometria, escrito por volta de 1550, Bombelli conseguiu introduzir uma teoria densa sobre os Números Complexos, embora a aceitação total desses números data do século XIX (Struik, 1992). Quando Bombelli se deparou com o enigma encontrado por Cardano, ao resolver a equação $x^3 = 15x + 4$, ele conseguiu enxergar o que tinha passado despercebido por Cardano e por outros matemáticos.

Assim, Bombelli, utilizando a fórmula de Cardano, ao resolver esta equação, obteve $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, já sabendo por tentativas e erros que essa soma deve ser igual a 4. Certamente, essa notação não era a usada por Bombelli, que definia ***R.q*** como a raiz quadrada e ***R.c*** como a raiz cúbica. Ele escrevia essa soma como *R.c. 2. p.dm.R.q.121 + R.c. 2. m.dm.R.q.121*, onde dm.R.q.121 se refere a $\sqrt{-121}$, o que mostra que a operação era realizada com esse número e não com o número extraído de uma raiz com uma quantidade negativa (Roque, 2012). Ainda, ***p.dm*** e ***m.dm*** mostram, respectivamente, que estão somando e subtraindo $x = 4$, donde Bombelli concluiu que, ao realizar operações com essas quantidades, ele obtinha $x = 4$. Então, “para enunciar as operações com os números p.dm. e m.dm., Bombelli fornecia algoritmos que permitiam calcular suas multiplicações por qualquer outro número, afirmando inclusive que m.dm. × m.dm. dá m., o que é equivalente a dizer que $-\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1} = -1$" (Roque, 2012, p. 391).

Seguindo esse raciocínio, Bombelli concluiu que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números do tipo $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$. Logo, para esse caso concluiu que $a = 2$ e $b = 1$, pois $x = \left(2 + \sqrt{-1}\right) + \left(2 - \sqrt{-1}\right) = 4$. Então, Bombelli, após realizar seus cálculos, criou algumas regras para se operar com a $\sqrt{-1}$, são elas:

- $\left(\sqrt{-1}\right) \times \left(\sqrt{-1}\right) = -1$
- $\left(-\sqrt{-1}\right) \times \left(\sqrt{-1}\right) = 1$
- $\left(-\sqrt{-1}\right) \times \left(-\sqrt{-1}\right) = -1$
- $-1 \times \left(-\sqrt{-1}\right) = +\sqrt{-1}$

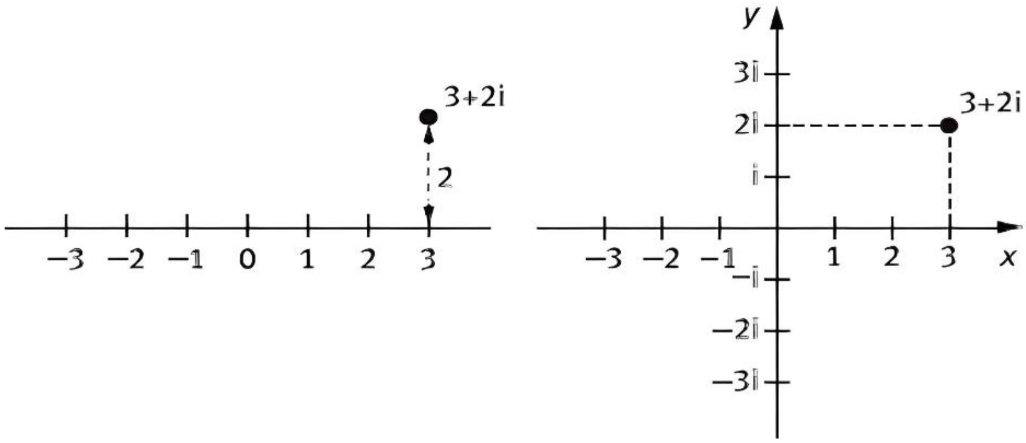
- $\left(a+b\sqrt{-1}\right)+\left(c+d\sqrt{-1}\right)=\ (a+b)+(c+d)\sqrt{-1}$
- $\left(a+b\sqrt{-1}\right)\times\left(c+d\sqrt{-1}\right)=\ (ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}$

Embora a obra de Bombelli tenha marcado o início da aceitação dos Números Complexos, ela não teve muita repercussão, ao ponto de alguns matemáticos não admitirem que existam números negativos e imaginários como raízes de equações, fazendo com que o uso desses números inquietasse os matemáticos até o século XVII. Esse cenário só mudou, quando nos estudos dos números de raízes de uma equação, Descartes (1596 – 1650) e Girard (1595 – 1632) admitiram soluções negativas e imaginárias (Roque, 2012). E foi nesse contexto, por meio da seguinte frase de Descartes, "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias", que a $\sqrt{-1}$ assumiu o nome de "número imaginário" (Garbi, 2010, p. 29).

Outros matemáticos igualmente fizeram feitos que contribuíram nesse processo de construção dos Números Complexos, dentre eles se encontra o matemático suíço Leonhard Euler, que, em 1777, propôs a utilização do símbolo **i** para representar $\sqrt{-1}$. Além de ter dado grandes avanços nos estudos de Bombelli (Gomes, 2013), ele passou a estudar números da forma $z=\ a+bi$ onde a e b são números reais e $i^2=-1$ (Cerri & Monteiro, 2001). Essa igualdade, $i^2=-1$, foi explicada por William Rowan Hamilton (1805-1865), ao utilizar a seguinte definição para operar com os pares ordenados (a,b): $(a,b).(c,d)=(ac-bd,ad-bc)$. Sendo assim, para ele um número real a pode ser escrito como (a,0), então em particular, $i^2=(0,-1)\times(0,-1)=(-1,0)=-1$ (Gomes, 2013).

Um dos primeiros matemáticos que concebeu uma representação coerente para a representação geométrica das quantidades negativas e imaginárias foi Wallis. Ele propôs que um número complexo da forma x + iy poderia ser representado como um ponto num plano. Contudo, essa ideia foi completamente ignorada e criticada, uma vez que pensar que tais números formavam uma linha em ângulo reto com a linha dos reais não fazia sentido (Stewart, 2013). Foi aí que, a partir do final do século XVIII e início do século XIX, os matemáticos Gauss, Wessel e Argand obtiveram a representação geométrica dos Números Complexos, como mostra a Figura 1, que representa o número $3+2i$:

Figura 1
Esquerda (Plano de Wallis), direita (Wessel, Argand e Gauss)



Fonte: Stewart (2013, p. 68)

Dentre esses matemáticos, o que ganhou notoriedade nessa questão foi Gauss, pois ele apresentou um resumo dos trabalhos de Wessel e Argand e de outros matemáticos desconhecidos (Roque & Pitombeira, 2012), o que “fez com que a representação do plano complexo ficasse conhecida tornando mais significativos seu estudo e favorecendo sua aplicabilidade” (Dante, 2016, p. 175). Em consequência disso, o plano cartesiano no qual estão representados os Números Complexos é denominado plano complexo ou plano de Argand-Gauss. Além desse feito, em 1832, Gauss introduziu a expressão Número Complexo para representar esses números.

3 UMA PROPOSITURA DIDÁTICA COM A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

3.1 História da Matemática no Ensino

A matemática surgiu a partir da necessidade das pessoas em medir e contar objetos, o que evidencia que, historicamente, ela está presente desde os primórdios dos tempos. Assim, “é possível utilizarmos a matemática produzida por outros povos e em outras épocas para produzir novas matemáticas” (Mendes, 2009, p. 70) e ampliar os conhecimentos matemáticos existentes atualmente. Logo, pode-se concluir que a matemática é uma ciência em construção, resultado das contribuições de diferentes culturas e povos ao longo do tempo.

A história, por sua vez, tem um grande papel na construção da realidade matemática, uma vez que “à medida que passamos a conhecer e compreender o desenvolvimento da sociedade em sua trajetória de transformação, aprendemos novos meios de compreender e explicar um mesmo fenômeno” (Mendes, 2009, p. 71). Destarte, a História da Matemática pode ser usada como um valioso recurso metodológico em sala de aula, tendo em vista que essa ferramenta pode servir de fonte de motivação, objetivos e métodos no ensino e na aprendizagem dessa disciplina (Miguel, 2009), além, de “contribuir para a ampliação da compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais da matemática, bem como das contribuições didáticas para o trabalho do professor e para fortalecer suas competências formativas para o exercício de ensino” (Mendes & Chaquiam, 2016, p.18).

Ao utilizar a História da Matemática no ensino dos variados conteúdos presentes na disciplina de matemática, o professor não só promove uma valorização do conhecimento matemático, produzido pelos povos ao longo da história, como também desperta uma maior criatividade por parte dos estudantes, ao realizarem atividades em sala de aula (Mendes, 2009). Sendo assim, o uso didático da História da Matemática em sala de aula contribui, também, para desmistificar a matemática, para formalizar conceitos matemáticos e, inclusive, para transformar um ensino tradicional, em que o professor é o único detentor do conhecimento, em um ensino em que o estudante seja o protagonista desta realidade. Enfim, valendo-se do conhecimento histórico, promove-se um contato mais intrínseco entre a matemática e o aluno, promovendo o seu pensamento crítico e independente (Miguel, 2009).

Entretanto, para garantir o sucesso dessa abordagem pedagógica, o professor deve ter “um entendimento profundo da própria Matemática e do seu desenvolvimento histórico epistemológico” (Mendes, 2009, p. 78). Esse entendimento é importante, pois, assim, os professores saberão qual matemática ensinar e como utilizar a história para estimular os alunos no processo de compreensão dos conceitos que estão sendo estudados. Ademais, “ensinar matemática com apoio na história do desenvolvimento das ideias matemáticas não significa ensinar História da Matemática” (Mendes & Chaquiam, 2016, p.21). Portanto, a história não é um conteúdo a ser ensinado e, sim, uma ferramenta didática, usada na contextualização do conhecimento matemático para promover uma aprendizagem significativa por parte do aluno.

3.2 Sequência didática

Para Zabala (1998, p.18), sequência didática é um "conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores, como pelos alunos". Em vista disso, a presente sequência didática tem como objetivo principal auxiliar o professor de matemática no ensino introdutório dos Números Complexos, trazendo em suas atividades uma perspectiva histórica acerca desse tema. Ela foi pensada para ser trabalhada com alunos do 3.º ano do Ensino Médio, tendo como tempo previsto, no 1.º e 2.º momentos, de no mínimo 6 e 20 minutos por atividade, respectivamente.

1.º momento: Este primeiro momento tem como objetivo trabalhar algumas equações/expressões que contribuíram para o surgimento dos Números Complexos.

Atividade 1 - Raiz quadrada de um número negativo

Objetivo: Promover uma reflexão acerca da existência da raiz quadrada de um número negativo.

Tarefa 1: Utilizando a fórmula de Bháskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4.\,a.\,c}}{2.\,a} \tag{2}$$

determine a solução da equação $x^2 - 10x + 40 = 0$. Ainda, verifique se o valor $\sqrt{\Delta}$ pertence ao conjunto dos números reais, se não, como podemos encontrar esse valor.

Atividade 2 - Cardano e a equação do 3º grau

Objetivo: Contextualizar o surgimento da unidade imaginaria i, através da resolução de Cardano de uma equação cúbica.

Tarefa 2: Considere a equação $x^3 = 15x + 4$, onde $x^3 = px + q$ e determine o valor de x, utilizando a seguinte fórmula:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{1}$$

Atividade 3 - Aplicação da unidade imaginaria i

Objetivo: Aplicar os conhecimentos obtidos na “Atividade 2”, na resolução obtida na equação da “Atividade 1”.

Tarefa 3: Utilizando o desenvolvimento de Bombelli, considere a resolução obtida da equação $x^2 - 10x + 40 = 0$ e obtenha a $\sqrt{-60}$ dentro do conjunto dos Números Complexos.

2.º momento: Este segundo momento, tem como objetivo auxiliar os alunos na compreensão da unidade imaginária i, desenvolvendo atividades que envolvam essa unidade e a resolução de raízes pertencentes aos Números Complexos.

Atividade 4 - Unidade imaginária **i**

Objetivo: Promover a compreensão acerca da unidade imaginária **i** através da prática.

Tarefa 1: Calcule o valor de:

a) i^{29}

b) i^{100}

c) $(-i)^{26}$

d) $i^1 + i^2 - i^3 + i^4$

e) $4i^{156} + 2i^{23}$

f) $(i^2)^0 \times (i^{221})^{12}$

Atividade 5 - Equações do 2.º grau

Objetivo: Aplicar a expressão $\sqrt{-1}$ na resolução de equações do 2.º grau.

Tarefa 2: Resolva as equações abaixo em C (Conjunto dos Números Complexos):

a) $x^2 + x + 5 = 0$

b) $x^2 + 14 = 0$

c) $x^2 - 4x + 8 = 0$

d) $6x^2 + 7x + 38 = 0$

e) $15x^2 + 89 = 0$

f) $9x^2 + 18x + 27 = 0$

g) $5x^2 - 5x + 5 = 0$

h) $2x^2 + 10x + 100 = 0$

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Atividade 6 - Plano Argand-Gauss

Objetivo: Representar graficamente raízes complexas no plano Argand-Gauss.

Tarefa 3: Levando em consideração os resultados da Atividade 6, represente graficamente as raízes complexas das 8 equações da atividade no plano Argand-Gauss.

3.3 Detalhamento e orientações pedagógicas para a aplicação da sequência didática

A sequência didática proposta aqui tem a intenção de auxiliar o professor de matemática no ensino introdutório dos Números Complexos, preferencialmente no 3.º ano do Ensino Médio, usando como instrumento pedagógico a História da Matemática, uma vez que ela serve como

> apoio para se atingir, com os alunos, objetivos pedagógicos que os levem a perceber, por exemplo: (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. (Miguel & Miorim, 2011, p. 53)

Assim, essa sequência didática foi pensada para ser aplicada durante o ensino inicial dos Números Complexos. Primeiramente, a “Atividade 1” deve ser aplicada no primeiro momento deste ensino, antes de qualquer explicação ou apresentação dos Números Complexos, uma vez que não se pretende, com essa proposta, mudar a rotina do professor, mas auxiliá-lo de forma “sutil/discreta” nesse processo. Sendo assim, ao chegarem na expressão $\frac{10\pm\sqrt{-6}}{2}$, os alunos, que não conhecem o universo dos complexos, possivelmente irão afirmar que não existe raiz quadrada de um número negativo, fornecendo, assim, subsídios para que o professor possa apresentar a existência desse conjunto e afirmar que existe, sim, essa possibilidade.

Logo a seguir, o professor pode apresentar a “Atividade 2”, em que está sendo utilizada a fórmula de Cardano para resolução da equação dada. Assim, os alunos chegarão em um resultado semelhante ao da atividade anterior, contudo, neste momento, o professor precisa apresentar a resolução de Bombelli (presente no capítulo 2 deste trabalho) para essa equação. Ele, inclusive, pode aproveitar essa ocasião para falar um pouco da história desses números, mostrando esse resultado como uma construção de vários matemáticos ao longo da história, o que fornecerá subsídios para que, na “Atividade 3”, os alunos possam resolver a equação da tarefa 1.

Por fim, o 2.º momento, dividido em 3 atividades, tem como propósito praticar e aprofundar os conhecimentos dos alunos acerca da unidade imaginária dos Números Complexos e a representação geométrica desses números. Assim, como o objetivo dessa sequência é auxiliar o professor nesse primeiro contato dos alunos com esse novo conjunto, é interessante que ele aplique as atividades do 2.º momento como um dever de casa, até mesmo, se preferir, pode atribuir notas para elas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A disciplina de matemática, ao longo da história, representa para muitos alunos um dos componentes curriculares mais difíceis de se aprender. E dentre os conteúdos que compreendem essa disciplina, os Números Complexos, em sua totalidade, justificam essa ideia, por ser um conteúdo do 3.º ano do Ensino Médio, que demanda um nível de conhecimento matemático necessário para compreender os Números Complexos, relativamente alto. Em vista disso, a História da Matemática pode ser usada como um instrumento metodológico para introduzir novos conteúdos, em especial os Números Complexos, propiciando, então, mudanças significativas na percepção dos alunos além de desmistificar e humanizar a matemática.

Desse modo, este trabalho buscou mostrar as possibilidades que essa metodologia pode fornecer para o ensino dos Números Complexos. Na Educação Básica, retomando o contexto histórico que favoreceu o surgimento e aceitação desses números e apresentando uma formulação de uma proposta didática com o uso metodológico da História da Matemática, para auxiliar o professor de matemática no ensino desse conteúdo.

Ao resgatar a história, foram apontadas as diversas contribuições de alguns matemáticos ao longo do tempo, como Del Ferro e Tartaglia, ao descobrirem a solução geral de equações cúbicas, Cardano que publicou esse método e percebeu ao utilizá-lo, que há equações cúbicas com soluções reais conhecidas, cuja solução passava por raízes quadradas de números negativos e que embora isso fosse um enigma, considerou a existência desses números. Ainda o matemático italiano Bombelli que foi o primeiro a aceitar a existência desses números e operar com eles, criando assim, as primeiras regras que possibilitaram operações com $\sqrt{-1}$. E, além desses quatro matemáticos italianos, as contribuições dos matemáticos Leonhard Euler, ao representar $\sqrt{-1}$ como i, William Rowan Hamilton, por definir que $i^2 = -1$ e Wallis, Gauss, Caspar Wessel e Argand pela representação geométrica dos Números Complexos.

Com base nos dados obtidos, pode-se inferir que a sequência didática proposta, que traz em suas atividades alguns elementos históricos que poderão promover o surgimento e aceitação dos Números Complexos, o que poderá ratifica a eficiência da História da Matemática para o ensino e a aprendizagem desse conteúdo, pois a mesma pode propiciar a formalização de conceitos e, aumentar a motivação dos alunos. Enfim, por meio dessas atividades práticas, contextualizadas e instigantes, busca-se mostrar que a matemática é mais do que apenas manipulação de símbolos abstratos, mas tem raízes históricas e contextos que podem tornar o aprendizado significativo.

Por fim, levando em consideração o tema e os resultados deste trabalho, infere-se que ele pode servir de inspiração para ensino e a aprendizagem dos Números Complexos no Ensino Superior, principalmente nos cursos de Licenciatura em Matemática; e, até mesmo, para pesquisas futuras, voltadas ao desenvolvimento e à aplicação de uma proposta didática similar a esta para a Educação Básica e/ou no Ensino Superior; e voltadas a investigar e apresentar a história dos Números Complexos até os dias atuais; ou ainda, para evidenciar a importância e a presença desses números em várias áreas do conhecimento, como na Física, Biologia, Química, Astronomia, Engenharia Aeronáutica e Elétrica. Outro ponto que também poderia ser explorado é o fato de os Números Complexos nunca (até hoje) terem composto a matriz de conteúdo do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Em suma, trabalhar como novas metodologias, que buscam aproximar o aluno daquele conteúdo que ele estuda, sempre será mais eficiente.

REFERÊNCIAS

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2010). A History of Mathematics (3rd ed.). John Wiley & Sons, Inc.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília.

Cendron, L. W. (2021). *Números complexos: um estudo de suas aplicações*. (Trabalho de Conclusão de Curso Licenciatura em Matemática). Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó.

Cerri, C.,& Monteiroo, M. (2001). *História dos Números Complexos*. Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática Instituto de Matemática e Estatística da USP. São Paulo. Recuperado de: https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf

Dante, L. R. (2016). *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Ática.

Farago, J. L. (2003). *Do ensino da História da Matemática à sua contextualização para uma aprendizagem significativa*. (Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Garbi, G. G. (2010). *Romance das equações algébricas*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Gerhardt, T. E., & Silveira, D. T. (2009) *Métodos de pesquisa*. 1 ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS. Recuperado de: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/52806/000728684.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Gil, A. C. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo, SP: Atlas.

Gomes, R. (2013). *Números complexos e polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio do GeoGebra*. (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

Mendes, I. A. (2009). *Investigação Histórica no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.

Mendes, I. A., & Chaquiam, M. (2016). *História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores*. Belém: SBHMat.

Miguel, A. (2009). As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetike*, 5(2), 73-89. Recuperado de: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646848/13749.

Miguel, A., & Miorim, M. Â. (2011). *História na Educação Matemática: propostas e desafios*. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Miguel, A., Brito, A. J., Carvalho, D. L., & Mendes, I. A. (2009). *História da Matemática em Atividades Didáticas*. 2 ed. rev. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Motta, C. D. V. B., & Ferreira. V. L. (2007). *Uma perspectiva para a história da matemática na formação de professores das séries iniciais*. São Paulo: Unicentro.

Paraná. (2008). Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes Curriculares para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio*. Curitiba: SEED.

Pereira, L. H. F. (2002). *Teorema de Pitágoras- lembranças e desencontros na matemática.* Passo Fundo; UFP.

Roque, T. (2012). *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar.

Roque, T., & Pitombeira, J. B. de. (2012). *Tópicos de História da Matemática. Coleção PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática.* Rio de Janeiro.

Stewart, I. (2013). *Dezessete equações que mudaram o mundo.* Rio de Janeiro: Zahar.

Struik, D. J. (1992). *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar.* Porto Alegre: Artmed.

NOTAS DA OBRA

TITULO DA OBRA
Uma abordagem didática para os números complexos a partir da história da matemática

Mayane Silva de Sousa
Licencianda em Matemática
Universidade Federal do Norte do Tocantins, Licenciatura em Matemática, Araguaína-TO, Brasil
mayane.silva@mail.uft.edu.br
https://orcid.org/0009-0005-7838-3747

Rogerio dos Santos Carneiro
Doutor em Educação em Ciências e Matemática
Universidade Federal do Norte do Tocantins, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Araguaína-TO, Brasil
rogerioscarneiro@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5387-0435

Endereço de correspondência do principal autor
Avenida Paraguai, esq. com Rua Uxiramas, s/n, Setor Cimba, 77827-050, Araguaína-TO, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: R. S. CARNEIRO, M. S. SOUSA
Coleta de dados: R. S. CARNEIRO, M. S. SOUSA
Análise de dados: R. S. CARNEIRO, M. S. SOUSA
Discussão dos resultados: R. S. CARNEIRO, M. S. SOUSA
Revisão e aprovação: R. S. CARNEIRO, M. S. SOUSA

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.
APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 23-08-2023 – Aprovado em: 08-02-2024