Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O PRAZER DE VER, ENTENDER, EXPRESSAR E INVENTAR... EM MATEMÁTICA, É CLARO![1]

Le plaisir de voir, de comprendre, de dire et d'inventer…en mathématiques, bien sûr !

Raymond **DUVAL**
Trad. Méricles T. Moretti

Eu não vi os 600 guarda-chuvas que cobriam a Praça François Villon em Aix-en-Provence, mas a foto que Méricles T. Moretti tirou deles. Essa foto chamou a minha atenção e a manteve lá. Ela lança uma luz surpreendente sobre os registros produtores de representações semióticas!
O meu objetivo não é explicar por que essa foto me chamou atenção ou como ela lança luz sobre os registros de representações semióticas, mas introduzir uma abordagem analítica e para responder as duas perguntas seguintes:
- O que fotos, imagens e figuras geométricas, todas produzidas sobre uma superfície 2D de um meio físico 3D, transmitem?
- Como podemos reconhecer o que cada uma dessas representações revela?
Para responder a essas duas perguntas, primeiro precisamos criar um *corpus* de representações visuais tão grande quanto possível.

PLANO DO TEXTO

I. Análise comparativa de um corpus de representações semióticas: fotos, desenhos, esboços, tabelas e "figuras geométricas".

I.1 Fotografias e realidade fotografada: como podemos analisar a transição de uma para a outra?

.2 Figuras geométricas construídas instrumentalmente: como podemos reconhecer rapidamente as propriedades e os objetos matemáticos visualizados?

I.3 As grades quadriculadas são um auxílio ou um obstáculo para ver ou aprender a ver?

[1] No anexo encontra-se o texto original em francês. O texto em português também poderá ser lido no e-book "Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval - Parte 2", que encontra-se no prelo e será publicado em breve.

I.4 Como a terceira dimensão se impõe visualmente em figuras produzidas na superfície 2D de um meio físico?

I.5 Ruptura e a criatividade das representações semióticas em relação às representações não semióticas.

I.6 A hierarquização de unidades figurais na visualização geométrica.

II Registros que produzem representações semióticas.

II.1 O registro das línguas faladas.

II.2 Mapeamento das unidades de sentido de um enunciado e das unidades figurais de uma configuração geométrica.

II.3 O registro de escritos simbólicos.

III Representações icônicas: imagem ou semelhança?

III.1 O equívoco das noções de ícone e índice.

III.2 O critério de semelhança e a determinação dos graus de iconicidade.

IV. Conscientizar cada aluno sobre como trabalhar em matemática.

I. ANÁLISE COMPARATIVA DE UM CORPUS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: FOTOS, DESENHOS, ESBOÇOS, TABELAS E "FIGURAS GEOMÉTRICAS"

I.1 A foto é a realidade fotografada: como podemos analisar a passagem de uma à outra?

Figura 1: Foto dos guarda-chuvas na Place François Villon em Aix-en Provence.

Vamos começar comparando a semelhança e, acima de tudo, a diferença entre a foto, que é uma representação, e os objetos materiais no espaço percebidos ao redor. O diagrama a seguir mostra a oposição entre o movimento para frente e para trás do olhar entre a foto, que é uma imagem 2D produzida em um suporte plano 2D, e os objetos materiais 3D enquadrados no campo de visão da câmera.

A foto que é **uma representação**	Enquadra-mento pelo sistema óptico →	**Os 600** guarda-chuvas que foram fotografados
$\frac{\text{2D imagem}}{\text{2D Suporte físico plano}}$	← Produção automática pelo aparelho	$\frac{\textbf{3D Guarda – chuvas abertos}}{\textbf{3D Uma praça ensolarada}}$

Figura 2: Análise das transições entre a fotografia e a realidade fotografada.

I.1.1 Critérios de análise. Agora nos concentremos no conteúdo da imagem 2D em vermelho. Essa imagem é uma CONFIGURAÇÃO do que chamaremos de unidades figurais 1D, 2D ou 3D. Unidades figurais são unidades que se destacam perceptualmente do fundo formado pela imagem 2D e que são imediatamente identificáveis por critérios puramente visuais. Assim:

- **As unidades figurais 1D** são linhas desenhadas em um fundo homogêneo, branco, preto ou verde ou da mesma cor. Mas os casos mais ricos são aqueles em que as linhas são desenhadas sobre um fundo heterogêneo, como aqui na imagem 2D, e especialmente com representações gráficas cartesianas em que o fundo é a grade quadriculada do plano por dois eixos graduados e orientados. **Na foto, as unidades figurais 1D são as linhas pretas** que reconhecemos como os cabos de cada guarda-chuva;
- As unidades figurais 2D são ângulos do plano ou superfícies delimitadas por um contorno fechado. Elas são imediatamente identificáveis pelas bordas de uma superfície colorida ou pelas unidades figurais 1D que traçam o contorno fechado. Na foto, os guarda-chuvas são identificados pelas cores das suas coberturas. Pode-se dizer que eles estão abertos pelos contornos fechados que contrastam a parte superior do guarda-chuva e a parte inferior sob a qual a gente se abriga. Também é possível perceber que os guarda-chuvas abertos têm uma borda octogonal. Por fim, reconhece-se as cores homogêneas e separadas das sombras dos guarda-chuvas que oferecem proteção contra o sol, e elas confirmam que as bordas dos guarda-chuvas abertos são octogonais. Essas unidades figurais 2D são, portanto, representações icônicas de objetos 3D/3D reais;
- As unidades figurais 3D são aquelas determinadas pela profundidade de campo. As unidades 2D aparecem em perspectiva mais ou menos próximas ou distantes e, portanto, mais ou menos nítidas,

dependendo da profundidade de campo escolhida. Na foto, o tamanho das unidades figurais 2D, ou seja, os guarda-chuvas que estão sendo identificados, diminui rapidamente **em relação ao plano focal do sistema óptico** da câmera utilizada.

Os critérios para distinguir entre unidades figurais 1D, 2D e 3D destacam as propriedades semiocognitivas das unidades figurais. As unidades figurais podem ser justapostas ou separadas, e podem ser parcialmente sobrepostas. É essa propriedade semiocognitiva que torna as unidades figurais tão poderosas para a visualização.

I.1.2 Observações iniciais. Ao analisar a foto com base em todas as unidades figurais que podem ser reconhecidas perceptualmente em seu conteúdo, permite que façamos três observações seguintes:

Obs. 1 Há muito mais unidades em miniatura 1D e 2D do que unidades em miniatura 3D, cada uma correspondendo a um guarda-chuva aberto. Por exemplo, o guarda-chuva verde que aparece quase inteiramente na parte superior da foto tem (se não me engano):

- 4 bordas salientes e 4 bordas reentrantes entre as 8 pontas das nervuras;

- 16 linhas pretas que se juntam, às 8 linhas pretas das nervuras adicionando às 8 hastes de suporte.

Tudo o que se precisa fazer é contar quantas unidades figurais 2D essas 8 bordas e essas 16 linhas pretas representam para identificar os guarda-chuvas na foto!

Obs. 2 Há muito menos unidades figurais 3D na foto do que cabos de guarda-chuva para contar. E todas as unidades figurais 2D acabam se fundindo no que parece ser o fim da praça ou sua continuação em um beco. De qualquer forma, é impossível dizer quantas centenas de guarda-chuvas existem.

Obs. 3 Não é possível ladrilhar por completo o plano com octógonos, como mostram as sombras que os guarda-chuvas projetam no chão. Eles estão separados, com lacunas de tamanho variável, dependendo da orientação de cada guarda-chuva. Esta foto fornece uma confirmação artística de um resultado matemático.

I.2 Figuras geométricas construídas instrumentalmente: como podemos reconhecer rapidamente as propriedades e os objetos matemáticos visualizados?

Todos os instrumentos usados para construir uma figura geométrica devem atender as duas exigências seguintes:

- Produzir um traçado 1D ou 2D correspondente a uma propriedade geométrica, ou seja, uma propriedade definida por uma declaração que é condensada semanticamente por um termo (linha reta, curva etc.);

- Levar em conta quantidades ou proporções de quantidades e, portanto, valores numéricos.

Essas duas exigências implicam que todas as unidades figurais podem ser livremente associadas a termos de propriedade ou a valores numéricos.

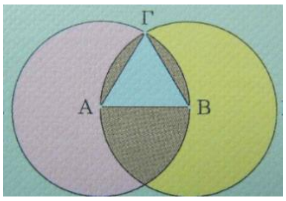
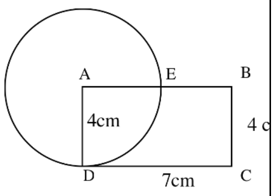
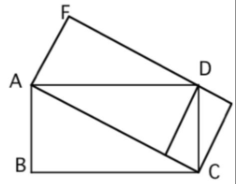
		
C1. Configuração codificada pela associação de 3 dos 4 pontos de interseção para designar unidades figurais 1D ou 2D	**C2.** Configuração duplamente codificada (letras e valores numéricos), e associada a uma declaração de problema	**C3.** Configuração codificada associada a um enunciado do problema

Figura 3: comparação de três configurações visuais 2D/2D

Analisemos as três configurações mostradas na Figura 3. Elas podem ser construídas com instrumentos que produzem, respectivamente, unidades figurais 1D (uma régua graduada ou não graduada) e unidades figurais 2D com o compasso ou gabaritos diferentes[2].

A CONFIGURAÇÃO C1 (Figura 3) compreende um total de 14 unidades figurais 1D ou 2D[3]:

- 4 unidades figurais 2D, 3 das quais estão **parcialmente** sobrepostas, uma sobre a outra, sendo a quarta marcada pelas três letras sobrepostas às outras três;
- 5 unidades figurais 2D **perceptualmente ocultas** e não imediatamente reconhecíveis porque resultam da sobreposição das unidades 2D anteriores;
- 5 unidades 1D correspondentes **aos traçados dos dois círculos** e aos **três segmentos de reta** AB, AΓ e BΓ.

Essa configuração puramente visual parece ser de pouco interesse matemático, pois não está associada a nenhuma declaração de problema. Mas, do ponto de vista semiocognitivo, ela é crucial, pois nos permite criar **testes de reconhecimento rápido de unidades 2D ou 1D**, reconhecidas em menos **de 5 segundos** (ou seja, à primeira vista) e depois em **menos de 1 minuto**. Depois desse tempo, o olhar dos alunos não se altera mais.

[2] Duval et Godin, 2005, pp. 6-12.
[3] Duval, 2015, pp 152-153.

A CONFIGURAÇÃO C2 (Figura 3) é mais simples, compreende um total de 9 unidades figurais 2D ou 1D:

- 2 unidades 2D parcialmente sobrepostas;
- 3 unidades 2D perceptualmente ocultadas;
- 4 unidades 1D correspondentes aos traços necessários para a sua construção.

Seu interesse está no fato de que os valores numéricos estão associados aos traçados AD, BC e DC, que possibilita a apresentação do seguinte problema, que fez parte da avaliação nacional CE2 (~8 anos) - sixième (~11 anos) em setembro de 1997[4].

Para resolver o problema, é preciso escrever duas equações numéricas e associá-las. Mas, para escrevê-las, você precisa ser capaz de reconhecer rapidamente a unidade figural 2D (EBCD), **que está oculta pela sobreposição do círculo e do retângulo**, e as duas unidades figurais 1D, que são os dois raios AE e AD. O que os alunos viram e reconheceram?

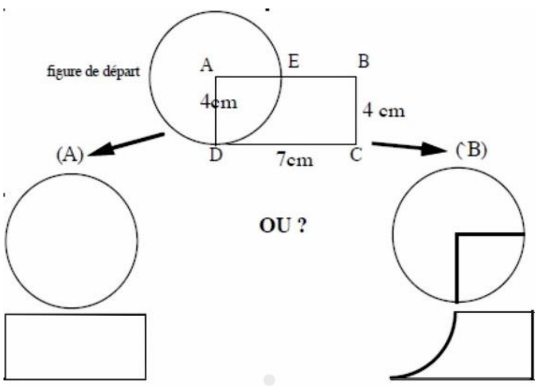
<table>
<tr><td colspan="2">Este desenho à mão livre (os tamanhos reais estão em cm) mostra um retângulo ABCD e um círculo com centro A que passa por D. Encontre o comprimento do segmento [EB].</td></tr>
<tr><td>
</td>
<td><table>
<tr><td>AE visto como um raio de 4 cm</td><td>9%</td></tr>
<tr><td>- Respostas medindo a linha (cerca de 2 cm na linha mostrada)</td><td>16%</td></tr>
<tr><td>-Respostas por estimativa perceptual (E quase no meio de AB: cerca de 3,5 cm)</td><td>26%</td></tr>
<tr><td>- Outras respostas</td><td>30%</td></tr>
<tr><td>- Sem resposta</td><td>6%</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>2 unidades 2D parcialmente sobrepostas ou
3 unidades 2D perceptualmente ocultas?</td><td>Resultados de uma amostra representativa de 2604 alunos de uma população de aproximadamente 800.000 alunos (11 anos de idade)</td></tr>
</table>

Figura 4: Questionários de avaliação para a Configuração C2

Os responsáveis pela avaliação (ver nota de rodapé 3) comentaram os resultados da seguinte forma:

> Esse exercício, que rompe com a geometria das escolas primárias, destaca **a dificuldade de passar da percepção visual para a análise de figuras**. Muito difícil no

[4] Ministère de l'Education Nationale. Évaluation CE2-6ème Repères nationaux- Septembre 1997, *Les Dossiers* n°100: Juin, 1998.

início do 6º ano, ele deve ser mais bem-sucedido no final do ano, pois essa habilidade é claramente visada no programa do 6º ano... (p. 186).

Os responsáveis pela avaliação não especificaram que a análise da figura deveria se basear nos termos usados para designar dois objetos geométricos, "retângulo" e "círculo", e que a figura deveria ser vista pelo prisma das propriedades desses dois objetos. Mas esses olhares não corrigem a "percepção visual", que continua impor a sua evidência. Isso ocorre porque o olhar deve ser capaz de reconhecer rapidamente duas unidades figurais que são diferentes daquelas do círculo e do retângulo, e duas unidades figurais 1D que pertencem ao círculo e não apenas ao retângulo.

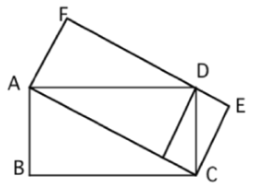
No ano seguinte, o mesmo problema foi proposto com uma pequena modificação na configuração, de modo que o ponto de interseção E não estivesse mais quase no meio do lado AB. E catrapus! A porcentagem de alunos que viram AE apenas como um raio aumentou de 9% para 22%, a porcentagem de que fez medições na configuração aumentou de 16% para 39%, a porcentagem daqueles que deram outras respostas diminuiu e o número de não respostas aumentou[5].

A CONFIGURAÇÃO C3 (Figura 3) é mais complexa do que a Configuração C2 devido à justaposição e sobreposição de contornos fechados heterogêneos[6]. Ela compreende 17 unidades figurais no total:

- 8 unidades figurais 2D com contornos retangulares e triangulares sendo 3 unidades de forma retangular parcialmente sobrepostas, 5 unidades de forma triangular justapostas. A complexidade vem do fato de que duas dessas unidades de forma triangular (AD?) e (DC?) **estão justapostas,** ao mesmo tempo, a uma das três unidades de forma retangular e totalmente sobrepostas à mesma unidade de forma retangular (ADCB);

- 9 unidades em figurais 1D.

O enunciado do problema ao qual ele foi associado é uma comparação puramente qualitativa da área de dois retângulos, independentemente de qualquer valor numérico (Figura 5 a seguir).



ABCD é um retângulo.

A área do retângulo ACEF é maior, menor ou igual à área do retângulo ABCD?

Figura 5: Comparação qualitativa das áreas

Para resolver esse problema, tudo o que é preciso saber é que a diagonal de um retângulo o divide em dois triângulos congruentes. Você não precisa entender o conceito de área nem usar a fórmula

[5] Ministère de l'Education Nationale. Évaluation CE2-6ème Repères nationaux- Septembre 1998, *Les Dossiers* n°111: Août, 1999.
[6] Duval, 2015, pp.152-153.

para calcular as duas áreas. Esse problema foi proposto em 1981 para duas turmas de três níveis. Os alunos trabalharam individualmente[7].

	$6^{\text{ème}}$ 11-12 anos	$5^{\text{ème}}$ 12-13 anos	$4^{\text{ème}}$ 13-14 anos
Uma diagonal divide um retângulo em dois triângulos congruentes	**5%**	**0**	**6%**
Medida dos lados e depois bloqueio	**10%**	**30%**	**45%**
Invariância por meio de compensação (Piaget)	***10%***	***10%***	***2%***
Medida dos lados e depois o cálculo (2 ,5) × (5cm); (2,3) × (5,5cm)	**10%**	**14%**	**10%**

Figura 6: Resultados para o mesmo problema em três níveis escolares

Resultados quase idênticos foram registrados cerca de quarenta anos depois no Rally Transalpino de Matemática, que é único por ser realizado entre classes de níveis diferentes e não simplesmente entre alunos[8]. Essa recorrência levanta uma questão crucial para o ensino de geometria elementar, mesmo quando os objetivos são a utilização prática de algum conhecimento geométrico. Onde está o obstáculo recorrente que a grande maioria dos alunos não consegue superar?

Para resolver o problema associado à Configuração C3, tudo o que precisamos fazer **é observar a associação dupla das três unidades 1D**: AD, DC e AC. AD é um dos lados do retângulo ADCB e uma das diagonais do retângulo FD?A. Da mesma forma DC é tanto a diagonal do retângulo DEC? quanto um dos lados do retângulo ADCB.

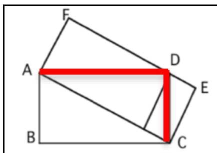
	A dificuldade está em reconhecer AD e DC como diagonais e não apenas como lados de dois pequenos retângulos oblíquos.

Figura 7: A condição semiocognitiva pré-requisitada

Essas duas diagonais desconstroem a configuração inicial em duas unidades figurais retangulares 2D separadas (I na figura 8 abaixo). O retângulo oblíquo pode então ser dividido em três unidades triangulares 2D justapostas, e o retângulo horizontal entre duas unidades triangulares

7 Jamm, F. (1981).
8 Jaquet, F. (2018). Aires de polygones sur quadrillage/Aree di poligoni su una quadrettatura, La Gazette de Transalpie, n. 9, pp. 101-124.

2D (II). Podemos então ver a equivalência das áreas das unidades figurais. A equivalência das áreas das duas unidades figurais sobrepostas se torna visível.

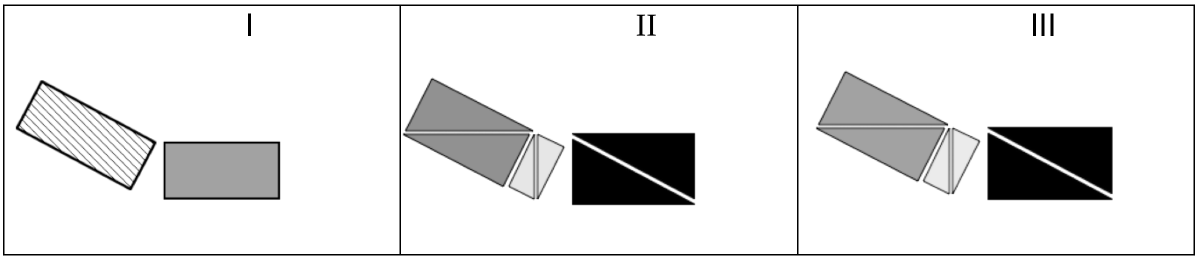


Figura 8: Decomposição e reconfiguração de duas unidades figurais 2D

Mas, para vê-lo, será preciso ser capaz de reconhecer rapidamente (em menos de algumas dezenas de segundos) todas as unidades figurais 2D e 1D nessa configuração 2D. Uma vez que, para vê-lo, não basta que alguém lhe explique ou mostre, o que implica a linearidade de várias centrações sucessivas do olhar; é preciso captá-lo sinopticamente em um único olhar, em outras palavras, em uma intuição. Descartes já havia explicado isso claramente em 1627 em *les Règles pour la direction de l'esprit* (as Regras para a Direção da Mente)[9]. A decomposição de uma unidade figural 1D que traçamos, das configurações figurais $\frac{\text{2D ou 3D}}{\text{2D}}$ em duas outras unidades figurais 2D justapostas e sua reconfiguração por justaposição ou por superposição em outra configuração 2D é o cerne de todos os tratamentos puramente figurais[10]. Os tratamentos puramente figurais são as abordagens heurísticas específicas da geometria elementar. E em todos os problemas que envolvem a comparação qualitativa de áreas de superfície, há muito tempo eles são considerados prova[11].

I. 3 As grades quadriculares são uma ajuda ou um obstáculo para ver ou aprender a ver?

O obstáculo recorrente que a grande maioria dos alunos não consegue superar parece ser a operação figural de sobrepor parcialmente duas unidades figurais 2D. Isso ocorre porque é muito difícil identificar e contar todas as unidades figurais 2D em uma configuração 2D, como pode ser visto neste exemplo e em muitos outros. Da mesma forma ocorre, se uma figura for dividida pelo traçado de uma unidade figural 1D que a separa em duas outras unidades figurais 2D.

As grades quadriculares, ao contrário, parecem ser um auxílio para os alunos. Elas são uma justaposição de unidades 2D homogêneas de área igual, que podem ser contadas imediatamente. E,

[9] As regras XI, XII, XIV-XVIII.
[10] Duval, 2014, p.16.
[11] Duval, 2015, p.162.

do ponto de vista matemático, eles têm uma dupla vantagem: em primeiro lugar, podem ser usadas para pavimentar o plano e; em segundo lugar, podem ser usadas como uma ferramenta para dividir qualquer unidade figural 2D e resolver problemas qualitativos, como a comparação de áreas de duas superfícies diferentes.

Tomemos, por exemplo, as três configurações A, B e C que foram um dos problemas de pesquisa propostos no Transalpine Mathematical Rally (a coluna da esquerda na Figura 9).
Os resultados mostraram que isso não ajudou a superar o obstáculo. Por que não? O recurso à grade quadriculada força o olhar a se mover para frente e para trás entre duas configurações 2D:

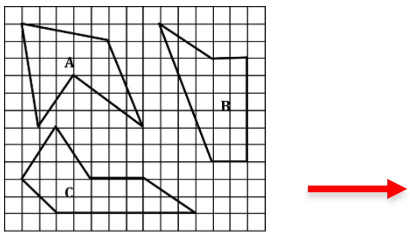
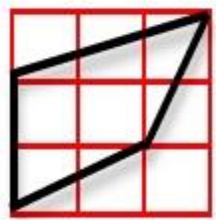
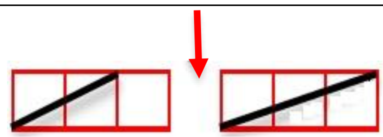
	
Patrícia e Brigitte olham para esses três polígonos e se perguntam se todos eles têm a mesma área. **Diga se as áreas desses três polígonos são iguais ou *diferentes*?** Mostre como você chegou às suas respostas?	

Figura 9: O que você precisa reconhecer em um relance

- A configuração da grade que forma a figura-fundo 2D;

- As três configurações A, B e C, que são apresentadas como as "Figuras geométricas" fornecidas para o problema a ser resolvido.

Um zoom em qualquer parte das três figuras geométricas dadas revela a mesma configuração sobre figura-fundo 2D. E essa configuração se divide em duas configurações retangulares de três casas e duas casas (coluna da direita na Figura 9).

Portanto, você precisa reconhecer rapidamente:

- Os cinco quadrados da grade, que são divididos em unidades retangulares de três quadrados e dois quadrados (as duas setas vermelhas);

- A unidade 1D que os divide em duas unidades.

É somente a partir dessa decomposição heurística, que é uma decomposição mereológica:

- Utilizar a propriedade geométrica da diagonal para contar o número de quadrados de cada retângulo e dividir por 2, sem contar duas vezes os quadrados onde as unidades retangulares se sobrepõem.

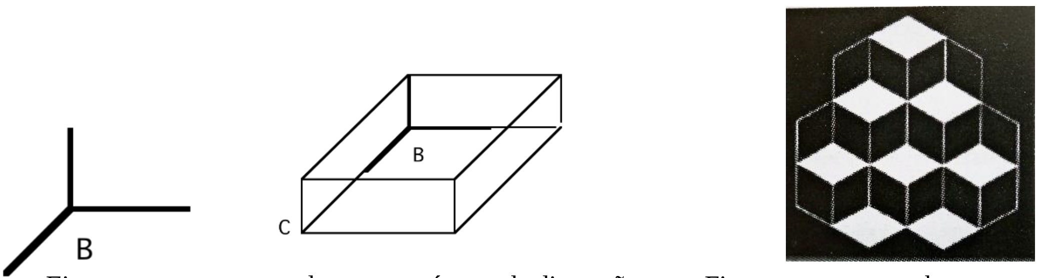
- Aplicar a fórmula para calcular a área dos retângulos.

De outra forma, a grade se torna um empecilho.

I.4 Como a terceira dimensão se impõe visualmente nas figuras produzidas na superfície 2D de uma mídia física?

Para responder a essa pergunta, precisamos levar em conta dois tipos de fenômenos que concerne à relação do olhar e as representações instrumentalmente produzidas sobre uma superfície 2D. A primeira é uma mudança repentina no olhar das unidades figurais 1D, que são imediatamente reconhecidas como as bordas de unidades figurais 2D ou como as bordas das unidades figurais 3D. E nenhuma hipótese dada sobre o que a figura representa nos permite fazer, como podemos ver nas três configurações da Figura 10.

O ponto B pode ser visto como o ponto de interseção de 3 unidades figurais no plano ou como o vértice de um sólido 3D. E o preenchimento em preto ou branco das unidades figurais na terceira configuração significa que você precisa ver os cubos, que aparecem recuados ou em relevo. Mas em um caso haverá seis cubos, e no outro, sete! De modo mais geral, quando um contraste de cores delimita zonas 2D, uma configuração de unidades 2D é percebida como uma justaposição de unidades figurais 3D, algumas parecendo salientes e outras recuadas.

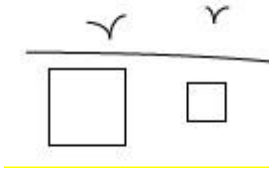


Figuras transparentes: alternam o número de dimensões. A parte superior da caixa e o lado CB que estão totalmente visíveis ou a face interior e o lado CB?

Figuras em preto e branco ou em cores: nenhuma alteração no número de dimensões. (D'Amore 2015, p. 441)

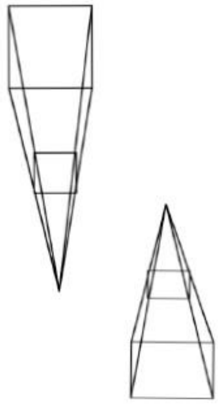
Figura 10: A ambiguidade dos desenhos e a mudança do olhar

O segundo tipo de fenômeno afeta diretamente nossa **percepção da terceira dimensão**. Para analisar isso, precisamos comparar a maneira como a terceira dimensão se impõe à nossa percepção do espaço 3D no qual nos movemos, com a construção da perspectiva em um desenho e com as configurações 2D construídas para visualizar relações homotéticas por meio da interseção de linhas retas em um ponto além das unidades figurais 2D que elas unem, como pode ser visto nas três configurações da Figura 11.



1. Percepção da terceira dimensão do espaço

2. A Trindade, afresco na igreja de Santa Maria Novella em Florença. Masaccio, 1425-1426



3. Razões homotéticas de linhas retas concorrentes.[12]

Figura 11: a terceira dimensão: percepção, representação em perspectiva e homoteticidade de linhas que se cruzam[13]

Duas noções são importantes para entender a diferença entre a percepção do espaço 3D e as duas construções possíveis da representação da terceira dimensão: a primeira é o **horizonte**, popularizado por Husserl em sua análise da modalidade cognitiva da percepção; a segunda é a linha, não como uma unidade figural 1D que o olhar distinguiria como tal, mas como uma **linha de fuga**, ou seja, como a distância cada vez maior das unidades figurais 2D do olhar que as mira.

Podemos, então, entender por que a percepção da terceira dimensão do espaço se opõe às duas possíveis representações da terceira dimensão e como essas duas possíveis representações são radicalmente diferentes uma da outra:

- A linha do horizonte é **a linha de fuga da superfície 2D da Terra**, que separa todos **os corpos que estão acima dessa linha daqueles que estão abaixo dela**, mas na superfície da Terra;

- O que é comum a ambas as representações é a organização da configuração 2D a partir **de um ponto de fuga**. No famoso afresco de Masaccio (ver Figura 11), o ponto de fuga está no horizonte, na altura dos olhos[14];
- Na terceira configuração, não há linha do horizonte. As quatro linhas retas concorrentes começam dos vértices da maior unidade figural 2D e vão em direção a **um ponto de fuga fora** de todas as outras unidades figurais, que diminuem segundo proporções homotéticas.

[12] Duval, 1995, p. 153, Fig.7. Classification of the homothecic plane representation. Lemonidis, 1990, pp.58-59.
[13] Duval, 2018, p. 236.
[14] Thuillier, 1984.

Recapitulando: Uma comparação dos vários tipos possíveis de visualização que podem ser intencionalmente produzidos em um suporte 2D, e dos quais acabamos de apresentar um *corpus* nas Figuras 3, 6, 7, 8, 9 e 10, nos permite identificar os vários fatores semiocognitivos que influenciam o que o olhar pode ou não ver.

Olhar implica necessariamente que **reconhecemos tudo ou parte do que vemos**. Por que o ensino de geometria elementar no ensino básico é organizado sem uma educação sobre o olhar? Ora, a educação do olhar consiste em **conscientizar os alunos sobre as rupturas** e, portanto, sobre os saltos semiocognitivos a serem feitos ao passar de um tipo a outro de representação visual.

I.5 Ruptura e criatividade das representações semióticas em relação às representações não semióticas.

A foto de 600 guarda-chuvas abertos para cobrir uma praça é uma representação icônica e não semiótica. De modo mais geral, uma foto, se não for posteriormente retrabalhada, é o tipo de representação icônica por excelência, uma vez reproduz objetivamente a realidade percebida que captura. Além disso, as fotos são usadas como prova de que uma coisa realmente era o que se dizia ser. Ao contrário, as representações semióticas, produzidas à mão livre, como esboços ou desenhos, e aquelas construídas instrumentalmente, como “figuras geométricas”, são visualizações que simplificam e organizam o que o olho vê de acordo com tudo o que ele já viu e memorizou. Em outras palavras, elas se distanciam da realidade concreta cuja percepção imediata impõe evidências, excluindo todo o resto, e objetivam o que reconhecemos ou entendemos no que vemos.

Uma comparação entre a fotografia dos guarda-chuvas em Aix-en-Provence, a percepção dos objetos materiais no espaço ao redor e a visualização específica das representações semióticas mostram onde e como suas respectivas produções se opõem, como pode ser visto nos diagramas da Figura 12 a seguir.

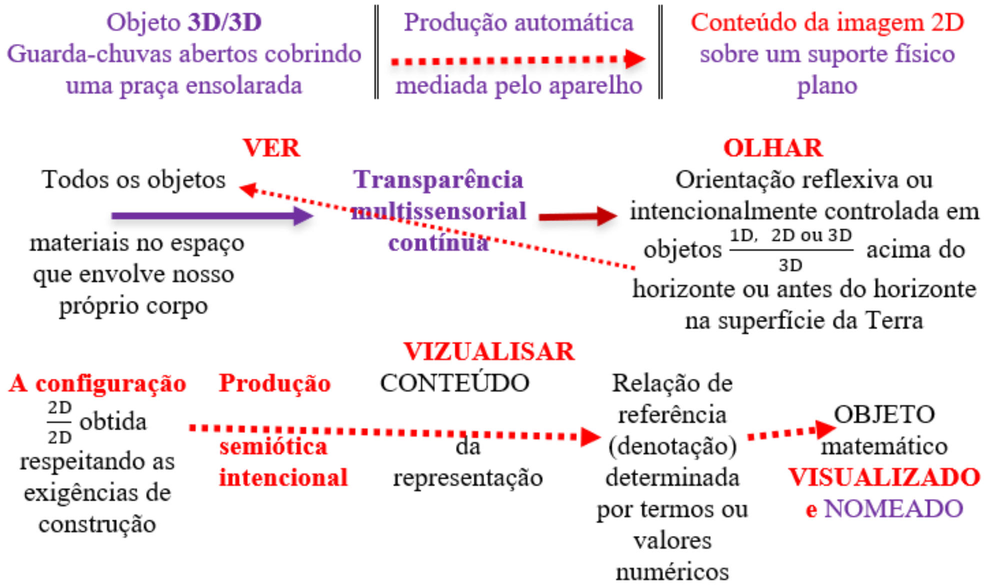


Figura 12: Os três processos cognitivos para reconhecer o que vemos ou olhamos

A relação de causalidade entre os objetos percebidos ou representados é invertida com as representações semióticas. Essa inversão explica a ruptura que elas operam com as fotografias e com a percepção dos objetos no espaço. E o modo de produção das representações semióticas é intencional e imediata e retroativamente controlável no processo passo a passo de sua produção. A natureza intencional de sua produção explica a criatividade dos registros que produzem representações semióticas e as possibilidades ilimitadas de exploração que elas oferecem. Para verificar isso, basta observar como a terceira dimensão do espaço é imposta visualmente (ver item I e configurações 1 e 3 na Figura 11).

I.6 Hierarquização de unidades figurais na visualização geométrica.

A hierarquização das unidades figurais 1D, 2D e 3D na visualização geométrica é o resultado mais importante de todas as análises anteriores. Em relação à primeira pergunta, "O que as figuras geométricas nos permitem ver?", que comanda essas análises, essa hierarquização significa duas coisas:

- As unidades figurais **menores se fundem com a unidade figural maior cujo reconhecimento é necessário**. Dessa forma, as unidades figurais 1D tornam-se **as bordas** de um contorno fechado 2D, como os lados de um polígono ou as diagonais que o dividem em duas unidades figurais 3D. Por exemplo, na Figura 4, a unidade de figura AD se funde com a unidade ABCD, que é uma unidade de figural 2D. Da mesma forma, as unidades figurais 2D tornam-se **as faces** de uma unidade de figura 3D e as unidades de figura 1D tornam-se **as bordas**. Por exemplo, na Figura 10, as unidades figurais 1D que irradiam do ponto B tornam-se as bordas da unidade figural 3D;

- Cada unidade figural de dimensão inferior pode pertencer a **duas unidades dimensionais superiores,** se essas duas unidades estiverem **parcialmente sobrepostas**. Por exemplo, na Figura 7, as duas unidades figurais AD e DC, que são unidades figurais 1D, pertencem a duas unidades figurais 2D diferentes.

A desconstrução de unidades figurais 1D em configurações de unidades figurais 0D é frequentemente negligenciada na construção instrumental de configurações 2D. Se a régua e o compasso forem usados, recorre-se a uma borracha para apagar os suportes retos que tendem a interromper perceptualmente o reconhecimento de contornos fechados. E se você usar um software de construção, o contorno fechado aparecerá imediatamente.

As setas azuis, descendentes e depois ascendentes, na Figura 13 a seguir mostram a complexidade visual da "desconstrução dimensional de formas", que não deve ser confundida com a decomposição de unidades figurativas 2D e sua reconfiguração em outras configurações 2D (supra, Figura 8)[15].

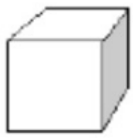
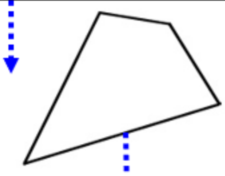
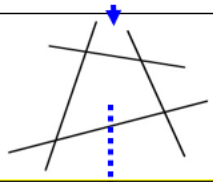
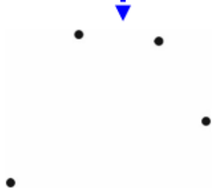
Número de dimensões	**Visualização**	USO MATEMÁTICO DA LINGUAGEM E DO VOCABULÁRIO GEOMÉTRICO
3D		**Um poliedro**
2D		Um polígono: - a **face de um poliedro**; - ou a figura obtida **por um plano de interseção** com um poliedro.
1D		**Retas** que são: - perpendiculares, paralelas ou que se cruzam; - ou **suporte de segmentos**.
0D		**Pontos de interseção** que são: - as extremidades de um segmento; - o ponto médio de um segmento; - os vértices de um polígono.

Figura 13: Desconstrução dimensional das formas percebidas

[15] Duval, 2005, p. 47.

II REGISTROS QUE PRODUZEM REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

As configurações geométricas $\frac{1D,\ 2D \text{ ou } 3D}{2D}$ podem ser transformadas em outras configurações visuais para resolver problemas ou provar qualitativamente as propriedades de objetos geométricos 1D, 2D ou 3D (ver Figuras 7 e 8). É um registro que produz representações semióticas, pois permite que você produza quantas configurações geométricas quiser e, acima de tudo, substitua uma pela outra para destacar visualmente as invariâncias (**III** da Figura 14 a seguir)[16].

Mas esses tratamentos puramente figurais necessariamente mobilizam pelo menos um dos dois registros discursivos: da linguagem natural ou da escrita numérica ou algébrica (**I** e **III** da Figura 14). A linguagem natural é necessária para apresentar um problema em relação a uma propriedade geométrica ou a um cálculo que envolva números e/ou quantidades. E isso exige que mapeemos unidades de sentido produzidas por uma das operações específicas da linguagem em outras unidades de sentido produzidas por uma das operações específicas do registro de escritas simbólicas (**III** da Figura 14) ou do registro de configurações geométricas (**II** da Figura 14). Nesse sentido, a convicção de que ele teria provas sem usar a linguagem natural é falaciosa[17]. É possível provar sem palavras, mas não sem escrever equações ao lado de configurações geométricas, em outras palavras, sem mobilizar o registro discursivo da escrita simbólica (**III** da Figura 14).

As questões levantadas pela análise da atividade matemática e da resolução de problemas matemáticos, portanto, dizem respeito às conversões de representações semióticas em representações de um outro registro. Essas conversões são substituições *salva denotatione* e não *salva veritate*[18]. Em outras palavras, as conversões que alteram completamente o conteúdo de uma determinada representação são feitas sem alterar o objeto ao qual a representação se refere e sem necessidade de justificativa ou prova.

---

[16] Duval, 2015, pp.160-163. Duval, 2017, pp. 61-62.
[17] Nelsen, Roger. B., (1993). *Proofs without Words. Exercises in visual Thinking*. MAA.
[18] Ver o apêndice “Expressões completas e expressões incompletas”.

	Registros **DISCURSIVOS.** Linearidade **das expressões que são unidades de significado**	Registros **NÃO DISCURSIVOS**: Compreensão de uma organização bidimensional de unidades figurais 1D, 2D ou 3D
Registros **multifuncionais**: o tratamento é **NÃO ALGORÍTMIZÁVEL**	**I. LÍNGUAS FALADAS: três operações hierarquicamente incluídas** (nomeação de objetos, enunciação e raciocínio) Dois modos de produção: ***a fala e a escrita***	**II. Configuração geométrica: três operações independentes** (construção instrumental, divisão e reconfiguração mereológica, desconstrução dimensional) **ICÔNICO**: desenho, esboço
Registros **monofuncional**: o processamento é **ALGORITMIZÁVEL**	**III. ESCRITA SIMBÓLICA** (sistemas de numeração, escrita algébrica, linguagens formais). **Operações de substituição ilimitadas.** Modo de produção: **escrita**	**IV. GRÁFICOS** **ESQUEMAS:** Junções entre pontos, marcadas por **setas** **GRÁFICOS CARTESIANOS:** Três operações (zoom, interpolação e mudança de eixo)

Figura 14: Os quatro tipos de registros que produzem representações semióticas[19].

Essas conversões são baseadas na CORRESPONDÊNCIA ENTRE UNIDADES DE SENTIDO que são produzidas por uma das operações específicas do registro de origem com outras unidades de sentido produzidas por uma das operações específicas do registro de destino.

II.1 O registro das línguas faladas

As línguas naturais faladas são o primeiro registro a produzir representações semióticas.

A PALAVRA mobiliza um idioma comum compartilhado com outros falantes (francês, inglês, mandarim). Os elementos básicos de um idioma comum são as palavras. Mas o que um falante diz e o que o ouvinte ouve são unidades de sentido expressas intencionalmente. Ora, nem todas as palavras desempenham a mesma função no que um interlocutor diz:

- Que podem ser **associadas a coisas ou a imagens** e formam o léxico da linguagem;
- Que podem ser associadas a relações ou ações (verbos, negação) e podem ser usados para formar **expressões completas** que são gramaticalmente chamadas de “frases” ou, logicamente de “proposições”;
- Que são, enfim, operadores associados às palavras que formam o léxico da língua (determinantes, modalizadores, negação) e formam **expressões incompletas**.

Expressões incompletas são unidades de sentido que não são nem verdadeiras nem falsas. Seu único objetivo é permitir que se identifique claramente e, portanto, reconheça sobre o que o locutor fala. O sentido das expressões completas está, ao contrário, no valor que elas têm desde o início. E aqui podemos distinguir três dimensões do sentido, dependendo se o valor é um valor de verdade (verdadeiro, falso, indecidível), um valor epistêmico (evidente, plausível, possível, absurdo) ou um valor pragmático (apelo, pedido, ordem, promessa). Na dimensão pragmática, a fala é um ato que envolve o locutor ou o seu interlocutor. Para formar as unidades de sentido específicas

[19] Duval, 2017, p. 85, Fig.4.6.

de cada um desses quatro níveis de organização do discurso, há várias OPERAÇÕES DISCURSIVAS possíveis, e não apenas uma. Um idioma permite vincular palavras com diferentes funções para formar **unidades de sentido** em quatro níveis de organização do discurso:

- Designar objetos usando três operações discursivas diferentes ou unidades de sentido em um registro diferente;
- Enunciar uma expressão completa e diferenciar os estatutos, os valores verdade ou os valores epistêmicos das proposições enunciadas e o grau em que elas são assumidas por aquele que a apresenta. Essa diferenciação pode ou não ser marcada linguisticamente. Mas é fundamental para entender como funciona o raciocínio e a ruptura entre a argumentação e todas as deduções válidas, e a ironia!
- Para ligar em uma declaração coerente de **expressões completas** para formar uma narrativa, uma descrição, uma explicação ou desenvolvimento de um raciocínio. Uma expressão completa pode conter duas proposições (em enunciados de teoremas, por exemplo).

O que divide radicalmente os idiomas falados, ou que já foram falados, é a invenção da **ESCRITA**, uma vez que a produção oral impõe restrições de economia às expressões completas ou incompletas que um locutor pode dizer e que seu interlocutor pode ouvir. Pelo contrário, a produção escrita nos libera de todas as restrições associadas à linearidade do discurso e às capacidades de memória de curto e longo prazo. Ela nos permite desenvolver o poder da língua para ampliar o escopo de expressões incompletas e, acima de tudo, para desencadear o questionamento, o distanciamento e o controle dos processos de pensamento que são a dinâmica imanente de todo conhecimento científico. Aqui, a escrita não cumpre mais uma função comunicativa, mas o que chamamos de **auto interação do eu consigo mesmo**, e que constitui o próprio ato de pensar[20].

Com base em diferentes operações discursivas:

- Desenvolver grades para analisar as produções orais e escritas de cada aluno, bem como as diferentes formulações usadas nos livros didáticos;
- Diagnosticar a origem das dificuldades que estão bloqueando um aluno, que geralmente não são as mesmas de um aluno para outro.

II. 2 Mapeamento das unidades de sentido em um enunciado para as unidades figurais de uma configuração geométrica

Para que esse mapeamento seja possível, é preciso codificar os pontos que são pontos de interseção, ou seja, unidades figurais 0D (vértice, centro, ponto médio, extremidade), por letras. É

[20] Duval, 2000, pp. 146, 162,164.

essa codificação que permite as passagens unicamente nas operações discursivas de designação as unidades figurais de menor dimensão. As unidades de sentido no enunciado a serem colocadas em correspondência com as unidades figurais 1D ou 2D são as expressões incompletas as quais as operações discursivas de designação permitem separar do enunciado. No problema apresentado na Figura 4, essas unidades de significado são:

Operações discursivas de designação	Unidade de sentido do enunciado	Unidades de configuração 2D
Determinação: quantificador Descrição definida Construção genitiva	Um retângulo ABCD Um círculo DE centro A QUE PASSA POR D. O comprimento do segmento EB.	Unidade figural **2D** Unidade figural **2D** Unidade figural 1D

Figura 15: correspondências relevantes a serem reconhecidas

Por fim, deve-se observar que esse problema mistura vocabulário geométrico (retângulo, círculo, segmento) com dados quantitativos que são codificados na configuração 2D fornecida para apresentar os dados do problema. Esse não é o caso do problema da Figura 5, no qual **não há dados numéricos** que permitam operações de medição e cálculo. Observemos que não há menção no enunciado das unidades figurais 1D, que pertencem, ao mesmo tempo, a uma das três unidades 2D retangulares como a diagonal de uma e como o lado ou a borda da outra.

Operações discursivas de designação e predicação	Unidades de sentido no enunciado	Unidades de configuração 2D
Construção genitiva Predicação	A área do retângulo ACEF a área do retângulo ABCD maior que ou menor que ou igual a ...	2 unidades **2D** retangular e parcialmente sobrepostas; 3 unidades **2D** triangulares justapostas e 2 outras com o mesmo formato

Figura 16: correspondências relevantes a serem reconhecidas

A comparação desses dois problemas suscita duas questões para a introdução da geometria elementar nas escolas de ensino fundamental.

Q.1 Devemos começar com atividades e problemas puramente qualitativos antes de introduzir atividades que envolvam dados numéricos e unidades de medida? Sim ou não?

É o funcionamento semiocognitivo da visualização geométrica que impõe essa questão. Esse processo se baseia na desconstrução dimensional das formas. E na Figura 13, no parágrafo I.6, isso é representado pelas setas azuis descendentes verticais e pelas setas vermelhas oblíquas duplas, enquanto **o discurso e o raciocínio matemático vão contra a desconstrução dimensional das formas** (as setas azuis ascendentes verticais). E isso nos leva à segunda pergunta:

Q.2 A maneira como o vocabulário geométrico básico é introduzido não é uma causa de incompreensão insuperável a médio e longo prazo? Cada um dos termos mais importantes **não deveria estar associado** a tarefas ou atividades de problemas puramente qualitativos que permitam aos alunos **coordená-los com as unidades figurais correspondentes**?

VISUALIZAÇÃO	OBJETOS FIGURAIS	PROPRIEDADES **relação entre DUAS unidades figurais 1D**	
		pertencentes a uma unidade figural 2D	**independente de pertencer a uma unidade 2D**
Unidades figurais 2D instantaneamente reconhecíveis (figuras típicas)	Quadrado, triângulo, paralelogramo, círculo, ângulo	Regular, convexo, côncavo, n lados, isósceles, equilátero, retângulo, agudo, obtuso, reto	Simetria axial Simetria central
Unidades figurais 1D mescladas perceptualmente em unidades 2D	Reta, segmento, lado, diagonal, raio, corda, curva, arco		Secante, paralela, Perpendicular, tangente
Unidades figurais 0D identificável, ou somente codificável em uma unidade 1D	Pontos **notáveis**: interseção, vértice, centro. Pontos **implícitos** que não podem ser vistos		Simetria

Figura 17: classificação do vocabulário geométrico básico.[21]

O PENSAMENTO é inseparável do registro das línguas faladas e escritas. Não pode haver pensamento sem linguagem. O que achamos que é puramente "mental" é uma linguagem internalizada ou a internalização de gestos de rastreamento 1D ou 2D. Os "conceitos" são identificados com palavras cujo sentido é definido em sentenças formuladas em um idioma comum (grego antigo, inglês, alemão etc.) e **que são condensadas semanticamente em palavras**. E fazemos de conta que as definições são tão imediatamente acessíveis aos alunos o quanto são para os matemáticos.

II.3 O registro de escritos simbólicos.

Com o advento da escrita, entre 4000 e 3000 antes da nossa era, surgiu um terceiro registro de representações simbólicas que se impôs, o **registro da escrita simbólica**[22]. Esse registro é um **registro discursivo**, como o das línguas faladas. Eles podem ser usados para produzir dois tipos de unidades de sentido: A característica especial desse tipo de registro em comparação com todos os outros tipos de registro é a possibilidade ilimitada de substituir expressões incompletas e expressões

[21] Duval, 2015, p. 164.
[22] Duval, 2020, pp. 430-432.

completas umas pelas outras.[23] No entanto, esse registro é radicalmente oposto ao registro das línguas em dois pontos cruciais. Ele é **monofuncional**, não multifuncional, e cumpre apenas a função de tratamento, e não a de comunicação ou objetivação. E é **totalmente algoritmizável**, permitindo a realização de todas as operações de cálculo numérico e literal. Esse terceiro registro surgiu como a "linguagem matemática" por excelência a partir dos séculos XVI e XVII, com o desenvolvimento da álgebra e da análise. A propriedade específica desse tipo de registro em comparação com todos os outros tipos de registro é a possibilidade ilimitada de **substituir expressões incompletas e as expressões completas** umas pelas outra[24].

Ninguém confundirá os dígitos com os números aos quais eles se referem, pois rapidamente se torna impossível se referir aos números pelas palavras que se diz ao contar. Um sistema de numeração é um sistema semiótico com pelo menos dois dígitos formando sua base e, na sequência de dígitos que podem ser formados, um valor posicional para cada dígito na base. **Mas isso não é suficiente para que um sistema de numeração seja um registro** que produz representações semióticas. Dois tipos de símbolos **devem ser adicionados a ele**: símbolos de operação para formar expressões incompletas e um símbolo de relação ("=", "≥") para formar uma expressão completa, uma vez que essa adição permite que **se produza quantas designações diferentes quiser para um mesmo número**.

1. Sistema de escrita **decimal** ou binário	4 (Dígito que denota um número) ou (1 ou 0) 44 (Dois dígitos que designam outro número) ou (10), (101), (1001)
2. **Expressão incompleta:** ASSOCIAÇÃO de pelo menos um número e de **UM SÍMBOLO DE OPERAÇÃO**	**(2 + 2), (5 – 1), (2 × 2) , (8 : 2) , 8/2** **40 + 4, 12 × 2** (Sintagmas operatórios)

Figura 18: Sistema semiótico para escrever números e registro de escritas simbólicas.

O poder de processamento do registro de escrita simbólica vem da propriedade de que as igualdades e equações numéricas podem ser substituídas umas pelas outras por equivalência semântica, em vez de aplicar regras sintáticas. Assim, essa equivalência semântica permite entender a regra de sinais (para operações e para assinalar números negativos) quando transferimos a expressão incompleta "+ 2" ou "- (- 2)" de um membro ao outro do símbolo de relação "="[25]:

$$3 + 2 = 3 - (-2) \text{ e } (-3) - (-2) = (-3) + 2$$

O mapeamento das unidades de sentido em uma formulação do problema com dois níveis de unidades de sentido da escrita simbólica oferece duas questões:

[23] Duval et Pluvinage, 2016, pp. 123-125 et 144-147.
[24] Duval, 2018, pp. 8-11, § 1.2. The semiotic revolution: towards a new knowledge anlysis scheme.
[25] *Ibid.*, p. 40, § 2.2.2.2, Fig. 2.12. The variations in writing to represent the addition operations with relative integers.

- a primeira (Q.3) diz respeito à oposição irredutível entre as expressões completas produzidas em cada um dos dois registros de discurso I e III (Figura 14). No registro da escrita numérica, **as igualdades numéricas ou literais que são equações permanecem verdadeiras quando invertemos** os dois membros em torno do símbolo de relação “=”. Obviamente, esse não é o caso das sentenças e proposições que ouvimos ou lemos. A **recíproca pode parecer** implausível ou absurda e, ao mesmo tempo, fazer sentido.

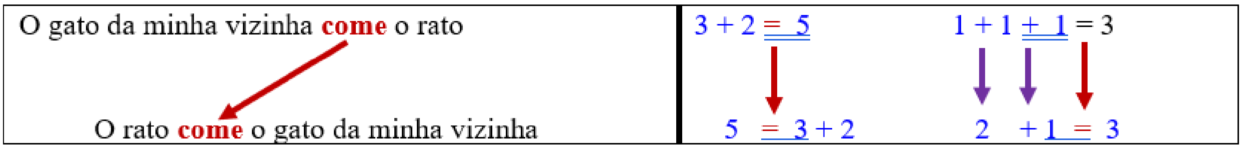


Figura 19: A recíproca de uma proposição e a equivalência semântica dos dois membros de uma equação.

Q.3 A prática primordial e predominante de uma língua, que cria um sentido para a compreensão das frases, **não impõe uma compreensão errônea das igualdades numéricas**, tornando o segundo membro da igualdade **um resultado** e impossibilitando antecipadamente a compreensão do cálculo com negativos e a resolução de equações algébricas?

- a segunda questão (Q.4) diz respeito à transição do cálculo numérico para o cálculo literal. A introdução de letras permite uma operação de designação funcional que não existe no registro multifuncional e não algorítmico das línguas. Além disso, as letras podem assumir diferentes estatutos em fórmulas e equações: incógnita, constante, variável etc.

Q.4 Como as letras devem ser introduzidas e a partir do que? Primeiro como uma incógnita ou como uma variável? Primeiramente, **a partir de fórmulas que podem ser usadas na realidade** ou **a partir da resolução de equações**?

Essas quatro perguntas Q.1, Q.2, Q.3 e Q.4, são tão cruciais que o ensino de matemática deve responder. Não podemos tratar delas aqui, mesmo se nos limitarmos às perguntas Q.3 e Q.4. Paradoxalmente, elas só foram abordadas recentemente, embora as pesquisas didáticas voltadas para o ensino da álgebra elementar remontem, pelo menos, à década de 1980[26].

Por fim, de um ponto de vista estritamente cognitivo, é essencial não confundir a visualização geométrica, ou seja, o registro **III** (Figura 14) com a visualização analítica, ou seja, o registro **IV** (Figura 14). Visualização analítica envolvendo eixos graduados e orientados, que constroem a **figura-fundo** de uma malha quadriculada na qual se destacam as unidades figurais 1D ou 2D. E essa figura-fundo torna possível vincular o registro de escritas simbólicas aos registros de

[26] Ver as cinco referências agrupadas sob o título “O registro de escritos simbólicos”.

formas geométricas 1D, 2D e 3D para visualizar polinômios. A visualização analítica se desenvolveu a partir da Geometria de Descartes (1637).

III. REPRESENTAÇÕES “ICÔNICAS”: IMAGEM OU SEMELHANÇA?

A partir da década de 1980, as pesquisas em educação matemática começaram a importar as noções de “signo”, “representação icônica” e “índice” desenvolvidas por Peirce. Para entendê-las, precisamos lembrar que Peirce procurou descrever o papel das representações e dos signos em **todas as formas de atividade cognitiva**, desde a adaptação ao ambiente imediato até o conhecimento científico. A complexidade de sua definição de signo reflete a amplitude do campo que ele queria descrever:

> **Um signo, ou *representamen***, é algo que se dirige a alguém e representa algo diferente de si mesmo (**referência**). Mas o signo não representa o objeto como ele é em si mesmo. Ele o representa em termos de outro signo que cria na mente da pessoa a quem é dirigido (interpretação) e as três maneiras possíveis pelas quais o que um signo representa (**Objeto**) determina a natureza dos signos (**ícone, símbolo, índice**)[27].

O termo “ícone” é uma transcrição da palavra grega (*eikon*) que Platão usou para definir **qualquer imagem como um reflexo** e para significar **a semelhança que resulta da imitação de um modelo** para criar um objeto[28].

Observemos que não há conexão entre as duas relações usadas por Peirce para distinguir os três tipos de signos. Na primeira relação, os signos e as representações são caracterizados como *representamen* com base apenas em seu conteúdo. Na segunda relação, os signos e as representações são considerados o resultado ou o efeito do fenômeno ou do objeto que evocam. Pode ser um **efeito direto**, como fumaça, pegadas ou vestígios. Mas também pode ser um **efeito indireto mediado por um sistema físico** (uma câmera) ou um sistema neurofisiológico (memória visual). Para estabelecer sua distinção, Peirce se limita a justapor a relação de semelhança e a relação de efeito $\rightarrow$ causa[29]:

---

[27] Peirce, C. S. , 1931. *Collected papers, II. Elements of Logic*. Cambridge: Harvard University Press. p. 228.
[28] Platon, *République*, 476c, 509e, 510e.
[29] Duval, 2006, pp. 95-96.

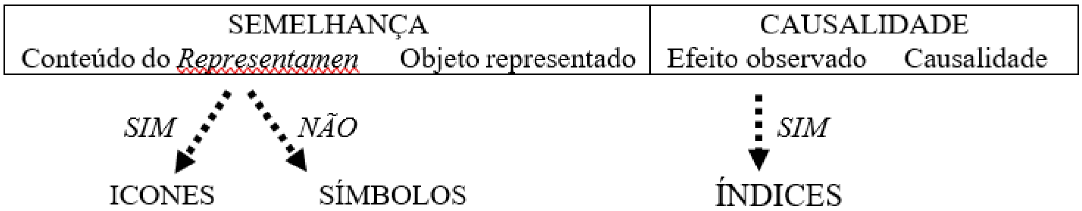


Figura 20: As duas relações que determinam a relação de um signo com o objeto representado

A relação de causalidade pode ser vista em dois sentidos contrários. E isso nos leva a não mais distinguir **os signos dos sinais**. De fato, ela pode ser vista como:

- No sentido de efeito → causa, como acima. Os "índices", que são um dos três tipos de signo que Peirce distingue, são caracterizados pela relação "efeito → causa". Eles abrangem todos os fenômenos naturais que levam à busca de sua causa ou origem: reflexos, traços, vestígios, sintomas etc. Peirce cita a percepção da fumaça. Os índices são os pais dos sinais que se caracterizam pela relação "**causa → efeito**";
- No sentido de causa → efeito, caso em que a causa deve desencadear uma ação. Por exemplo, semáforos em cruzamentos são sinais que devem desencadear uma **ação** reflexiva por parte dos motoristas. De modo mais geral, qualquer transmissão de informações em um sistema físico ou orgânico depende de **códigos** e **sinais**[30]. Os sinais cumprem uma função de controle, como pode ser visto na operação de todos os sistemas automatizados ou conscientes ou nas malhas de tráfego.

Nesses casos, as duas noções equivocadas e heterogêneas do conteúdo de uma representação e da causalidade são **REPRESENTAÇÕES NÃO SEMIÓTICAS**. Tudo o que tem a ver com as linguagens faladas e o continuum semântico das escritas simbólicas estão **globalmente envoltos no termo "símbolo"**. Esse termo, que parece dizer tudo, é de fato vago e geral. De modo mais geral, nas teorias sobre os processos de desenvolvimento do conhecimento comuns a todas as disciplinas ensinadas, a noção de sinal é misturada com a de signo, ou até mesmo a substitui.

III.2 O critério de semelhança e a determinação dos graus de iconicidade

Agora podemos analisar a iconicidade no registro das representações semióticas. "Semelhança" é um termo tão vago e geral quanto "símbolo". E muitas vezes é difícil reconhecer quando um desenho, esboço ou retrato se assemelha ao objeto real retratado. Isso ocorre porque as representações 2D/2D ou 3D/2D de objetos reais (3D/3D) podem variar completamente, dependendo do ponto de vista do objeto representado: de perto, de longe, de baixo, de cima, de

[30] Duval, 2018, § 3.1.1, Fig. 3.1, Comparison of registers and codes, pp. 47-48.

frente, de lado, de trás etc. Portanto, para o mesmo objeto, há uma infinidade de formas possíveis. Daí a ilusão de que as figuras são formas típicas. Como podemos reconhecer que uma imagem ou desenho se assemelha ao objeto que representa? Bresson propôs uma definição de reconhecimento cognitivo e não apenas visual de uma configuração 2D/2D. Ela se baseia no princípio de que não é suficiente nos limitarmos à congruência entre o contorno fechado global da configuração e o contorno do objeto representado. Também precisamos levar em conta as relações topológicas entre os elementos traçados dentro do contorno fechado[31].

> *Uma imagem, desenho ou esboço se assemelha ao objeto que representa quando as relações de vizinhança entre os elementos da configuração preservam as relações de vizinhança entre os elementos ou partes do objeto representado.*

O interesse dessa definição é triplo. Em primeiro lugar, ela nos permite distinguir três graus de iconicidade, como pode ser visto nas três representações visuais de um rosto da Figura 21 (Duval 2006).

A *representação figural* (A) conserva:

- A similaridade do contorno geral fechado;

- As relações de vizinhança entre as partes características de um rosto;

- e, acima de tudo, a semelhança de cada parte do rosto é, por si só, uma representação figural (olhos, nariz, boca etc.).

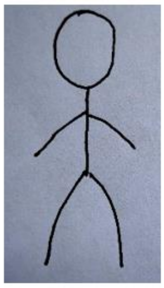
		
A. Representação figural: Retrato de Ginevra de Benci (1474?)	B. Representação esquemática: Rosto de perfil e rosto de frente (1936 em preto, 1946 em cores)	C. Representação simbólica

Figura 21: Graus de iconicidade no reconhecimento visual de faces.

A *representação esquemática* (B) conserva:
- A similaridade do contorno geral fechado;
- As relações de vizinhança entre as partes características de um rosto.
As partes do rosto, reduzidas a traços, perderam qualquer semelhança figural própria.
A *representação simbólica* (C) conserva:
- Apenas a similaridade do contorno fechado.

[31] Duval, 2006, p. 73.

Esse contorno representa uma cabeça ou um rosto na medida em que as relações de vizinhança entre os elementos da configuração preservam aquelas entre as partes do corpo. Obtém-se, assim, *símbolos icônicos* que permitem a comunicação imediata e econômica, por exemplo, em placas de trânsito ou para codificar informações em uma figura geométrica.

Deste modo, nos permite **dissociar a iconicidade** de uma representação semiótica, qualquer que seja seu grau de iconicidade **com a verossimilhança, implausibilidade ou impossibilidade** do que um desenho, um quadro ou afresco mostram[32].

Por fim, permite paradoxos cognitivos ao integrar uma palavra ou frase ao desenho ou um quadro, assim como, sem recorrer a palavras, torna visíveis objetos fisicamente impossíveis[33].

IV. CONSCIENTIZAR CADA ALUNO DO MODO DE TRABALHAR EM MATEMÁTICA.

A noção de "Registros que produzem representações semióticas" deu origem e continua dando origem a muitos mal-entendidos. E quando falamos de "registros", estamos nos referindo apenas à observação trivial do que **qualquer pessoa pode ver de fora, sem entender nada**, olhando livros didáticos, o que está escrito em tabelas, o que pode aparecer no monitor de um computador usando Excel, GeoGebra ou Cabri, ou mesmo folheando publicações de matemática. Vários tipos de representação semiótica são justapostos, começando com um continuum de escritos simbólicos, construções geométricas e gráficos. Além disso, há centenas de palavras técnicas usadas para designar "algo" na escrita simbólica, nos gráficos ou nas figuras geométricas. E "algo" nunca é a mesma coisa de um problema para o outro!

Diante disso, a grande maioria dos alunos se depara com a distância cognitiva que separa todas essas representações semióticas. Eles não veem como passar de um para o outro e como isso pode ajudar a resolver problemas práticos. Essa distância cognitiva constitui o obstáculo que os alunos enfrentam em matemática. E para enfrentar o desafio de garantir que todos os alunos até a idade de 15 ou 16 anos adquiram um conhecimento básico de matemática, a pesquisa didática e os professores estão se voltando para "teorias" que se concentram nos processos de aprendizagem ou desenvolvimento de conhecimento **que seriam comuns a todas as disciplinas ensinadas**. Que assim seja! Mas isso significa **que estamos apenas apresentando, explicando e ensinando conhecimentos matemáticos prontos.** E a maneira muito particular **pela qual pensamos e trabalhamos em matemática, ou seja, a maneira pela qual vemos, dizemos e substituímos** uma

[32] Duval, 2018, p. 224, Fig. 5, Représentation figurative onirique et schématisation idéalisant).
[33] D'Amore, 2023, pp. 50-53 e pp. 48-49.

representação semiótica por outra, **permanece impenetrável** para todos aqueles que não são matemáticos profissionais ou professores de matemática.

É enganoso falar sobre problemas a serem resolvidos para ajudar as pessoas a entender ou adquirir conhecimentos de aritmética, geometria e álgebra. Isso ocorre porque todas as pesquisas sobre resolução de problemas pressupõem que os alunos não sejam bloqueados pela **distância cognitiva** entre dois registros, aquele em que as restrições e os dados do problema são apresentados e aquele em que o tratamento levará à solução do problema. A distância cognitiva entre dois registros de representação semiótica não deve ser confundida com a “carga cognitiva”, que se refere à quantidade variável, mas limitada, de informações que podem ser levadas em conta e retidas na memória de curto prazo. Não faz sentido falar sobre “carga cognitiva” em matemática ou no aprendizado de matemática, pois as únicas coisas que contam são as unidades de sentido, unidades figurais ou expressões simbólicas cujo **RECONHECIMENTO IMEDIATO** depende das operações discursivas ou do tratamento que o aluno é capaz de fazer por ele mesmo, seja qual for a atividade proposta.

A distinção dos registros que produzem representações semióticas não é uma “teoria”, mas uma descrição de todas as variáveis semiocognitivas que precisam ser levadas em conta para analisar o funcionamento cognitivo subjacente a todas as atividades matemáticas ou atividades que usam o conhecimento matemático. Agora, a regra de ouro dessa análise é que um **registro só pode ser analisado com base nas variações que fazemos em outro registro**, para ver o que muda ou permanece invariável no outro registro. Para realizar essa análise, precisamos pegar cada vez o par de registros que será usado para introduzir objetos matemáticos e processos matemáticos vinculados a esses objetos. E, a cada vez, temos que mudar o registro que usamos como ponto de partida para observar as diferenças entre as conversões diretas e as conversões inversas das representações semióticas, e fazer com que os alunos as observem (ver Figura 14):

(Registro **III** → Registro **I)** et (Registro **I** → Registro **III**)

(Registro **III** → Registro **IV)** et (Registro **IV** → Registro **III**)

(Registro **II** → Registro **I**) et (Registro **I** → Registro **II**)

E aqui precisamos criar tarefas ou atividades em que cada aluno tome a iniciativa e tenha controle sobre a exploração a ser feita, com o objetivo de desenvolver a conscientização em vez de conhecimento, habilidades ou um saber-fazer.

REFERÊNCIAS

Análise comparativa de um *corpus* de representações semióticas: fotos, esboços, tabelas e "figuras geométricas".

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,10*, 5-53.

Duval, R. (2014). The first crucial Point in Geometry Learning: Visualization. Mediterranean Journal for Researche in Mathematics Education, *12* (1-2), 23-37.

Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique : «voir» en géométrie. Dans Lima, J. (Eds) *Du mot au concept. Figure*, 147-182. Grenoble: Presses Universitaires.

(Duval, R. (2018). Pour l'éducation du regard en géométrie élémentaire et en peinture (Traduction Bruno d'Amore). *La matematica e la sua didattica trad Bruno d'Amore*, *26* (2), 211-245. https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2018/10/Duval-Per-leducazione-allo-sguardo-in-geometria-elementare-e-in-pittura-MD-2018-26-2-3.pdf

Duval, R. (2020). Le premier seuil dans l'apprentissage de la géométrie : Dans « voir » les « figures» . *La Gazette de Transalpie*, 10, 7-17. https://www.icsedegliano.it/sezioni/rmt/materiali/Gazzetta/Gazzetta10.pdf

Jamm, F. (1981). A propos de la notion d'aire. *Rapports pour le D.E.A. de Didactique des Mathématiques,*
IREM (pp. 18-80). Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Thuillier P., 1984, Espace et perspective au Quattrocento. Dans *La Recherche, 160,* 13984-1398.

Lemonidis, E. C. (1990). Conception, réalization et résultats d´une expérience d´enseignement de l´homothétie. Thèse ULP, Strasbourg.

O registro das línguas faladas

Duval R., (1995). *Sémiosis et Pensée humaine,* Chap. II, Fig. 1 Fonctions et opérations discursives d'une langue, Fig.1, pp. 90-91. La fonction apophantique d'expression d'énoncés complets, pp.110-112.

Duval R. (2000). Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20/2, pp. 135-170.

Duval (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking — The registers of Semiotic Representation*. Springer Nature AG, 3.1. 3. pp. 54-56.

O registro das escritas simbólicas

Duval, R. *et al.* (2015). Ver e ensinar a Matemática de outra forma. Volume II. Introduzir a álgebra no ensino : Qual é o objetivo e como fazer isso ? São Paulo : Proem Editora.

Duval, R. et Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 21, pp. 119-152.

Duval, R. (2020). Les écritures symboliques et les opérations hétérogènes de substitution d'expressions. Les conditions de compréhension en algèbre élémentaire. In Méricles T. Moretti & Celia Finck Brandt (Ed.) *Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval.* (E-book, Revemat/UFSC, 2020-07-22), pp. 422-455. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203

Rauscher, J.-C. (2020). Le cas Jonathan. Le complexe de l'algèbre. Dans Méricles T. Moretti & Celia Finck Brandt (Orgs.) Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval (Revemat/UFSC, 2020-07-22). Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203

Rauscher, J-C. et Bauerle, Sophie. (2022). *Enseigner l'algèbre élémentaire. De quel point de vue et avec quelles activités ?* Communication présentée à ETM7, Juin.

As representações icônicas: imagem ou semelhança?

Duval, R., (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime* Vol. Especial, 2006, pp. 67-103.

D'Amore, B. et Duval, R. (2023). Similitudes y diferencias entre la educación de la mirada en geometría elemental y en arte figurativo. Educatión Matematica, 35(1), pp. 35-58.

APÊNDICE

Expressões completas ou incompletas
e substituições *salva veritate* ou *salva denotatione*

EXPRESSÕES COMPLETAS são sentenças simples no registro de um idioma falado e equações nos registros da escrita simbólica. O que elas têm em comum é o fato de serem expressões que podem ser substituídas umas pelas outras *salva veritate*.

Nas línguas faladas, uma proposição simples é articulada com um único verbo conjugado. Assim, para a proposição "a área do retângulo ADCB é igual à área do retângulo FECA", **posso substituir** *salva veritate* pela proposição "a área dos dois triângulos retângulos ABC e ADC é igual à área dos quatro triângulos retângulos (AFD, AD?, DEC, DC?)" (Fig. 7).
No registro de escritos semióticos, expressões completas são construídas em torno do símbolo de relação "=". Essas são igualdades e equações numéricas ou literais. Por exemplo:

- Para a igualdade $3 + 2 = 5$, **posso substituir** *salva veritate* por $3 = 5 – 2$;

- Para $(a + b) /2 = a/2 + b/2$, posso substituir $a + b = 2\times (a/2) + 2\times (b/2)$, mesmo que o símbolo da operação $\times$ seja omitido.

Essa substituição é feita por meio da transferência de um membro ao outro da igualdade de uma expressão incompleta mínima[34].

EXPRESSÕES INCOMPLETAS em um idioma falado e os membros de uma equação nos registros de escritas simbólicas são expressões que podem ser substituídas umas pelas outras *salva denotatione*.

Em uma frase simples, as expressões incompletas são a combinação de um objeto ou termo de propriedade e um determinante que o quantifica. Elas formam a frase nominal, que preenche o espaço vazio na frase verbal. Mas elas também podem vincular dois termos de objeto ou propriedade usando as preposições “de”, “em” ou “sobre”.

Assim, para o sintagma nominal “a área dos dois triângulos retângulos ABC e ADC”, posso substituir *salva denotatione* o sintagma nominal “a área dos quatro triângulos retângulos (AFD, AD?, DEC, DC?)” (Fig. 7). Também podemos formar sintagmas nominais com três ou quatro termos de objetos ou propriedades. Mas isso é feito com um custo cognitivo tão alto que as expressões incompletas se tornam incompreensíveis.

No registro da escrita simbólica, as expressões incompletas são a associação de um número ou uma letra com um símbolo operatório, por exemplo, um número inteiro relativo com um símbolo operatório para formar o que chamei de “sintagmas operatórios”.

Nas equações acima, “+2”, “-2”, “/2” e “2×” são expressões incompletas mínimas. Portanto, para a expressão incompleta "2×2", posso substituir *salva denotatione*, “1+1+1+1”, “2+2”, “8 / 2”, “$\sqrt{16}$”. E isto é apenas o começo de uma lista interminável. Mas, diferentemente dos sintagmas nominais em idiomas falados, podemos incluir umas nas outras quantas expressões mínimas incompletas quisermos.

Obviamente, essas duas operações de substituição referentes a expressões completas e expressões incompletas não devem ser confundidas com o raciocínio que usa definições, axiomas ou teoremas. Esse tipo de raciocínio diz respeito a uma proposição formada pela combinação de duas proposições simples, a primeira das quais tem o status de uma condição a ser cumprida, e a segunda de uma proposição a ser destacada se a condição for cumprida (*modus ponens*).

[34] Duval, 2020, pp. 28-29 et 41-42.

ANNEXE

Le plaisir de voir, de comprendre, de dire et d'inventer…
en mathématiques, bien sûr !

R. Duval

Je n'ai pas vu les 600 parapluies qui ont recouvert la place François Villon à Aix-en Provence, mais seulement la photo que Méricles T. Moretti en a faite. Cette photo a capté mon regard et l'a retenu. Elle donne un étonnant éclairage sur ce que sont les registres producteurs de représentations sémiotiques !

Mon but n'est pas d'expliquer pourquoi cette photo a retenu mon regard ni comment elles éclairent ce que sont les registres de représentations sémiotiques, mais de faire entrer dans une démarche d'analyse pour répondre aux deux questions suivantes :

— Qu'est-ce que les photos, les images, et les figures géométrique, qui sont toutes produites sur la surface 2D d'un support physique 3D, donnent à voir ?

— Comment reconnaît-on ce que chacune de ces représentations donne à voir ?

La réponse à ces deux questions exige que l'on constitue d'abord un corpus de représentations visuelle le plus large possible.

PLAN

I. Analyse comparative d'un corpus de représentations sémiotiques : photos, dessins croquis, tableaux et « figures géométriques »

I.1 La photo et la réalité photographiée : comment analyser les passages de l'une à l'autre ?

I.2 Les figures géométriques instrumentalement construites : comment reconnaître rapidement les propriétés et les objets mathématiques visualisés ?

I.3 Les quadrillages sont-ils une aide ou un obstacle pour voir ou apprendre à voir ?

I.4 Comment la troisième dimension s'impose-t-elle visuellement dans les figures produites sur la surfacé 2D d'un support physique ?

I.5 La rupture et la créativité des représentations sémiotiques en regard des représentations non-sémiotiques.

I.6 La hiérarchisation des unités figurales dans la visualisation géométrique

II Les registres producteurs de représentations sémiotiques

II.1 Le registre des langues parlées

II.2 Mise en correspondance des unités de sens d'un énoncé et des unités figurales d'une configuration géométrique

II. 3 Le registre des écritures symboliques

III. Les représentations iconiques : image ou ressemblance ?

III.1 L'équivocité des notions d'icone et d'index

III.2 Le critère de ressemblance et la détermination de degrés d'iconicité

IV. Faire prendre conscience à chaque élève comment on travaille en mathématiques

I. Analyse comparative d’un corpus de représentations sémiotiques : photos, dessins, croquis, tableaux et « figures géométriques »

I.1 La photo et la réalité photographiée : comment analyser les passages de l’une à l’autre ?

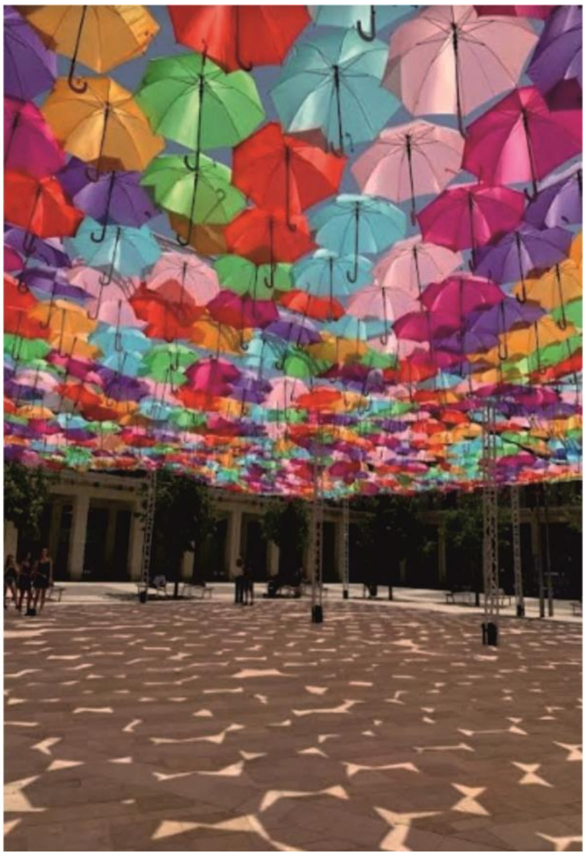


Figure 1. Photo des parapluies à la place François Villon à Aix-en Provence.

Commençons par comparer la ressemblance et, surtout, la différence entre la photo qui est une représentation et les objets matériels dans l’espace perçu environnant. Le schéma ci-dessous marque l’opposition des aller et retours du regard entre la photo, qui est une image 2D produite sur un support plan 2D, et les objets matériels 3D cadrés dans le champ de l’appareil.

La photo qui est **une représentation**	Cadrage par le système optique →	**Les 600** parapluies qui ont été photographiés
2D image / 2D Support physique plan	← Production automatique par l’appareil	3D Des parapluies ouverts / 3D Une place ensoleillée

Figure 2. Analyse des passages entre la photo et la réalité photographiée.

I.1.1 Critères d´analyse. Maintenant concentrons-nous sur le contenu de l’image 2D en rouge. Cette image est une CONFIGURATION de ce que nous appellerons des **unités figurales 1D, 2D ou 3D.** Les unités figurales sont **des unités qui se détachent** perceptivement **du fond constitué par l’image 2D** et qui sont immédiatement identifiables par des critères purement visuels. Ainsi :

— **Les unités figurales 1D** sont des traits tracés sur un fond homogène, blanc, noir ou vert ou de la même couleur. Mais les cas le plus riches sont ceux où les traits sont tracés sur un fond hétérogène, comme ici dans l'image 2D, et surtout avec les représentations graphique cartésiennes où le fond est le quadrillage du plan par deux axes gradués et orientés. **Sur la photo, les unités figurales 1D sont les traits noirs** que nous reconnaissons comme les manches de chaque parapluie

— **Les unités figurales 2D** sont les angles du plan ou sont les surfaces délimitées par un contour fermé. Elles sont immédiatement identifiables par les bords d'une surface coloriée ou par les unîtes figurale 1D qui en tracent le contour fermé. Sur la photo, on identifie les parapluies par la couleur de leur toile. Et on reconnaît qu'ils sont ouverts à ce que sur certains on peut distinguer des contours fermés qui opposent le dessus du parapluie et le dessous sous lequel on s'abrite. On reconnaît aussi que le bord des parapluies ouverts est octogonal. On reconnaît enfin les couleurs homogènes et séparées des ombres des parapluies qui abritent du soleil Elles confirment que les bords des parapluies ouverts sont de forme octogonale. Ces unités figurales 2D sont donc des représentations iconiques d'objets réels 3D/3D.

— **Les unités figurales 3D** sont celles qui sont déterminées par la profondeur de champ. Les unités 2D apparaissent en perspective plus ou moins proches ou éloignés, et donc plus ou moins nettes, selon la profondeur de champ choisie. Sur la photo, la grandeur des unités figurales 2D, c'est-à-dure des parapluies que l'on identifie, diminue rapidement **par rapport au plan focal du système optique** de l'appareil photo utilisé.

Les critères permettant de distinguer les unités figurales 1D, 3D et 3D mettent évidence la propriété sémio-cognitive des unités figurales. Les unités figurales peuvent être juxtaposées ou séparées et elles sont partiellement superposables. C'est cette propriété sémio-cognitive qui fait la puissance de visualisation de unités figurales.

Premières observations. L'analyse de la photo à partir de toutes les unités figurales que l'on peut perceptivement reconnaître dans son contenu permet d'établir trois observations :

Obs. 1 Il y a beaucoup plus d'unités figurales 1D et 2D que d'unités figurales 3D correspondant chacune à un parapluie ouvert. Par exemple, le parapluie vert qui apparaît presque entièrement en haut de la photo comporte (si je ne me trompe pas) :

— **4 bords saillants et 4 bords rentrants** entre les 8 pointes des baleines.

— **16 traits noirs en ajoutant aux 8 traits noirs** des baleines les 8 tiges de soutien

Il n'y a plus qu'à compter combien d'unités figurales 2D ces 8 bords et ces 16 tracés noirs permettent de reconnaître les parapluies sur la photo !

Obs. 2 Il y a beaucoup moins d'unités figurales 3D sur la photo qu'il n'y a de manches de parapluies que l'on peut compter. Et les toutes les unités figurales 2D finissent par se confondre dans ce qui apparaît être le bout de la place ou sa continuation en une allée. En tout cas il est impossible de dire combien de centaines de parapluies.

Obs. 3 Il n'y a pas de pavage possible du plan par des octogones, comme les ombres que les parapluies font sur le sol le montrent. Elles sont séparées, avec des interstices de grandeur variable selon l'orientation de chaque parapluie. Cette photo vient confirmer artistiquement un résultat mathématique.

Ces trois observations faites sur la photographie des 600 parapluies sont-elles également valables pour « les figures géométriques » construites en utilisant une règle, un compas ou un logiciel d'instructions comme GeoGebra ou Cabri-géomètre.

I.2 Les figures géométriques instrumentalement construites : comment reconnaître rapidement les propriétés et les objets mathématiques visualisés ?

Tous les instruments qui permettent de construire une figure géométrique doivent respecter les deux exigences suivantes :

— produire un tracé 1D OU 2D correspondant à une propriété géométrique, c'est-à-dire une propriété définie par un énoncé que l'on condense sémantiquement par un terme (droite, courbe, etc.)

— prendre en compte des grandeurs ou des rapports de grandeurs, et donc des valeurs numériques.

Ces deux exigences impliquent que toutes les unités figurales puissent être librement associées à des termes de propriétés ou à des valeurs numériques.

Analysons les trois configurations de la Figura 3. Elles sont constructibles avec des instruments qui produisent respectivement des unités figurales 1D (une règle graduée ou une règle non-graduée) et des unités figurales 2D (le compas) ou avec différents gabarits[1].

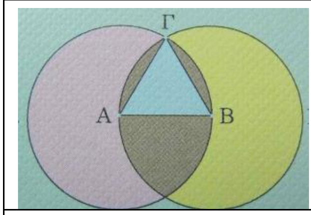
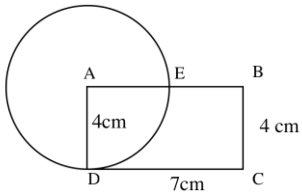
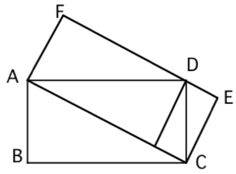
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td></td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>C1. Configuration codée par les associées à 3 des 4 points d'intersection permettant de désigner des unités figurales 1D ou 2D</td>
<td></td>
<td>C2. Configuration doublement codée (lettres et valeurs numériques), et associée à un énoncé de problème</td>
<td>C3. Configuration codée, associée à un énoncé de problème</td>
</tr>
</table>

Figure 3. Comparaison de trois configurations visuelles 2D/2D.

La configuration C1 comprend en tout 14 unité figurales 1D ou 2D[2] :

— 4 unités figurales 2D **dont 3 se superposent partiellement** faisant l'une au-dessus de l'autre, la quatrième étant celle marquée par les trois lettres se superposant aux trois autres.

— 5 unités figurales 2D **perceptivement occultées** et non reconnaissables immédiatement car elles résultent de la superposition des unités 2D précédentes.

— 5 unités figurales 1D correspondant aux **tracés des deux cercles** et à celui **des trois segments droits** AΓ, BΓ et AB.

Cette configuration purement visuelle paraître peu intéressante mathématiquement puisqu'elle associées à aucun énoncé de problème. Mais d'un point de vue sémio cognitif, elle est cruciale. Car elle permet de concevoir **des tests de reconnaissance rapide** des unités 2D ou 1D reconnues tout d'abord **en moins de 5** sec, c'est–à-dire au premier coup d'œil) puis **en moins d'une 1mn**. Au-delà, le regard des élèves ne change pas.

La configuration C2 est plus simple. Elle comprend en tout 9 unités figurales 2D ou 1D :

— 2 unités 2D partiellement superposées,

— 3 unités 2D perceptivement occultées,

[1] Duval et Godin, 2005, pp. 6-12.
[2] Duval (2015).

— 4 unités 1D correspondant aux tracés nécessaires pour sa construction.

Son intérêt vient de ce que des valeurs numériques sont associées aux tracés AD, BC et DC et permettent de poser le problème suivant qui a été dans le cadre de l'évaluation nationale CE2-sixième septembre en 1997[3] :

La résolution du problème requiert que l'on écrive et enchaîne deux égalités numériques. Mais pour les écrire, il faut pouvoir reconnaître très rapidement l'unité figurale 2D (EBCD) qui **est occultée par la superposition du cercle et du rectangle**, et les deux unités figurales 1D qui sont les deux rayons les deux rayons AE et AD. Qu'est-ce que les élèves ont vu et reconnu visuellement ?

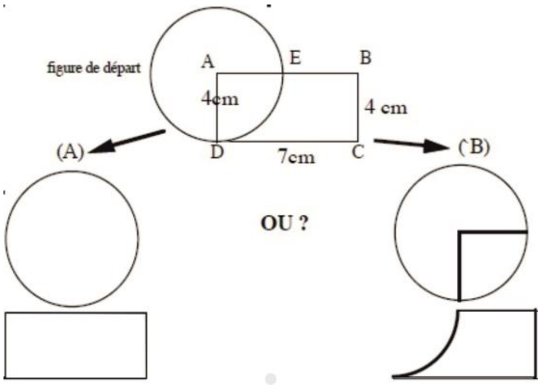
<table>
<tr><td colspan="2">Sur ce dessin à main levée (les vraies grandeurs sont écrites en cm) on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Trouve la longueur du segment [EB].</td></tr>
<tr><td>
</td><td><table>
<tr><td>AE vu comme un rayon de 4cm</td><td>9%</td></tr>
<tr><td>Réponses par mesure du tracé
(environ 2cm sur le tracé présenté)</td><td>16%</td></tr>
<tr><td>Réponses par estimation perceptive (E presque au milieu de AB : environ 3,5)</td><td>26%</td></tr>
<tr><td>Autres réponses</td><td>30%</td></tr>
<tr><td>Absence de réponses</td><td>16%</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Les 2 unités 2D partiellement superposées ou
3 unités 2D perceptivement occultées ?</td><td>Résultats d'un échantillon représentatif de 2604 élèves d'une population d'environ 800 000 élèves (11 ans)</td></tr>
</table>

Figure 4. Questionnaires d'évaluation pour la Configuration C2.

Les responsables de cette évaluation avaient ainsi commenté ces résultats :

> Cet exercice en rupture avec la géométrie de l'école élémentaire, pointe **la difficulté à passer de la perception visuelle à l'analyse de la figure**. Très difficile en début de 6ème, il devrait être mieux réussi en fin d'année, cette compétence étant clairement visée dans le programme de 6ème... (p.186).

Les commentateurs n'ont pas précisé que l'analyse de la figure devait être faite à partir des termes désignant deux objets géométriques « rectangle » et « cercle » et que la figure devait être regardée avec les lunettes de propriétés de ces deux objets. Mais ces lunettes ne corrigent pas « la perception visuelle » qui continue d'imposer son évidence. Car le regard doit pouvoir reconnaître rapidement deux unités figurales différentes de celles du cercle et du rectangle et deux unités figurales 1D qui appartiennent au cercle et pas seulement au rectangle. L'année suivante ce même problème avait été proposé avec une légère modification de la configuration pour que le point d'intersection E ne soit plus presque au milieu du côté AB. Et patatras ! Le pourcentage d'élèves ayant vu AE comme un rayon est seulement passé de 9% à 22%, celui des mesures sur la configuration a augmenté de 16% à 39%, celui des autres réponses a diminué et les non-réponses ont augmenté[4].

---

[3] Ministère de l'Education Nationale. Évaluation CE2-6ème Repères nationaux- Septembre 1997, *Les Dossiers* n° 100: (Juin 1998).

[4] Ministère de l'Education Nationale. Évaluation CE2-6ème Repères nationaux- Septembre 1998, *Les Dossiers* n°111: (Août, 1999).

La configuration C3 est plus complexe que la Configuration C2 en raison de la juxtaposition et de la superposition de contours fermés hétérogènes[5]. Elle comprend 17 unités figurales en tout

— 8 unités figurales 2D de **contours rectangulaires et triangulaires** : 3 unités de formes rectangulaires partiellement superposées, 5 unités de formes triangulaires juxtaposées. La complexité vient de ce que 2 de ces unités de forme triangulaire (AD ?) et (DC ?) sont **à la fois juxtaposées** à l'une des trois unités de formes rectangulaires et entièrement superposées à la même unité de forme rectangulaire (ADCB).

— 9 unités figurales 1D.

L'énoncé de problème auquel elle a été associée est une comparaison purement qualitative de l'aire de deux rectangles, indépendamment de tout valeur numérique :

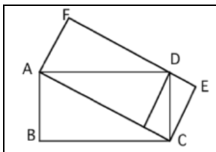
	ABCD est un rectangle. L'aire du rectangle ACEF est-elle plus grande, plus petite, ou égale à l'aire du rectangle ABCD ?

Figure 5. Comparaison qualitative d'aires.

Pour résoudre ce problème, il suffit de savoir que **la diagonale d'un rectangle** le partage en deux triangles égaux. Il n'y a pas besoin d'avoir compris la notion d'aire ou d'utiliser la formule permettant de calculer les deux aires. Ce problème a été proposé en 1981 à deux classes sur trois niveaux. Les élèves avaient travaillé individuellement[6].

	6ème 11-12 ans	5ème 12-13 ans	4ème 13-14 ans
Une diagonale divise un rectangle en deux triangles égaux	**5%**	**0**	**6%**
Mesure des côtés**, puis blocage**	**10%**	**30%**	**45%**
Invariance par compensations (Piaget)	***10%***	***10%***	***2%***
Mesure des côtés sur le dessin, **puis calcul** **(2 ,5) × (5cm) (2,3) × (5,5cm)**	**10%**	**14%**	**10%**

Figure 6. Résultats pour le même problème posés à trois niveaux scolaires.

Des résultats presque qu'analogues ont été enregistrés une quarantaine d'années plus tard dans les épreuves du Rallye mathématique Transalpin dont l'originalité est qu'il se passe entre des classes et non pas entre des élèves[7]. Cette récurrence soulève une question cruciale pour l'enseignement de la géométrie élémentaire, même lorsque les objectifs visés sont l'utilisation pratique de quelques connaissances géométriques. Où est l'obstacle récurrent que la grande majorité des élèves ne parvient pas à surmonter ?
Pour résoudre le problème associé à la Configuration C3, il suffit de voir la double appartenance des trois unités figurales 1D, AD, DC et AC. AD est à la fois l´un des côtés

[5] Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique : « voir » en géométrie. Dans Lima, J. (Eds) *Du mot au concept. Figure*, 147-182. Grenoble : Presses Universitaires.

[6] Jamm, F. (1981). A propos de la notion d'aire. *Rapports pour le D.E.A. de Didactique des Mathématiques*, IREM (pp. 18-80). Université Louis Pasteur, Strasbourg.

[7] Jaquet, F. (2018). Aires de polygones sur quadrillage/Aree di poligoni su una quadrettatura, La Gazette de Transalpie, n. 9. 101-124.

du rectangle ADCB et l’une des diagonales du rectangle FD(?)A. De même DC est à la fois la diagonale du rectangle DEC(?) et du l’un des côtés du rectangle ADCB.

.

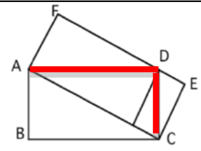
	La difficulté est de reconnaître AD et DC comme des diagonales et non pas seulement comme les côtés des deux petits rectangles obliques

Figure 7. La condition sémio-cognitive prérequis

Ces deux diagonales désuperposent la Configuration de départ en deux unités figurales rectangulaires 2D séparées (I dans la figure 7 ci-dessous). On peut alors décomposer le rectangle oblique en trois unités triangulaires 2D juxtaposées, et le rectangle horizontal en deux unités triangulaires 2D (II). On peut alors voir l’équivalence des aires des unités figurales. L’équivalence des aires des deux unités figurales superposées devient alors visible.

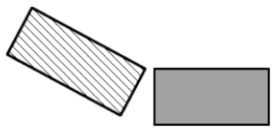
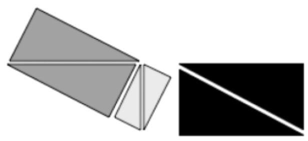
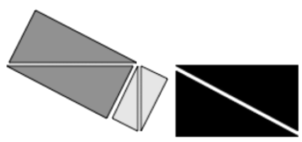
I	II	III
		

Figure 8. Décomposition morcelant et reconfiguration de deux unités figurales 2D

Mais pour le voir, il est nécessaire de pouvoir reconnaître rapidement (en moins de quelques dizaines de secondes) toutes les unités figurales 2D et 1D de cette configuration 2D. Car pour le voir, il ne suffit pas que quelqu’un vous l’explique ou vous le montre, ce qui implique la linéarité de plusieurs centrations successives du regard, il faut soi-même le saisir synoptiquement d’un seul coup d’œil, c’est-à-dire dans une intuition. Ce que Descartes avait déjà bien expliqué en 1627 dans *les Règles pour la direction de l’esprit*[8]

La décomposition, par une unité figurale 1D que l’on trace, des configurations figurales (2D ou 3D) / 2D en 2 autres unités figurale 2D juxtaposées, et leur reconfiguration par juxtaposition ou par superposition, en autre configuration 2D est au cœur de tous les traitements purement figuraux[9]. Les traitements purement figuraux sont les démarches heuristiques spécifiques à la géométrie élémentaire. Et dans tous les problèmes de comparaison qualitative des aires de surface, ils ont longtemps été considéré comme des preuves[10].

I. 3 Les quadrillages sont-ils une aide ou un obstacle pour voir ou apprendre à voir ?

L’obstacle récurrent que la grande majorité des élèves ne parvient pas à surmonter semblerait être l’opération figurale de superposition partielle de deux unités figurales 2D. Car elle complique beaucoup l’identification et le dénombrement de toutes les unités figurales 2D dans une configuration 2D, comme on peut s’en rendre sur cet exemple et sur beaucoup d’autres. Et de même, s’il fait de dédoubler une figure en y traçant une unité figurale 1D qui la morcèle en deux autres unités figurales 2D.

Les quadrillages sembleraient, au contraire, devoir être une aide pour élèves. Car ils constituent une juxtaposition d’unités figurales 2D homogènes et d’aires égales, dont le

[8] Les règles XI, XII, XIV-XVIII.
[9] Duval, 2014, p. 16.
[10] Duval, 2015, p. 162.

comptage est immédiat. Et, d'un point de vue mathématique, ils ont un double avantage. Tout d'abord ils permettent un pavage du plan. Ensuite ils peuvent être utilisés comme un outil pour morceler n'importe quelle unité figurale 2D et résoudre des problèmes qualitatifs de comparaison des d'aires de deux surfaces différentes. Prenons, par exemple, les trois configurations A, B et C qui ont été l'un des problèmes de recherche proposés au Rallye Mathématique Transalpin (la colonne de gauches de la Figure 9 ci-dessous). Les résultats ont montré que le quadrillage n'a pas été une aide pour faire franchir l'obstacle Pourquoi ? Le recours au quadrillage contraint le regard à faire des allers et des retours entre deux configurations 2D :

— la configuration du quadrillage qui constitue la Figure-Fond 2D

— les trois configurations A, B et C qui sont présentées comme les « Figures Géométriques » données pour le problème à résoudre.

En zoomant sur n'importe quelle partie des trois Figures géométriques données, la retrouve une même configuration sur la Figure-Fond 2D. Et cette configuration se décompose en deux configurations rectangulaires de trois cases et de deux cases (la colonne de droite sur la Figure 9).

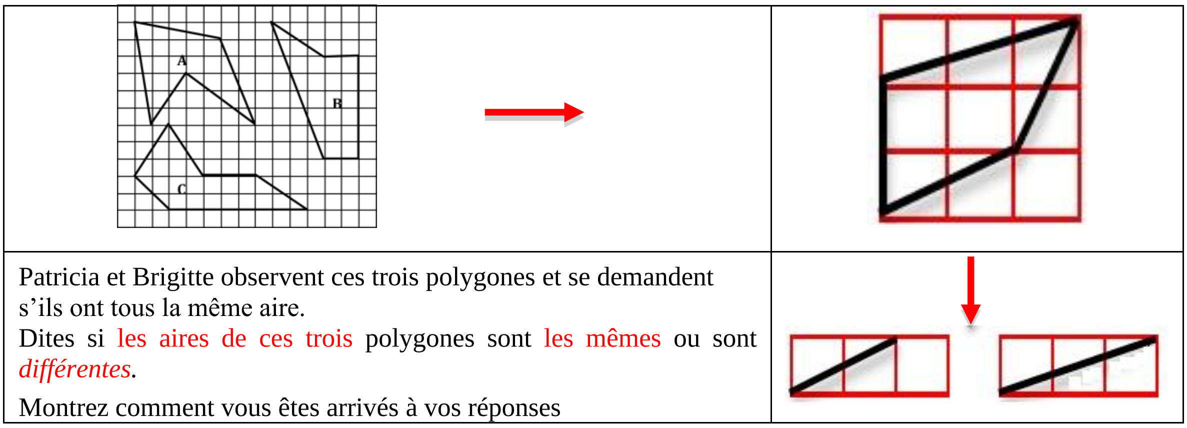


Figure 9. Ce qu'il faut rapidement reconnaître en quelques coups d'œil.

Il faut donc reconnaître rapidement :

— les cinq cases du quadrillage qui se décomposent en unités rectangulaires de trois cases et de deux cases (les deux flèches rouges)

— l'unité figurale 1D qui les partage en deux unités figurales égales.

C'est seulement à partir de cette décomposition heuristique, qui est une décomposition méréologique

— utiliser la propriété géométrique de la diagonale pour compter le nombre de carrés pour chaque rectangle et le diviser par 2, sans compter deux fois les carrés là où unités rectangulaires se superposent.

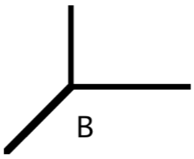
— appliquer la formule du calcul de l'aire des rectangles.

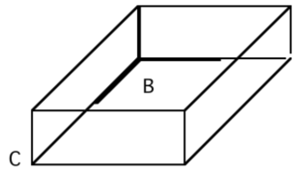
Sans cette reconnaissance rapide, le quadrillage devient un obstacle, comme le montre les résultats.

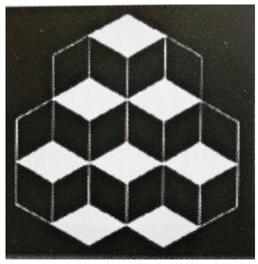
I. 4 Comment la troisième dimension s'impose-t-elle visuellement dans les figures produites sur la surface 2D d'un support physique ?

Pour répondre à cette question il faut prendre en compte deux types de phénomènes concernant le rapport du regard aux représentations instrumentalement produites sur une surface 2D.

Le premier est **basculement soudain du regard** des unités figurale 1D que l'on a immédiatement reconnues comme les bords d'unités figurales 2D soit comme les bords d'unités figurales 3D. Ce basculement est difficilement réversible. Et aucune hypothèse donnée sur ce que la figure représente ne permet de le faire, comme on peut l'expérimenter sur les trois configurations ci-dessous.







Figures transparentes : basculement du nombre de dimensions.
Est-ce la face supérieure de la boite et le côté CB qui sont entièrement visibles ou la face intérieure et le côté CB ?

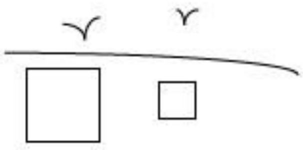
Figures en noir et blanc, ou en couleurs : pas de basculement du nombre de dimensions
(D'Amore 2015, p. 441)

Figure 10. L'ambiguïté des dessins et les basculements du regard.

Le point B peut être vu soit comme le point d'intersection de 3 unités figurales dans le plan soit comme le sommet d'un solide 3D. Et le remplissage en noir ou en blanc des unités figurales sur la troisième configuration imposent de voir des cubes, qui apparaissent **en creux ou en relief**. Mais dans un cas on comptera six cubes, et dans l'autre sept ! Plus généralement quand un contraste de couleurs délimite des zones 2D, une configuration d'unités 2D est perçue comme une juxtaposition d'unités figurales 3D, certaines apparaissant saillantes et d'autres rentrantes.

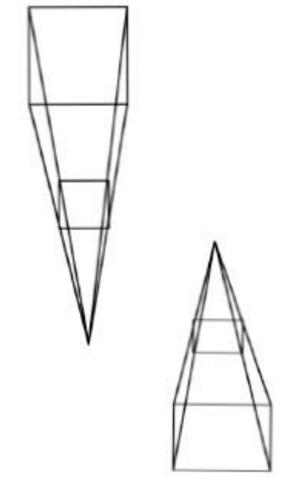
Le deuxième type de phénomène touche directement **la perception de la troisième dimension.** Pour l'analyser il faut comparer comment la troisième dimension s'impose dans la perception de l'espace 3D où nous nous déplaçons, avec la construction de la perspective dans un dessin et avec les configurations 2D construites pour visualiser les rapports homothétiques par des droites concourantes en un point situé au-delà des unités figurales 2D qu'elles joignent, comme on peut le voir dans les trois configurations ci-dessous

Deux notions sont importantes pour comprendre ce qui oppose la perception de l'espace 3D aux deux types de construction possibles de la représentation de la troisième dimension. La première est celle d'**horizon** que Husserl a popularisé dans son analyse de la modalité cognitive de la perception. La seconde est celle de ligne, non pas comme unité figurale 1D que le regard distinguerait comme telle, comme **ligne de fuite,** c'est-à-dire comme éloignement croissant d'unités figurales 2D par rapport au regard qui les vise.



1. Perception de la troisième dimension de l'espace.

2. La Trinité, fresque dans l'église Santa Maria Novella à Florence. Masaccio, 1425-1426



3. Rapports homothétiques des droites concourantes[11]

Figure 11. La troisième dimension : perception, représentation en perspective et homothétie de droites concourantes[12].

On peut alors comprendre pourquoi la perception de la troisième dimension de l'espace s'oppose aux deux représentations possibles de la troisième dimension, et en quoi ces deux représentations possibles sont radicalement différentes l'une de l'autre.

— La ligne de l'horizon est **la ligne de fuite de la surface 2D de la terre**, qui sépare tous **les corps qui sont au-dessus de cette ligne et de ceux qui sont avant cette ligne** mais sur la surface de la terre.

— Ce qui est commun aux deux représentations est l'organisation de la configuration 2D à partir **d'un point de fuite.** Dans la célèbre fresque de Masaccio, le point de fuite est sur ligne d'horizon à la hauteur des yeux de celui qui le regarde[13].

— Dans la troisième configuration, il n'y a pas de ligne d'horizon. Les quatre droites concourantes partent des sommets l'unité figurale 2D la plus grande et vont vers **un point de fuite situé en dehors** des autres unité figurales qui diminuent selon des rapports homothétiques.

Récapitulons. La comparaison des différents types de visualisation possibles que l'on peut produire intentionnellement sur un support 2D, et dont nous venons de présenter un corpus dans les Figures 3, 6, 7, 8, 9,10, permet d'identifier les différents facteurs sémio-cognitifs qui jouent sur ce que le regard peut y voir ou ne pas y voir.

Regarder implique nécessairement que l'on **reconnaisse tout ou partie de ce que l'on voit.** Pourquoi l'enseignement de la géométrie élémentaire au Primaire et au Collège est-il organisé sans une éducation du regard ? Or l'éducation du regard consiste en des **prises de conscience par les élèves** des ruptures et donc des sauts sémio-cognitifs à faire quand on passe d'un type de représentation visuelle à un autre.

---

11 Duval, 1995, p. 153, Fig.7. Classification of the homothecic plane representation. Lemonidis (1990, pp. 58-59).

12 Duval, 2018. p. 236.

13 Thuillier (1984).

I. 5 La rupture et la créativité des représentations sémiotiques en regard des représentations non-sémiotiques

La photo des 600 parapluies ouverts pour recouvrir une place est une représentation non-sémiotique iconique. Plus généralement une photo, si elle n'est pas ensuite retravaillée, est le type de représentation iconique par excellence. Car elle reproduit objectivement la réalité perçue qu'elle fixe. Et d'ailleurs les photos sont utilisées comme preuves de ce qu'une chose a bien été telle qu'on le dit. Au contraire les représentations sémiotiques, produites à main levée comme les croquis ou les dessins, et celles construites instrumentalement comme les « figures géométriques » sont des visualisations qui simplifient et organisent ce l'œil voit en fonction de tout ce qu'il a déjà vu et mémorisé. Autrement dit, elles distancient de la réalité concrète dont la perception immédiate impose l'évidence à l'exclusion de tout autre chose, et elles objectivent ce que l'on reconnaît ou ce que l'on comprend dans ce que l'on voit. La comparaison entre la photo des parapluies d'Aix-en-Provence, la perception des objets matériels dans l'espace environnant et la visualisation propre aux représentations sémiotiques, montre sur quoi et en quoi leurs productions respectives s'opposent, comme on peut le voir dans les schémas de la Figure 12 ci-dessous. Le rapport de causalité entre les objets perçus ou représentés s'inverse avec les représentations sémiotiques. Cette inversion explique la rupture qu'elles opèrent avec les photos et avec la perception des objets dans l'espace. Et le mode de production des représentations sémiotiques est intentionnel et immédiatement et rétroactivement contrôlable dans le pas à pas de leur production. La nature intentionnelle de leur production explique la créativité des registres producteurs des représentations sémiotiques et les possibilités illimitées d'exploration qu'ils offrent. Pour le vérifier, il suffit de regarder comment la troisième dimension de l'espace s'impose visuellement (Supra, § 1, et les configurations 1et 3 de la Figure 11 ci-dessus).

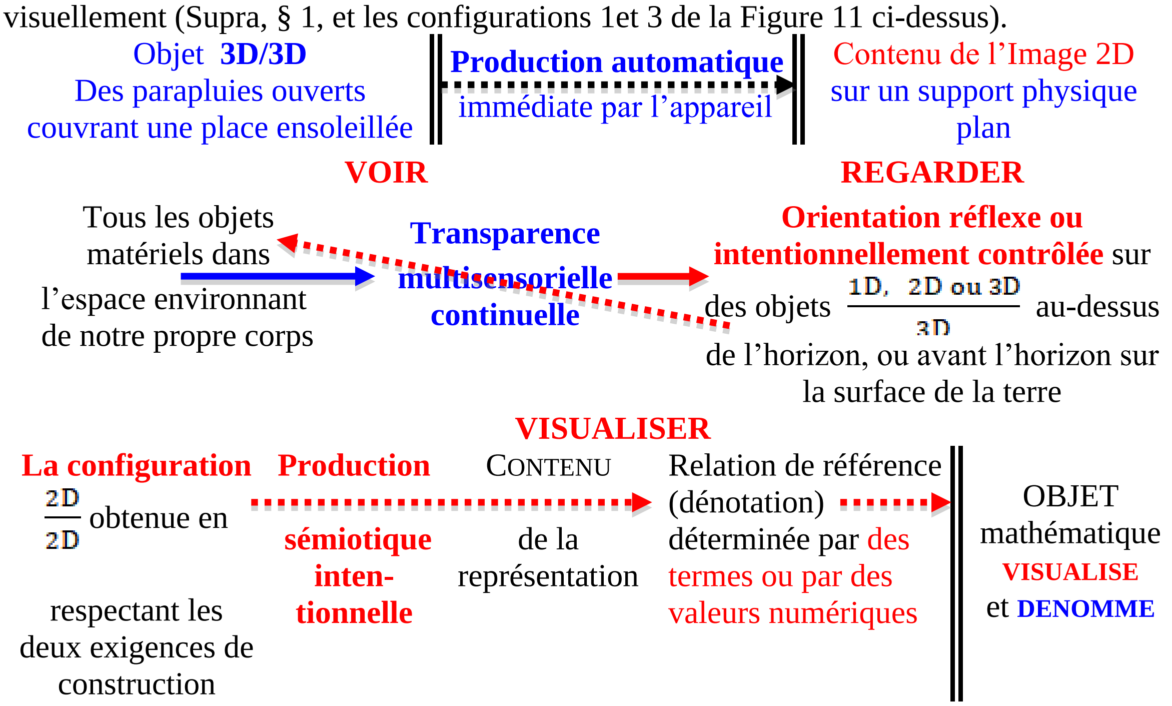


Figure 12: Os três processos cognitivos de reconhecimento do que se vê ou olha.

I.6 La hiérarchisation des unités figurales dans la visualisation géométrique

La hiérarchisation des unités figurales 1D, 2D, et 3D dans la visualisation géométrique est le résultat le plus important qui se dégage de toutes les analyses précédentes. Par rapport à la première question « Qu'est-ce que les figures géométriques donnent à voir ? Qui commandé ces analyses, cette hiérarchisation signifie deux choses :

— Les unités figurales **de dimension inférieure se fondent dans l'unité figurale de dimension supérieure dont la reconnaissance s'impose**. Ainsi les unités figurales 1D deviennent **les bords** d'un contour fermé 2D, c'est-à-dire comme **les côtés** d'un polygone ou comme les diagonales qui le partagent en deux unités figurales 3D. Par exemple, dans la Figure 4, l'unité figurale AD se fond dans l'unité ABCD qui est une unité figurale 2D. Et de même les unités figurales 2D deviennent **les faces** d'une unité figurale 3D, et les unités figurales 1D deviennent les **arêtes.** Par exemple, dans la Figure 10, les unités figurales 1D rayonnant à partir du point B deviennent les arêtes de l'unité figurale 3D.

— Chaque unité figurale de dimension inférieure peut **appartenir à deux unités figurales** de dimension supérieure, si ces deux unités figurales **sont partiellement superposées.** Par exemple, dans la Figure 7, les deux unités figurales AD et DC, qui sont deux unités figurales 1D, appartiennent à deux unités figurales 2D différentes.

La déconstruction des unités figurales 1D en configurations d'unités figurales 0D est souvent occultée dans la construction instrumentale de configurations 2D. Son utilise la règle et le compas, on recourt à une gomme pour efface les droits supports qui tendent à briser perceptivement la reconnaissance des contours fermés. Et si on recourt à un logiciel de construction, c'est le contour fermé qui apparaît immédiatement.

Les flèches bleues, descendantes puis montantes, sur la Figure 13 ci-dessous montre la complexité visuelle de la « déconstruction dimensionnelle des formes », qu'il ne faut pas confondre avec décomposition morcelant des unités figurales 2D et leur reconfiguration en autre configuration 2D (*supra*, Figure 8)[14].

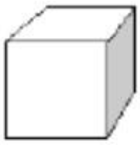
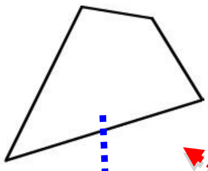
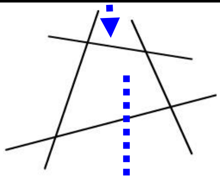
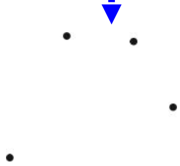
NOMBRE DE DIMENSIONS	VISUALISATON	EMPLOI MATHEMATIQUE DE LA LANGUE ET VOCABULAIRE GEOMETRIQUE
3D		Un **polyèdre**
2D		Un **polygone** — soit une **face de polyèdre** — soit la figure obtenue **par un plan d'intersection** avec un autre polyèdre
1D		**Droites** étant entre elles — perpendiculaires, parallèles, ou concourantes ... — ou **supports** de **segments.**
0D		**Points** d'intersection qui sont : — les extrémités d'un segment — le milieu d'un segment — les sommets d'un polygone

Figure 13. Déconstruction dimensionnelle des formes perçues.

[14] Duval, 2005, p. 47.

Les doubles flèches en rouge représentent **le rôle cognitif fondamental des aller et retours, devenus implicites chez les mathématiciens,** entre la visualisation géométrique et l'énonciation de toutes les propositions qui sont des **définitions**, des **conjectures** ou des **théorèmes**, comme nous allons le voir dans la section suivante.

II Les registres producteurs de représentations sémiotiques

Les configurations géométriques $\frac{\text{1D, 2D ou 3D}}{\text{2D}}$ peuvent être transformées en d'autres configurations visuelles pour résoudre des problèmes ou prouver qualitativement les propriétés des objets géométriques 1D, 2D ou 3D (*supra*, les Figures 7 et 8). Il constitue un registre producteur de représentations sémiotiques, parce qu'ils permettent de produire autant de configurations géométriques que l'on veut, et surtout de les substituer les unes aux autres de manière à mettre visuellement en évidence des invariances (**II** da Fig. 14)[15].

Mais ces traitements purement figuraux mobilisent nécessairement au moins l'un des deux registres discursifs : celui de la langue naturelle et celui des écritures numériques ou algébriques (Fig .14, **I** et **III**). Car la langue naturelle est nécessaire pour pouvoir poser un problème par rapport à une propriété géométrique ou par rapport à un calcul concernant des nombres et/ou des grandeurs. Et cela requiert que l'on mette en correspondance des unités de sens produites par l'une des opérations spécifiques à la langue en d'autres unités de sens produites par l'une des opérations spécifiques soit au registre des écritures symboliques (**III**) soit au registre des configurations géométriques (**II**). En ce sens la conviction qu'il aurait des preuves sans utiliser la langue naturelle est fallacieuse[16]. On peut prouver sans mots, mais non sans écrire des équations en marge des configurations géométriques, c'est-à-dire sans mobiliser le registre discursif des écritures symboliques (**III**).

	Registres **DISCURSIFS.** Linéarité **d'expressions qui sont des unités de sens**	Registres **NON-DISCURSIFS** : Appréhension d'une **organisation bi-dimensionnelle d'unités figurales** 1D, 2Dou 3D
Registres **multifonctionnels :** les traitements sont **NON - ALGORITHMISABLES**	**I. LES LANGUES PARLEES :** trois opérations hiérarchiquement incluses (désignation d'objets, énonciation et raisonnement) Deux modalités de production *:* ***la parole et l'écriture***	**II. Configuration géométrique** : **trois opérations indépendantes** (construction instrumentale, partage et reconfiguration méréologiques, déconstruction dimensionnelle) **ICONIQUE** : dessin, croquis
Registres **monofonctionnels :** les traitements sont **ALGORITHMISABLES**	**III. LES ECRITURES SYMBOLIQUES** (Systèmes de numération, Ecriture algébrique, Langues formelles) **Opérations de substitution illimitée.** Modalité de production : ***l'écriture***	**IV. GRAPHES** **SCHEMAS :** Jonctions entre des points, marquée par des **flèches** **GRAPHIQUES CARTESIENS :** Trois **opérations (**zoom, interpolation, et changement d'axes)

Figure 14. Les quatre types de registres producteurs de représentation sémiotiques[17].

Les questions que l'analyse de l'activité mathématique et celle de la résolution des problèmes mathématiques soulèvent est donc celle des conversions des représentations sémiotiques en des représentations d'un autre registre de représentation. Ces conversions sont des substitutions *salva denotatione* et non pas *salva veritate*[18]. Autrement dit, les conversions qui changent

[15] Duval, 2015, pp.160-163 et Duval, 2017, pp. 61-62).
[16] Nelsen, Roger.B. (1993). *Proofs without Words. Exercises in visual Thinking*. MAA.
[17] Duval, 2017, p. 85, Fig.4.6.
[18] Ver no apêndice "expressões completas e incompletas".

totalement le contenu d'une représentation donnée se font en laissant invariant l'objet auquel cette représentation réfère et sans qu'il ait besoin d'une justification ou d'une preuve.

Ces conversions se fondent sur **LA MISE EN CORRESPONDANCE DES UNITES DE SENS** qui sont produites par l'une des opérations spécifiques au registre de départ avec d'autres unités de sens produites par l'une des opérations spécifiques au registre d'arrivée.

II.1 Le registre des langues parlées

Les langues naturelles parlées constituent le premier registre producteur de représentations sémiotiques

La **PAROLE** mobilise une langue commune partagée avec d'autres locuteurs (le français, l'anglais, le mandarin). Les éléments de base d'une langue commune sont les mots. Mais ce qu'un locuteur dit et ce que son interlocuteur entend, ce sont **des unités de sens** intentionnellement exprimées. Or tous les mots ne remplissent la même fonction dans ce que dit un interlocuteur.

- Certains mots sont associables **des choses ou à des images** et forment le lexique de la langue
- D'autres sont associables à des relations ou à des actions (verbes, négation) et permettent de former **des expressions complètes** qu'on appelle grammaticalement des « phrases » ou, logiquement, des « propositions ».
- D'autres enfin sont des opérateurs associables aux mots formant le lexique de langue (déterminants, modalisateurs, négation) et forment **des expressions incomplètes**.

Les expressions incomplètes sont des unités de sens qui ne sont ni vraies, ni fausses. Elles doivent seulement permettre de bien identifier, et donc de reconnaître ce dont le locuteur parle. Le sens des expression complètes est au contraire dans la valeur qu'elles ont d'emblée. Et là on peut distinguer trois dimensions de sens, selon que la valeur est une valeur de vérité (vrai, faux, indécidables) une valeur épistémique (évident, vraisemblable, possible, absurde) ou une valeur pragmatique (appel, demande, ordre, promesse). Dans la dimension pragmatique, la parole est un acte qui engage le locuteur ou son interlocuteur. Pour former les unités de sens propres à chacun de ces quatre niveaux d'organisation discursive, il y a plusieurs **OPERATIONS DISCURSIVES** possibles, et non pas une seule.

Une langue permet de lier des mots remplissant des fonctions différentes pour former des **unités de sens** sur quatre niveaux d'organisation discursive :

- Pour désigner des objets par trois opérations discursives différentes ou des unités de sens dans un autre registre
- Pour énoncer une expression complète et différencier les statuts, les valeurs de vérité ou les valeurs épistémique des propositions énoncées et leur degré de prise en charge par celui l'énonce. Cette différenciation peut être, ou non, marquée linguistiquement. Mais elle est cruciale pour comprendre le fonctionnement des raisonnements et la rupture entre l'argumentation et toutes déductions valides, et aussi l'ironie !
- Pour lier en un propos cohérent des expressions complètes pour raconter, décrire, expliquer, ou développer un raisonnement. Une expression complète peut elle-même comporter deux propositions (dans les énoncés de théorèmes par exemple)

Ce qui partage radicalement les langues parlées, ou qui ont été parlées, est l'invention de l'**ECRITURE**. Car la production orale impose des contraintes d'économie dans les expressions complètes ou incomplète qu'un locuteur peut dire et que son interlocuteur peut entendre. Au contraire la production écrite libère de toutes les contraintes liées à la linéarité du discours et à aux capacités de mémoire à court terme et à long terme. Elle permet de développer la puissance des langues pour élargir le champ des expressions incomplètes, et surtout pour déclencher le questionnement, la distanciation et le contrôle des démarches de pensée qui sont la dynamique immanente de toute connaissance scientifique. Là, l'écriture ne remplit plus une fonction de communication, mais ce que nous avons appelé une **auto-interaction de soi avec soi,** et qui constitue l'acte même de la pensée[19].

A partir des différentes opérations discursives

- Construire des grilles d'analyse des productions orales ou écrites de chaque élève, et également des différentes formulations dans les manuels.
- Diagnostiquer l'origine des difficultés qui bloquent un élève et qui souvent ne sont pas les mêmes d'un élève à l'autre.

II. 2 Mise en correspondance des unités de sens d'un énoncé et des unités figurales d'une configuration géométrique

Pour que cette mise en correspondance soit possible, il faut **coder par des lettres** des points qui sont des points d'intersection, c'est-à-dire à des unités figurales 0D (sommet, centre, milieu, extrémité). C'est ce codage qui permet les passages uniquement dans les opérations discursives de désignation les unités figurales de la plus petite dimension.

Les unités de sens de l'énoncé à mettre en correspondance avec les unités figurales 1D ou 2D sont les expressions incomplètes que les opérations discursives de désignation permettent de détacher de l'énoncé. Dans le problème présenté dans la Figure 4, ces unités de sens sont :

Opérations discursives de désignation	Unités de sens de l'énoncé	Unités de la configuration 2D
Détermination : quantificateur	**UN** rectangle ABCD	unité figurale **2D**
Description définie	Un cercle **DE** centre A **QUI PASSE PAR** D.	unité figurale **2D**
Construction génitive	La longueur **DU** segment **[**EB].	unité figurale **1D**

Figure 15. Les correspondances pertinentes à reconnaître

Remarquons enfin que ce problème mélange le vocabulaire géométrique (rectangle, cercle, segment) et des données quantitatives qui sont codées sur la configuration 2D qui est donnée pour présenter les données du problème. Ce qui n'est pas le cas pour le problème de la Figure 5, dans lequel il n'y a **aucune donnée numérique** permettant de mesures et des opérations de calcul. On remarquera qu'aucune mention n'est faite dans l'énoncé aux unités figurales 1D, qui appartiennent à la fois à l'une des trois unités 2D rectangulaires comme diagonale de l'une et comme côté ou bord de l'autre.

Opérations discursives de désignation et de prédication	Unités de sens de l'énoncé	Unités de la configuration 2D
Construction génitive	**L'aire du rectangle** ACEF **l'aire du rectangle** ABCD	2 unités **2D** de forme rectangulaire et partiellement superposées
Prédication	**plus grande ou plus petite que ou égale à …**	3 unités **2D** de forme triangulaire juxtaposées **+2** autres pareilles

Figure 16. Les correspondances pertinentes à reconnaître

[19] Duval, 2000, pp. 146, 162, 164.

La comparaison de ces deux problèmes soulève deux questions pour l'introduction de la géométrie élémentaire à l'école Primaire et au Collège

Q.1 Faut-il commencer prioritairement par des activités et des problèmes purement qualitatifs avant d'introduire des activités impliquant des données numériques et des unités de grandeurs ? Oui ou non ?

C'est le fonctionnement sémio-cognitif de la visualisation géométrique qui impose cette question. Ce fonctionnement se fonde sur la déconstruction dimensionnelle des formes. Et sur la Figure 13 du paragraphe I.6, il est représenté les flèches bleues verticale descendantes et par les doubles flèches rouges obliques, alors que **le discours et les raisonnements mathématiques vont contre la déconstruction dimensionnelle** des formes (les flèches bleues verticales montantes). Et cela nous conduit à la deuxième question.

VISUALISATION	OBJECTS FIGURAUX	PROPRIETES **relation entre DEUX unités figurales 1D**	
		appartenant à une unité figurale 2D	**indépendante de l'appartenance à une unité 2D**
Unités figurales 2D immédiatement reconnaissables (figures types**)**	Carré, triangle, parallélogramme, cercle, angle, etc.	Régulier, convexe, concave, *n* côtés, Isocèle, équilatéral, rectangle, aigu, obtus, droit	Symétrie axiale Symétrie centrale
Unités figurales 1D perceptivement fondues dans des unités 2D	Droite, segment, côté, diagonale, rayon, corde, courbe, arc		Sécant, parallèle, perpendiculaire, tangent
Unités figurales 0D repérables, ou seulement codables sur une unité 1D	Points **remarquables** : intersection, sommet, centre. Points **implicites** échappant à la visualisation		Symétrie

Figure 17. Classification du vocabulaire géométrique de base[20]

Q.2 La manière dont le vocabulaire géométrique de base est introduit n'est-elle une cause d'incompréhension insurmontable à moyen et à long terme ? Ne faudrait-t-il **pas associer chacun des termes** les plus importants aux tâches ou activités de problèmes purement qualitatifs qui mettront aux élèves de **les coordonner avec unités figurales correspondantes** ?

La PENSEE est indissociable du registre des langues parlées et écrites. Il n'y a pas de pensée sans langage. Ce que l'on croit être purement « mental » relève soit d'une langue intériorisée, soit de l'intériorisation de gestes de traçages 1D ou 2D. Les « concepts » sont identifiés à des mots dont le sens est défini dans des phrases formulée dans une langue commune (le grec ancien, l'anglais, l'allemand…) et que **l'on condense sémantiquement dans des mots.** Et on fait comme si les définitions étaient immédiatement accessibles aux élèves comme elles le sont pour les mathématiciens.

[20] Duval, 2015, p. 164.

II. 3 Le registre des écritures symboliques

Avec l'apparition de l'écriture, entre 4000 et 3000 ans avant notre ère, un troisième registre producteur de représentations sémiotiques s'est imposé, celui des **écritures symboliques**[21]. Ce registre est un **registre discursif,** comme celui des langues parlées. Elles permettent de produire deux types d'unités de sens: La propriété especifique de ce type de registres par rapport à tous les autres types de registres est la possibilité illimitée de **substituer les expressions incomplètes et les expressions complètes** les unes aux autres[22]. Cependant ce registre s'oppose radicalement au registre des langues sur deux points cruciaux. Il est **monofonctionnel** et non pas multifonctionnel. Il ne remplit que la seule fonction de traitement, et non pas celle de communication ou celle d'objectivation. Et il est **totalement algorithmisables**, et permet d'effectuer toutes les opérations numériques et littérales de calcul. Ce troisième registre s'est imposé comme le « langage mathématique » par excellence à partir des XVIème et XVIIème siècles, avec le développement de l'algèbre et de l'Analyse. La propriété spécifique de ce type de registres par rapport à tous les autres types de registres est la possibilité illimitée de **substituer les expressions incomplètes et les expressions complètes** les unes aux autres[23].

Personne ne confondra les chiffres et les nombres qu'ils désignent, sachant qu'il devient très vite impossible de désigner les nombres par les mots que l'on prononce en comptant. Un système de numération est un système sémiotique qui comporte au moins deux chiffres constituant sa base et, dans la séquence de chiffres que l'on peut former, une valeur de position pour chaque chiffre de la base. **Mais cela ne suffit pour qu'un système de numération soit un registre** producteur de représentations sémiotique. Il faut lui adjoindre deux types symboles : des symboles d'opération pour former des expressions incomplètes et un symbole de relation ("= ", " ≥") pour former une expression complète. Car cette adjonction permet en effet de produire autant de désignations différentes d'un même nombre que l'on veut.

1. **Système d'écriture décimal** ou **binaire**	**4** (Chiffre désignant un nombre) ou (**1 ou 0**) **44** (Suite de deux chiffres désignant un autre nombre) ou (**10**), (**101**), (**1001**)
2. **Expression incomplète** : ASSOCIATION d'au moins un chiffre et d'**UN SYMBOLE D'OPERATION**	**(2 + 2), (5 – 1), (2 × 2) , (8 : 2) , 8/2** **40 + 4,** **12 × 2** (Syntagmes opératoires)

Figure 18. Système sémiotique d'écriture des nombres et Registre des écritures symboliques.

La puissance de traitement du registre des écritures symboliques vient de la propriété de substitution des égalités numériques et des équations les unes aux autres **par équivalence sémantique,** et non pas en appliquant des règles syntaxiques. Ainsi cette équivalence sémantique permet de comprendre la règle des signes (celle d'opération et celle marquant les nombres négatifs) quand on transfert l'expression incomplète " **+ 2** " ou celle " **– (– 2)** " d'un membre à l'autre du symbole de relation " = "[24]:

$$\mathbf{3 + 2 = 3 - (-2)} \quad \text{et} \quad \mathbf{(-3) - (-2) = (-3) + 2}$$

La mise en correspondance des unités de sens d'un énoncé de problème avec les deux niveaux d'unités de sens des écritures symboliques soulève deux questions.

[21] Duval, 2020, pp. 430-432.
[22] Duval et Pluvinage, 2016, pp. 123-125, 144-147.
[23] Duval, 2018, pp. 8-11, § 1.2 The semiotic revolution : towards a new knowledge aanlysisscheme
[24] *Ibid.*, pp. 40, § 2.2.2.2 Fig. 2.12 The variations in writing to represent the addition operations with relative integers.

La première (Q.3) concerne l'opposition irréductible entre les expressions complètes produites dans chacun des deux registres discursifs **I** et **III.** Dans le registre des écriture numériques, les égalités numériques ou littérales que sont les équations **restent vraies quand on inverse** les deux membres autour du symbole de relation “ = ”. Ce n'est évidemment pas le cas avec les phrases et les propositions que l'entend ou que l'on lit. **La réciproque** peut apparaître invraisemblable ou absurde tout, tout en ayant un sens.

Le chat de ma voisine mange la souris La souris mange le chat de ma voisine	3 + 2 = 5 5 = 3 + 2	1 + 1 + 1 = 3 2 + 1 = 3

Figure 19. Réciproque d'une proposition et équivalence sémantique des deux membres d'une équation

Q.3 La pratique orale d'une langue, qui crée un sens pour la compréhension des phrases **n'impose-t-elle pas une compréhension erronée des égalités numériques**, en faisant du second membre de l'égalité **un résultat**, et en rendant à l'avance impossible la compréhension du calcul avec les négatifs et de la résolution des équations algébriques ?

La deuxième question (Q.4) concerne le passage du calcul numérique au calcul littéral. L'introduction des lettres permet une **opération de désignation fonctionnelle** qui n'existe pas dans le registre multifonctionnel et non algorithmique des langues. En outre les lettres peuvent prendre des **statuts différents** aussi bien dans les **formules que dans les équations** : inconnue, constante, variable, etc.

Q.4 Comment introduire les lettres et à partir de quoi ? D'abord comme inconnue ou comme variable ? D'abord à partir de formules utilisables dans la réalité ou d'abord à partir de la résolution d'équations ?

Les questions, Q1, Q2, Q3 et Q.4 sont les questions cruciales auquel l'enseignement des mathématiques doit répondre. Nous ne pouvons pas les aborder ici, même en nous limitant aux seules questions Q.3 et Q.4. Paradoxalement, elles n'ont été frontalement abordées que récemment, alors que les recherches didactiques centrées sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire remontent au moins aux années 1980[25].

Enfin, d'un point de vue strictement cognitif, il est essentiel de ne confondre **la visualisation géométrique,** c'est-à-dire le registre III et la **visualisation analytique** c'est-à-dire le registre **IV.** La visualisation analytique impliquant des axes gradués et orientés, qui construisent **la figure-fond d'un quadrillage** sur laquelle se détachent les unités figurales 1D ou 2D. Et cette figure-fond permet d'articuler le registre des écritures symboliques au registre aux tracés de formes géométrique 1D, 2D, 3D pour visualiser des polynômes. La visualisation analytique s'est développée à la suite de la *Géométrie* de Descartes (1637).

III. Les représentations « iconiques » : image ou ressemblance ?

A partir des années 1980, les recherches en Éducation mathématique ont commencé à importer les notions de “signe”, de “représentation iconique” et “index” élaborées par Peirce. Pour les comprendre, il faut se rappeler que Peirce avait cherché à décrire le rôle des représentations et des signes dans toutes les formes de l'activité cognitive, depuis l'adaptation à l'environnement proche jusqu'aux connaissances scientifiques. La complexité de la définition de signe qu'il a donné reflète l'ampleur du champ qu'il veut

[25] Voir les cinq références regroupées sous la rubrique « Le registre des écritures symboliques ».

décrire :

> Un signe, *ou representamen*, est quelque chose qui s'adresse à quelqu'un, et qui représente quelque chose d'autre que lui-même (référence). Mais le signe ne représente pas l'objet tel qu'il est en lui-même. Il le représente en fonction d'un autre signe qu'il crée dans l'esprit de la personne à qui il s'adresse (interprétation) et des trois manières possibles dont ce qu'un signe représente (Objet) détermine la nature des signes (icone, symbole, index)[26].

La distinction des trois types de signes est faite à partir de la manière dont l'objet détermine le signe comme effet chez celui qui le reconnaît comme signe, et donc à partir de la manière que le contenu de la représentation réfère à l'objet pour l'interprétant.

III. 1 L'équivocité des notions d'icone et d'index

Le terme "icône" est la transcription du terme grec (*eikon*) que Platon a employé pour définir tout image comme reflet, et pour dire aussi la ressemblance qui résulte de l'imitation d'un modèle pour fabriquer un objet[27].

On remarquera qu'il n'y a pas de rapport entre les deux relations retenues par Peirce pour distinguer les trois types de signes. En effet, dans la première relation, les signes et les représentations sont caractérises comme étant des representamen à partir de leur seul contenu. Dans la seconde relation, les signes et les représentations sont considérés comme étant le résultat, ou l'effet du phénomène ou de l'objet qu'ils évoquent. Ce peut être un effet direct comme la fumée ou comme des traces de pas, encore comme des vestiges. Mais ce pourrait être aussi bien un effet indirect médiatisé par un système physique (un appareil photo) ou neurophysiologique (la mémoire visuelle). Pour établir sa distinction, Peirce se limite à juxtaposer la relation de ressemblance et la relation effet → cause [28]:

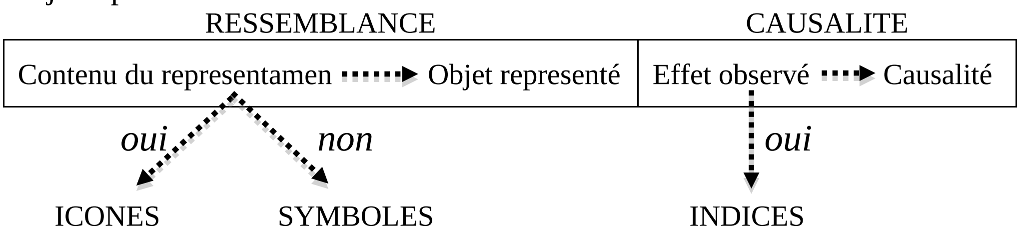


Figure 20. Les deux relations déterminant la relation d'un signe à l'objet représenté

La relation de causalité peut être considéré en deux sens contraires. Et elle conduit à ne plus distinguer **les signes** et **les signaux**. Elle peut en effet être vue

— soit dans le sens effet → cause, comme ci-dessus. Les « « indices », qui sont l'un des trois types de signes que Peirce distingue, se caractérisent par la relation « effet □ cause **».** Ils recouvrent tous les phénomènes naturels qui induisent la recherche de leur cause ou de leur origine : reflets, traces, vestiges, symptômes, etc. Peirce cite la perception d'une fumée. Les indices sont parents des signaux qui se caractérisent par la relation « cause→effet ».

— soit dans le sens cause → effet, la cause devant alors déclencher une action. Ainsi les feux aux carrefours sont des signaux qui doivent déclencher, de manière reflexe, une action de la part des conducteurs. Plus généralement, toute transmission d'informations à l'intérieur d'un système physique ou organique dépend de **codes** et **de signaux**[29]**.** Les signaux remplissent une fonction de commande, comme on peut le

[26] Peirce, C. S. (1931) *Collected papers, II. Elements of Logic*. Cambridge: Harvard University Press. p.228
[27] Platon, *République* ,476c, 509e, 510e)
[28] Duval, 2006, pp. 95-96.
[29] Duval, 2018, § 3.1.1, Fig. 3.1. Comparison of registers and codes, pp. 47-48).

voir dans le fonctionnement de tous les systèmes automatisés ou conscients, comme dans les réseaux routiers de circulation.

Dans les deux cas les deux notions équivoques et hétérogènes de contenu d'une représentation et de causalité sont **DES REPRESENTATIONS NON-SEMIOTIQUES.** Tout ce qui concerne les langues parlées et le continuum sémantique des écritures symboliques est globalement enveloppé sous le terme "symbole". Ce terme qui semble dire tout cela n'est en fait qu'un terme vague et général.

Plus généralement, dans les théories portant sur les processus de développement des connaissances communs à toutes les disciplines enseignées, la notion de **signal** est mélangée avec celle de signe, ou même la supplante.

III. 2 Le critère de ressemblance et la détermination de degrés d'iconicité

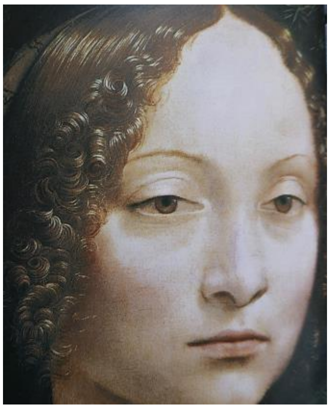
Nous pouvons maintenant regarder l'iconicité dans le registre des représentations sémiotiques. La "ressemblance" étant un terme aussi vaque et général que le terme "symbole". Et elle est souvent difficile à reconnaître lorsqu'il s'agir de ressemblance d'un dessin, d'un croquis ou d'un portrait avec l'objet réel représenté. Car les représentations 2D/2D ou 3D/2D d'objets réels (3D/3D) peuvent varier du tout au tout, en fonction du point d'où on voit l'objet qu'elles représentent : de près, de loin, d'en bas, d'en haut, de face, de profil, de dos, etc. Ainsi pour un même objet, il y a une multitude de formes possibles. D'où l'illusion de figures qui se seraient des formes typiques. Comment pouvons-nous reconnaître qu'une image ou un dessin ressemble à l'objet qu'il représente ?

Bresson a proposé une définition de la reconnaissance cognitive et non plus seulement visuelle d'une configuration 2D/2D. Elle part du principe qu'il ne suffit de se limiter à la seule congruence entre le contour fermé global de la configuration et le contour de l'objet représenté. Il faut également prendre en compte les relations topologiques entre éléments tracés à l'intérieur du contour fermé[30].

> *Une image, un dessin ou croquis ressemblent à l'objet qu'ils représentent lorsque les relations de voisinage entre les éléments de la configuration conservent les relations de voisinages entre les éléments ou les parties de l'objet représenté.*

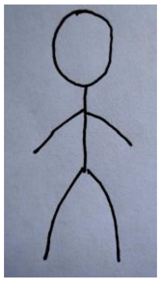
L'intérêt de cette définition est triple. Tout d'abord elle permet de distinguer **trois degrés d'iconicité,** comme on peut l'observer dans les trois représentations visuelles d'un visage ci-dessous (Duval, 2006).

[30] Duval, 2006, p. 73).



A. Représentation figurative :
Portrait de Ginevra de Benci
(1474 ?)

B. Représentation schématique :
Visage de profil et visage de face
(1936 en noir, 1946 en couleur)



C. Représentation symbolique

Figure 21. Degrés d'iconicité dans la reconnaissance visuelle d'un visage

La *représentation figurative* (A) conserve :
— la similitude du contour fermé global
— les relations de voisinages entre les parties caractéristiques d'un visage
— et surtout la ressemblance de chaque partie du visage est elle une représentation figurative (les yeux, le nez, la bouche, etc.).

La *représentation schématique* (B) conserve :
— la similitude du contour fermé global
— les relations de voisinages entre les parties caractéristiques d'un visage

Les parties du visages, réduits à des traits, ont perdu tout ressemblance figurative propre.

La *représentation symbolique* (C) conserve :
— uniquement la similitude du contour fermé.

Ce contour représente une tête ou un visage dans la mesure où les relations de voisinage entre les éléments de la configuration conservent celles entre les parties du corps. On obtient ainsi des *symboles iconiques* qui permettant une communication immédiate et économique comme dans les panneaux de signalisation, ou pour coder des informations sur une figure géométrique.

Ensuite elle permet de **dissocier l'iconicité** d'une représentation sémiotique, qu'elle qu'en soit le degré d'iconicité **avec la vraisemblance, l'invraisemblance ou l'impossibilité** de ce qu'un dessin, un tableau ou une fresque montrent[31].

Enfin elle permet les paradoxes cognitifs en intégrant un mot ou une phrase dans le dessin ou dans le tableau, comme, sans recourir aux mots, elle fait voir des objets physiquement impossibles[32]

IV. Faire prendre conscience à chaque élève comment on travaille en mathématiques

La notion de « Registres producteurs de représentations sémiotiques » a donné lieu et continue de donner lieu à beaucoup méprises. Et quand on mentionne « les registres », on s'en tient seulement à la constatation triviale de **ce que n'importe qui peut voir de l'extérieur, sans rien comprendre,** en regardant des manuels, ce qu'on s'écrit sur des tableaux, ce qu'on peut apparaître sur un écran d'ordinateur en utilisant Excel, GeoGebra ou Cabri, ou même en feuilletant des publications de mathématiques. On juxtapose

[31] Duval, 2018, p. 224, Fig. 5. Représentation figurative onirique et schématisation idéalisant).
[32] D'Amore, 2023, pp. 50-53 et 48-49).

plusieurs types de représentations sémiotiques à commencer un continuum d'écritures symboliques, des constructions géométriques, des graphes. Et il faut ajouter à tout cela des centaines de mots techniques pour désigner « quelque chose » soit dans les écritures symboliques, soit dans les graphes, soit dans les figures géométriques. « Quelque chose », qui n'est jamais la même chose d'un problème à l'autre !

Face à cela, la très grande majorité des élèves se heurte à la distance cognitive qui sépare toutes ces représentations sémiotiques. Ils ne voient comment on passe de l'un à l'autre et comment cela peut aider à résoudre des problèmes pratiques. Cette distance cognitive constitue l'obstacle auquel les élèves se heurtent en mathématiques Et pour relever le défi d'une acquisition de connaissances de base en mathématiques, pour tous les élèves jusqu'à 15 ou 16 ans, les recherches en didactique et les enseignant font appel à des « théories » qui portent sur les processus d'apprentissage ou de développement des connaissances qui seraient communs à toutes les disciples enseignées. Soit ! Mais alors cela veut dire qu'on ne présente, qu'on n'explique et qu'on n'enseigne que des connaissances mathématiques déjà toute faites. Et la manière très particulière **dont on pense et dont on travaille en mathématiques, c'est-à-dire, des manières de voir, de dire et de substituer** des représentations sémiotiques les unes aux autres, **demeure impénétrable** à tous ceux qui ne sont pas des mathématiciens professionnels ou des professeurs de mathématiques.

Parler de problèmes à résoudre pour faire comprendre ou pour faire acquérir des connaissances en arithmétique, en géométrie, en algèbre, est fallacieux. Car toute recherche pour résoudre des problèmes présuppose que les élèves ne soient pas arrêtés par **la distance cognitive** entre deux registres, celui dans lequel les contraintes et les données d'un problème sont présentées et celui dans lequel les traitements vont conduire à la solution du problème. Or la distance cognitive entre deux registres de représentation sémiotique ne doit pas être confondue avec la « charge cognitive » qui porte sur la quantité variable mais limitée d'informations qu'on peut prendre en compte et retenir en mémoire court terme. Parler de « charge cognitive » en mathématiques et dans l'apprentissage des mathématiques n'a pas de sens. Car seuls comptent les unités de sens, les unités figurales ou les expressions symboliques dont **LA RECONNAISSANCE IMMEDIATE** dépend des opérations discursives ou des traitements qu'un élève est capable de faire par lui-même, quelle que soit l'activité proposée.

La distinction des registres producteurs de représentations sémiotiques, n'est pas une « théorie » mais la description de toutes les variables sémio-cognitives à prendre en compte pour analyser le fonctionnement cognitif sous-jacent à toutes les activités mathématiques ou utilisant des connaissances mathématiques. Or la règle d'or d'une telle analyse est qu'un registre ne peut être analysé qu'à partir des variations que l'on fait dans un autre registre, pour voir ce qui change ou reste invariant dans l'autre registre. Pour faire cette analyse, il faut prendre chaque fois le couple de registres qui va être mobilisé pour introduire des objets mathématiques et des traitements mathématiques liés à ces objets. Et à chaque fois, il faut changer le registre que l'on prend comme registre de départ pour observer et faire observer par élèves les différences entre les conversions directes et les conversions inverses des représentations sémiotiques.

(Registre **III** → Registre **I**) et (Registre **I** → Registre **III**)

(Registre **III** → Registres **IV**) et (Registre **IV** → Registre **III**)

(Registre **II** → Registre **I**) et (Registre **I** →Registre **II**)

Et là il faut concevoir des tâches ou des activités dans lesquelles c'est chaque élève qui l'initiative et le contrôle de l'exploration à faire, le but étant **une prise de conscience** et non pas une connaissance, une compétence ou un savoir-faire.

Références

Analyse comparative d'un corpus de représentations sémiotiques : photos, dessins croquis, tableaux et « figures géométriques »

Duval, R., (1995). Geometrical Pictures : kinds of representation and specific processing. **i**n *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (Ed. R. Suttherland & J. Mason), 142-157, Springer, Berlin.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,10*, 5-53.

Duval R. et Godin M., (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N* 76, 7-27.

Duval, R. (2014). The first crucial Point in Geometry Learning : Visualization. Mediterranean Journal for Researche in Mathematics Education, *12* (1-2), 23-37.

Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique : « voir » en géométrie. Dans Lima, J. (Eds) *Du mot au concept. Figure*, 147-182. Grenoble : Presses Universitaires.

(Duval, R. (2018). Pour l'éducation du regard en géométrie élémentaire et en peinture (Traduction Bruno d'Amore). *La matematica e la sua didattica trad Bruno d'Amore*, *26* (2), 211-245.

https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2018/10/Duval-Per-leducazione-allo-sguardo-in-geometria-elementare-e-in-pittura-MD-2018-26-2-3.pdf

Duval, R. (2020). Le premier seuil dans l'apprentissage de la géométrie : Dans « voir » les « figures » . *La Gazette de Transalpie*, 10, 7-17.

https://www.icsedegliano.it/sezioni/rmt/materiali/Gazzetta/Gazzetta10.pdf

Lemonidis, E. C. (1990). Conception, réalisation et résultats d´une expérience d´enseignement de l´homothétie. Thèse ULP, Strasbourg.

Le registre des langues parlées

Duval R., (1995). *Sémiosis et Pensée humaine*, Chap. II, Fig. 1 Fonctions et opérations discursives d'une langue**,** Fig.1, pp. 90-91. La fonction apophantique d'expression d'énoncés complets, pp.110-112.

Duval R. (2000). Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20/2, 135-170.

Duval (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking — The registers of Semiotic Representation*. Springer Nature AG, 3.1. 3. pp. 54-56.

Le registre des écritures symboliques

Duval, R. *et al.* (2015). Ver e ensinar a matemática de outra forma. Volume II. Introduzir a álgebra no ensino : Qual é o objetivo e comme fazer isso ? São Paulo : Proem Editora.

Duval, R. et Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 21, pp. 119-152.

Duval, R. (2020). Les écritures symboliques et les opérations hétérogènes de substitution d'expressions. Les conditions de compréhension en algèbre élémentaire. *In* Méricles T. Moretti & Celia F. Brandt (Orgs.) *Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de R. Duval*. (E-book, Revemat/UFSC, 2020-07-22), pp. 422-455.

Disponible à l'adresse : https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203

Rauscher, J.-C. (2020). Le cas Jonathan. Le complexe de l'algèbre. *In* Méricles T. Moretti & Celia F. Brandt (Orgs.) Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval (Revemat/UFSC, 2020-07-22).

Disponible à l'adresse : https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203

Rauscher, J-C. et Bauerle, Sophie. *Enseigner l'algèbre élémentaire. De quel point de vue et avec quelles activités ?* Communication présentée à ETM7 Juin 2022.

Les représentations iconiques : image ou ressemblance ?

Duval, R. (2006) Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime* Vol. Especial, pp. 67-103.

D'Amore, B., et Duval, R. (2023). Similitudes y diferencias entre la educación de la mirada en geometría elemental y en arte figurativo. Education Matematica, 35(1), pp. 35-58.

ANNEXE

Expressions complètes ou expressions incomplètes
et substitutions *salva veritate* ou *salva denotatione.*

Les **EXPRESSIONS COMPLETES** sont les phrases simples énoncées le registre d'une langue parlée, et les équations dans les registres des écritures symboliques. Elles ont ceci de commun que ce sont des expressions que l'on peut substituer l'une à l'autre *salva veritate.*

EXPRESSIONS COMPLETES.

Dans les langues parlées une proposition simple s'articule avec un seul verbe conjugué. Ainsi à la proposition « l'aire du rectangle ADCB à l'aire du rectangle est égale à l'aire du rectangle FECA » je peux **substituer** *salva veritate* la proposition « l'aire des deux triangles rectangles ABC et ADC est égale à l'aire des quatre triangles rectangles (AFD, AD?, DEC, DC?» (Fig. 7).

Dans le registre des écritures sémiotiques, les expressions complètes s'articulent autour du symbole de relation « = ». Ce sont les égalités numériques ou littérales et les équations. Ainsi :

à l'égalité $3 + 2 = 5$ je peux **substituer** *salva veritate* l'égalité $3 = 5 - 2$

et à $(a + b)/2 = a/2 + b/2$ je peux substituer $a + b = 2\times(a/2) + 2\times(b/2)$, même si le symbole d'opération « × » est omis.

Cette substitution se fait par le transfert d'un membre à l'autre de l'égalité, d'une expression incomplète minimale[33].

LES EXPRESSIONS INCOMPLETES dans une langue parlée et les membres d'une équation dans les registres des écritures symboliques sont des expressions que l'on peut substituer l'une à l'autre *salva denotatione*.

Dans une phrase simple, les expressions incomplètes sont l'association d'un terme d'objet ou de propriété et d'un déterminant qui le quantifie. Elles constituent le syntagme nominal qui vient remplir la place vide du syntagme verbal. Mais elles peuvent aussi articuler deux termes d'objets ou de propriétés par les prépositions « de » « dans » ou « sur ». Ainsi au *syntagme nominal* « l'aire des deux triangles rectangles ABC et ADC » je peux substituer *salva denotatione* le syntagme nominal « l'aire des quatre triangles rectangles (AFD, AD?, DEC, DC?» (Fig. 7). On peut aussi former des syntagmes nominaux avec trois ou quatre termes d'objets ou de propriétés. Mais cela se fait au prix d'un tel coût cognitif que les expressions incomplètes deviennent incompréhensibles.

Dans le registre des écritures symboliques, les expressions incomplètes sont l'association d'un nombre ou d'une lettre avec symbole opératoire, par exemple un nombre entier relatif avec un symbole opératoire pour former ce que j'ai appelé des « *syntagmes opératoires* ». Dans les égalités ci-dessus, « **+2** », « **–2** », « **/2** », et « **2×** » sont des expressions incomplètes minimales. Ainsi à l'expression incomplète « 2 × 2 » je peux **substituer** *salva denotatione,* « 1+1+1+1 », « 2+2 », « 8 / 2 », « √16 » Et ce n'est que le début d'une liste interminable. Mais, à la différences des syntagmes nominaux dans les langues parlées, **on**

[33] Duval, 2020, pp. 28-29 et 41-42.

peut inclure les unes dans les autres autant d'expressions incomplètes minimales que l'on veut.

Il ne faut évidemment pas confondre ces deux opérations de substitution concernant les expressions complètes et les expressions incomplètes avec les raisonnements qui utilisent des définitions, des axiomes ou des théorèmes. Ce type de raisonnement porte sur proposition formée par la combinaison deux propositions simples, la première ayant le statut de condition à remplir, et la seconde de proposition à détacher si la condition est remplie (*modus ponens*).