Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PENSAMENTO GEOMÉTRICO: UMA INVESTIGAÇÃO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Geometric Thought: An Investigation In The Final Years Of Elementary School

Carla da Silva ELIODORIO
Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo, Cachoeiro de Itapemirim, Brasil.
carlaeliodorio19@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-6142-7409

Jorge Henrique GUALANDI
Instituto Federal do Espírito Santo, Cachoeiro deltapemirim, Brasil
jhgualandi@ifes.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-0302-7650

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Na educação básica, um dos conteúdos explorados é o de quadriláteros notáveis. Esse tema inicia-se no ensino fundamental e perpetua-se até o ensino médio, possuindo aplicabilidade em diversas áreas. Isso suscitou o questionamento de “como alunos dos anos finais do ensino fundamental identificam e classificam os quadriláteros notáveis?”. Assim, neste trabalho, buscou-se respostas para essa questão por meio de uma pesquisa qualitativa do tipo estudo de caso. Para tanto, analisou-se os dados disponibilizados por dois alunos dos anos finais do ensino fundamental, orientados pela pesquisadora. Logo, em posse dos registros de Heitor e Luíza, 7º e 8º ano, foi possível classificar os participantes da pesquisa em um dos níveis de Van Hiele, segundo Nasser e Tinoco, e em um dos subníveis de Battista. Ressalta-se que essas teorias se complementam no que tange aos processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos de geometria, neste caso, quadriláteros notáveis.

Palavras-chave: Anos Finais Do Ensino Fundamental, Quadriláteros Notáveis, Níveis, Subníveis

ABSTRACT

In basic education, one of the contents explored is notable quadrilaterals. This theme begins in elementary school and continues through high school, with applicability in several areas. This raised the question of “how do students in their final years of elementary school identify and classify notable quadrilaterals?” Therefore, in this work, we sought answers to this question through qualitative case study research. To this end, the data provided by two students in the final years of elementary school, guided by the researcher, was analyzed. Therefore, in possession of the records of Heitor and Luíza, 7th and 8th years, it was possible to classify the research participants into one of Van Hiele's levels, according to Nasser and Tinoco, and into one of Battista's sublevels. It is noteworthy that these theories complement each other with regard to the teaching and learning processes of geometry content, in this case, notable quadrilaterals.

Keywords: Final Years Of Elementary School, Notable Quadrilaterals, Levels, Sublevels

1 INTRODUÇÃO

A geometria encontra-se presente em todos os momentos da vida de um indivíduo, por exemplo, no formato das portas e das janelas de sua casa, e nas embalagens dos produtos que se compram nos supermercados. Além disso, ela encontra-se também na trajetória escolar do sujeito. A Base Nacional Comum Curricular [BNCC] (Brasil, 2018) recomenda que as abordagens sobre os conteúdos geométricos sejam feitas em toda a educação básica e enfatiza a importância de articulá-los ao cotidiano dos alunos, que, como citado, é repleto de geometria. Todavia, com a inserção da autora no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid) e nos estágios supervisionados notou-se que muitas vezes a geometria era deixada em segundo plano e tratada de maneira isolada da realidade. Sendo assim, ocorreu-lhe o interesse em pesquisar assuntos relacionados a essa área.

A decisão de investigar temas geométricos coincidiu com uma inquietação antiga da pesquisadora, já que, ao cursar a disciplina de Geometria I, no primeiro período da faculdade de Licenciatura em Matemática, a complexidade dos elementos e classificações dos quadriláteros notáveis lhe chamou a atenção. Isso porque, em seu percurso estudantil, até então, esse conteúdo não havia se desenvolvido de forma tão minuciosa. Assim, para entender como os estudantes associam as particularidades desse tema, elaborou-se o seguinte questionamento: “Como alunos dos anos finais do ensino fundamental identificam e classificam os quadriláteros notáveis?”. Para responder a indagação proposta traçou-se o objetivo de investigar como alunos dos anos finais do ensino fundamental identificam e classificam os quadriláteros notáveis. Esse objetivo apoia-se nos seguintes aspectos: compreender a importância dos níveis de Van Hiele (1986) e dos subníveis de Battista (2007); verificar conhecimentos dos participantes a respeito do conteúdo de quadriláteros notáveis; e relacionar cada sujeito da pesquisa a um nível de Van Hiele (1986) e a um subnível de Battista (2007).

Diante disso, dividiu-se este estudo em referencial teórico, metodologia, análise de dados e considerações finais. Neles apresentam-se, respectivamente: a fundamentação da pesquisa de acordo com autores que discutem sobre os pontos abordados; a classificação da pesquisa e o percurso metodológico; a produção e análise dos dados; e a articulação entre os resultados encontrados e a questão problema.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Os quadriláteros notáveis compõem o objeto matemático abordado neste trabalho. Assim, a proposta é uma investigação baseada na identificação e na classificação que discentes dos anos finais do ensino fundamental realizam em relação a essas figuras geométricas planas. Por isso, o aporte teórico divide-se em: níveis de Van Hiele (1986); características do modelo de Van Hiele (1957; 1986); fases do processo de aprendizagem do modelo de Van Hiele (1986); subníveis de Battista (2007); e quadriláteros notáveis.

2.1 Níveis de Van Hiele (1986)

A organização dos níveis de Van Hiele iniciou-se quando o casal de professores Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof buscou entender o porquê seus alunos apresentavam tamanha dificuldade nas tarefas envolvendo temas geométricos. Em suas teses de doutorado, concluídas em 1957, Pierre se dedicou à parte teórica do assunto, o que culminou na teoria de Van Hiele ou modelo de Van Hiele, enquanto Dina desenvolveu a parte prática, aplicando em sala de aula, a teoria de seu esposo e dissertou sobre a importância do docente no processo de ensino e de aprendizagem (Nasser & Tinoco, 2004).

O casal Van Hiele reforçou a validade de suas investigações ao unir teoria e prática. Entretanto, essa articulação não evitou as críticas de pesquisadores quanto à estrutura dos cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico da teoria de Van Hiele. Então, segundo Nasser e Tinoco (2004), ao analisar as observações feitas a seu modelo, por exemplo, a falta de nomenclatura para cada etapa[1], Van Hiele elaborou uma nova versão e a publicou em seu livro Structureand Insight: A Theory of Mathematics Education, 1986.

Desse modo, após discorrer sobre o surgimento, aplicação e adaptações dos níveis de Van Hiele (1957; 1986), considera-se importante retratar a respeito de cada um deles. Encontra-se na tabela 1, uma síntese das etapas realizada por Nasser e Tinoco (2004).

[1] Utiliza-se a palavra etapa como sinônimo de nível.

Tabela 1

Níveis de Van Hiele (1986)

NÍVEL DE VAN HIELE	REQUISITOS	EXEMPLO
1º Nível Reconhecimento	Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global.	Classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
2º Nível Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de propriedades: 4 lados iguais, 4 ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos.
3° Nível Abstração	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra. Argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades mínimas: 4 lados iguais, 4 ângulos retos. Reconhecimento de que o quadrado é também um retângulo.
4º Nível Dedução	Domínio do processo dedutivo e das demonstrações; reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
5º Nível Rigor	Capacidade de fazer demonstrações formais. Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.

Fonte: Adaptado de Nasser e Tinoco (2004, p. 78)

Nota-se, na Tabela 1, que a geometria euclidiana é explorada do 1º ao 4º nível e que somente a 5ª etapa trabalha a geometria finita, ou seja, retrata outros sistemas geométricos. Além disso, observa-se que a sequência de requisitos enfatiza a relação hierárquica entre os níveis, estabelecendo que o nível "n" necessita do entendimento do nível "n-1". Essa estrutura linear é explicada por Kaleff et al. (1994, s.p.), pois relatam que, para Van Hiele, quando os discentes constroem seus conhecimentos de forma gradual e associada "[...] entendem o que estão fazendo, por que estão fazendo algo, e quando o fazem. Eles são capazes de aplicar seu conhecimento ordenadamente para resolver problemas", ou melhor dizendo, os alunos se tornam conscientes de todos os processos realizados.

Os níveis de Van Hiele (1986) também são abordados por outros pesquisadores, como Curi (2021), a qual estrutura essas etapas de forma semelhante à Nasser e Tinoco (2004), trazendo também a presença da hierarquia e das demais características dos níveis, que são relatadas no próximo subtópico. Logo, a relevância do modelo de Van Hiele (1986) permanece até os dias atuais, sendo um “[...] guia para aprendizagem e para avaliação das habilidades dos alunos em geometria.” (Kaleff et al., 1994, s.p), possibilitando explorar conteúdos geométricos e relacionar cada aluno a um de seus níveis.

2.2 Características do modelo de Van Hiele (1957; 1986)

As características da teoria de Van Hiele (1957) e da nova versão do modelo de Van Hiele (1986) se aproximam. Então, realiza-se um paralelo entre elas. Na Tabela 2, apresentam-se as nomenclaturas das características do modelo de Van Hiele (1986, apud Nasser & Tinoco, 2004) que possuem correspondência no modelo de Van Hiele (1957, apud Usiskin, 1982). Além disso, mostra-se a descrição de cada particularidade do modelo de Van Hiele (1957), conforme retratado por Usiskin (1982).

Tabela 2

Características do modelo de Van Hiele (1957; 1986)

CARACTERÍSTICAS DO MODELO DE VAN HIELE (1986)	CARACTERÍSTICAS DO MODELO DE VAN HIELE (1957)	DESCRIÇÃO[2]
Hierarquia	Sequência fixa	Um aluno não pode estar no nível n de Van Hiele sem ter passado pelo nível n-1.
Conhecimentos Intrínsecos	Adjacência	Em cada nível de pensamento o que era intrínseco no nível anterior torna-se extrínseco no nível atual.
Linguística	Distinção	Cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relacionamentos que conecta esses símbolos.
Nivelamento	Separação	Duas pessoas que raciocinam em níveis diferentes não podem entender uma à outra.
Avanço	-	-

Fonte: Elaborado pelos autores (2021)

Usiskin (1982) aborda quatro características, enquanto que Nasser e Tinoco (2004), ao relatar sobre o modelo de Van Hiele (1986), trazem cinco particularidades, são elas: hierarquia; linguística; conhecimentos intrínsecos; nivelamento; e avanço. A hierarquia

[2] As descrições presentes nesta tabela foram retiradas de Usiskin (1982, p. 5, tradução nossa).

relaciona-se à sequência fixa, visto que “[...] um aluno não pode atingir um nível sem que esteja dominando completamente todos os níveis anteriores.” (Nasser & Tinoco, 2004, p. 77), ou seja, para que um estudante pertença a um determinado nível, é preciso que ele saiba integralmente os conhecimentos estabelecidos pelas etapas anteriores. Essa característica não é vista de forma positiva, pois os saberes parciais dos discentes em relação a um nível são desconsiderados. Curi (2021, p. 10) aborda que “nos últimos anos há alguns questionamentos quanto à hierarquia dos níveis de Van Hiele (1986), pois a aprendizagem das crianças e jovens não ocorre de forma tão linear”. Assim, alguns autores, como Battista (2007), dissertaram sobre a particularidade em questão.

A característica linguística, por sua vez, conecta-se à distinção e assegura que a linguagem direcionada ao discente seja adequada ao nível em que ele se encontra. Os conhecimentos intrínsecos, que estão ligados à adjacência, são aqueles que o estudante que está em uma determinada etapa só saberá explanar no nível posterior, já que é algo interno e ainda não explorado. O nivelamento, correlacionado à separação, ocorre quando o professor[3] deixa o seu próprio nível em segundo plano e direciona os alunos de acordo com a etapa em que eles se classificam, visando ser entendido pelos estudantes. Nas situações que envolvem um grupo de discentes, as orientações devem ser equilibradas, para que todos sejam contemplados (Nasser & Tinoco, 2004).

Por fim, a característica avanço, a qual não possui correspondência em Usiskin (1982), retrata que “o progresso entre os níveis depende da instrução oferecida, isto é, o aluno só progride para o nível seguinte depois de passar por atividades específicas, que o preparem para esse avanço.” (Nasser & Tinoco, 2004, p. 79). Essa particularidade mostra que o docente é essencial para que os estudantes prossigam para a etapa seguinte, pois o avanço não depende somente das características já citadas, mas também de uma série de tarefas elaboradas e disponibilizadas pelo professor em conformidade com as fases do processo de aprendizagem.

[3] Considera-se que os docentes apresentam um domínio maior de conteúdos se comparado aos alunos, uma vez que esses profissionais mediam o processo de ensino e de aprendizagem. Por isso, provavelmente, o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos professores é mais elevado em relação aos estudantes.

2.3 Fases do processo de aprendizagem do modelo de Van Hiele (1986)

Como discutido anteriormente, Dina Van Hiele-Geldof ficou encarregada da parte prática do modelo de Van Hiele (1957). Dessa forma, em suas aplicações de tarefas, em sala de aula, relacionou a aprendizagem dos conteúdos de geometria aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico e utilizou os resultados em sua tese de doutorado. Os resultados de Van Hiele-Geldof (1957) se tornaram a inspiração de Van Hiele (1986), levando-o a propor cinco fases do processo de aprendizagem (Passos, Buriasco & Soares, 2019), cujas sintetizações, baseadas em Crowley (1994) e Nasser e Tinoco (2004), são explicitadas na Tabela 3.

Tabela 3

Fases do processo de aprendizagem propostas por Crowley (1994)e Nasser e Tinoco (2004)

	SÍNTESE	
Fases	**Crowley (1994)**	**Nasser e Tinoco (2004)**
Interrogação/informação	Nesta etapa [momento] inicial [...] (1) o professor fica sabendo quais os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tópico, e (2) os alunos ficam sabendo em que direção os estudos avançarão (p. 6)	A primeira fase é de *informação* sobre os objetos de estudo (p. 80)
Orientação dirigida	Os alunos exploram o tópico de estudos através do material que o professor cuidadosamente ordenou em sequência (p. 6)	[...] os estudantes exploram o tópico de estudo através de atividades que o professor selecionou e ordenou cuidadosamente (p. 80)
Explicação	Baseando-se em suas experiências anteriores, os alunos expressam e trocam suas visões emergentes sobre as estruturas que foram observadas (p. 7)	[...] os alunos expressam e modificam seus pontos de vista sobre as estruturas que foram observadas (p. 80)
Orientação livre	O aluno vê-se diante de tarefas mais complexas – tarefas com muitos passos, tarefas que podem ser concluídas de diversas maneiras e tarefas de final aberto (p. 7).	[...] os alunos procuram soluções próprias para as tarefas mais complicadas (p. 80)
Integração	Os alunos reveem e sumarizam o que aprenderam com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações. O professor pode auxiliar nessa síntese (p. 7-8)	[...] o aluno revê e resume o que aprendeu, formando uma visão geral do sistema de objetos e relações do nível atingido (p. 80)

Fonte: Elaborado pelos autores (2021)

A partir da Tabela 3, infere-se que a fase inicial colabora para o desenvolvimento e direcionamento das tarefas que serão aplicadas aos estudantes. É interessante que, quando disponibilizado, os alunos estudem o material planejado pelo professor, de forma a configurar a segunda fase, que é a orientação dirigida. A terceira fase, denominada explicação, baseia-se na percepção dos discentes a respeito das tarefas. Na quarta fase, orientação livre, o grau de dificuldade das tarefas é ampliado em relação a orientação dirigida. Por fim, a integração ocorre quando o estudante avança de nível, já que com o apoio das tarefas e/ou do professor sintetiza o tópico abordado e cria uma visão geral do assunto.

Observa-se, então, que as fases do processo de aprendizagem, descritas por Crowley (1994) e Nasser e Tinoco (2004) de forma similar, orientam a avaliação dos alunos, visto que é preciso percorrer todas elas para a mudança de nível de um estudante. Dessa maneira, as fases estão totalmente ligadas aos níveis de Van Hiele (1986) e, como visto no tópico anterior, as características da teoria de Van Hiele (1957; 1986). Logo, esses são os três pilares desse modelo.

2.4 Subníveis de Battista (2007)

O casal Van Hiele, como foi visto anteriormente, criou níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Esses níveis foram adaptados por Battista (2007), que modificou suas estruturas e acrescentou subníveis, os quais designam que há transições entre cada nível de Van Hiele (1986) e se constituem como uma crítica à hierarquia da teoria de Van Hiele (1986). Isso porque o sujeito pode transitar entre dois níveis sem construir todos os conhecimentos exigidos no menor deles. Curi (2021) comprova a existência de subníveis ao analisar os objetivos de aprendizagem do currículo de matemática da cidade de São Paulo usando, entre outras, a teoria de Van Hiele (1986), relatando que os verbos representar e desenhar “[...] indicam um nível de transição, entre o nível visual e o de análise, pois quando uma criança representa uma figura geométrica ela pode se basear, ao mesmo tempo, no que conhece do visual da figura e ainda nas suas propriedades e características” (2021, p. 14).

Battista (2007) detalha quatro níveis e os respectivos subníveis de cada um deles. No entanto, será analisado desde o nível 1 até o último subnível do nível 2, pois considera-se que eles são suficientes para o desenvolvimento do que é proposto nesta pesquisa. Assim, são apresentados os níveis 1 e 2 e seus subníveis.

O nível 1 é nomeado como Raciocínio visual-holístico. Battista (2007, p. 851, tradução nossa) o descreve como aquele em que os estudantes

> [...] identificam, descrevem e raciocinam sobre formas e outras configurações geométricas, de acordo com a sua aparência como conjuntos visuais. Eles podem se referir a protótipos[4] visuais, dizendo, por exemplo, que uma figura é um retângulo porque "parece uma porta" [...]. Os alunos também podem dizer que um quadrado não é um retângulo porque os retângulos são "longos".

Battista (2007, p. 851, tradução nossa) traz ainda que a "[...] orientação das figuras pode afetar fortemente as identificações de formas dos alunos do Nível 1.".

Visto isso, nessa etapa, a identificação das figuras geométricas ocorre por meio da visualização do formato delas, sendo que a orientação do polígono precisa ser a habitual aos discentes. Então, por exemplo, a mudança na posição "padrão" de um retângulo faz com que os alunos não consigam mais identificá-lo, já que o processo de reconhecimento é totalmente visual e protótipo.

No nível citado encontram-se dois subníveis, são eles: 1.1 - Pré-recognição e 1.2 - Recognição. O primeiro engloba os participantes que não conseguem reconhecer as figuras geométricas corretamente, mesmo que estejam em seu formato protótipo, já no segundo o reconhecimento correto é perceptível (Rodrigues & Serrazina, 2017).

O nível 2 é identificado como Raciocínio analítico-componencial e nele os alunos

> [...] atendem, conceituam e especificam formas, descrevendo suas partes e relações espaciais entre as partes. No entanto, as descrições e conceituações dos alunos variam muito na sofisticação, começando com especificações completamente informais e imprecisas no subnível 2.1 e terminando com especificações geométricas completamente formais no subnível 2.3 (que corresponde ao nível 2 de Van Hiele). (Battista, 2007, p. 851, tradução nossa)

Desse modo, na etapa em questão, as propriedades das figuras são reconhecidas. Mas, a análise da precisão ao descrever essas propriedades é fundamental, pois contribui para a classificação dos indivíduos nos subníveis 2.1 - Raciocínio na sua componente visual-informal, 2.2 - Raciocínio na sua componente informal e insuficientemente formal e

[4] Nasser e Tinoco (2004, p. 71) definem protótipo como: "[...] modelo; o modelo mais perfeito.".

2.3 - Raciocínio formal suficiente baseado em propriedades, sendo que quanto maior o subnível, mais precisa será a caracterização das formas.

No subnível de raciocínio na sua componente visual-informal os estudantes não possuem muita precisão quando descrevem as propriedades das figuras, pois se baseiam em uma linguagem informal voltada para a parte visual das formas. O subnível de raciocínio na sua componente informal e insuficiente formal considera os alunos que misturam as linguagens formal e informal. Todavia, o raciocínio deles permanece referente à parte visual das figuras (Rodrigues & Serrazina, 2017).

O último subnível é o de raciocínio formal suficiente baseado em propriedades. Nele os discentes "[...] utilizam explícita e exclusivamente conceitos geométricos formais e uma linguagem que descreve e conceptualiza as formas, permitindo-lhes obter um conjunto suficiente de propriedades que especifiquem as figuras em análise." (Rodrigues & Serrazina, 2017, p. 4). Logo, não precisam mais de um apoio visual, pois identificam as propriedades necessárias e suficientes de uma figura.

2.5 Quadriláteros Notáveis

A relevância da geometria é abordada não somente nos Parâmetros Curriculares Nacionais [PCN] (Brasil, 1997;1999), mas também na BNCC (Brasil, 2018). Isso porque é por meio dos conceitos geométricos que "[...] o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive" (Brasil, 1997, p. 39). Por isso, ao estudar esses conceitos, os estudantes desenvolvem "[...] habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação." (Brasil, 1999, p. 44). Assim, nota-se que a geometria em geral é extremamente importante. Todavia, para esta pesquisa escolheu-se o conteúdo de quadriláteros notáveis.

Destaca-se que, pela BNCC (Brasil, 2018), a classificação e a inclusão de classe dos quadriláteros notáveis, empregadas nesta pesquisa, são estudadas no 6º ano do ensino fundamental. Entretanto, a construção dos conhecimentos sobre os quadriláteros notáveis começa no 1º ano do ensino fundamental, dado que nessa fase a BNCC (Brasil, 2018, p.

278) traz a habilidade EF01MA14[5], que tem como foco “identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.”

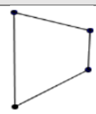
Com relação à classificação dos quadriláteros notáveis (paralelogramos e trapézios), Brunheira e Ponte (2015, p. 198) destacam que “[...] consiste em declarar uma equivalência entre objetos com semelhanças entre si, mas visualmente diferentes, o que implica considerar cada caso como um caso particular de uma classe de objetos”. Dessa forma, é preciso classificar os quadriláteros notáveis e realizar a inclusão de classe de cada um deles, associando as suas definições, pois elas explicitam as características comuns das figuras geométricas planas, que, às vezes, não são reconhecidas visualmente. Evidencia-se que “o simples fato de saber a definição de um conceito [quadrilátero notável] não garante a compreensão do conceito.” (Villiers, 2010, p. 412). Logo, é importante um raciocínio coerente e válido para todo tipo de quadrilátero notável.

Quanto às definições, tem-se que um paralelogramo, segundo Pinho, Batista e Carvalho (2010) “[...] é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos.” (p. 186), já um trapézio, para esses pesquisadores, “[...] é um quadrilátero que possui um único par de lados paralelos.” (p. 192). As condições citadas são suficientes para determinar os referidos polígonos. Diante disso, percebe-se que em um paralelogramo encontra-se dois pares de lados opostos paralelos, enquanto o trapézio só permite um par de lados opostos paralelos. Então, de acordo com as definições enunciadas, os paralelogramos não são tipos de trapézios.

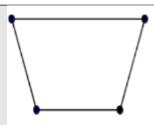
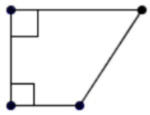
Vale ressaltar que existem casos particulares de paralelogramos e trapézios. Na Tabela 4, retrata-se sobre os tipos de trapézios.

Tabela 4

Tipos de Trapézios

TIPOS DE TRAPÉZIOS	DESCRIÇÃO	REPRESENTAÇÃO
Trapézio escaleno	Trapézio que não apresenta congruência entre as medidas dos comprimentos dos lados opostos não paralelos	

[5] De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018) esse código refere-se à décima quarta habilidade proposta em Matemática no 1° ano do ensino fundamental.

Trapézio isósceles	Trapézio que apresenta os lados opostos não paralelos de mesma medida (são congruentes)	
Trapézio retângulo	Trapézio com dois ângulos retos	

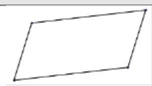
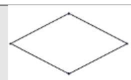
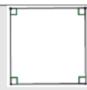
Fonte: Adaptado de Costa (2016, p. 55)

Analisando a descrição e a representação de cada trapézio, observa-se que o único ponto em comum entre eles é justamente o fato de serem trapézios. Dessa maneira, nos trapézios não ocorre inclusão de classe. Os paralelogramos, por sua vez, possuem as seguintes propriedades: “[...] a) lados opostos iguais (congruentes); b) os ângulos internos opostos são congruentes; c) dois ângulos internos vizinhos quaisquer são suplementares; d) suas diagonais se cortam ao meio, em seus respectivos pontos médios” (Costa, 2016, p. 55-56).

Portanto, na Tabela 5, encontra-se um resumo contendo a definição e uma das possíveis representações de cada tipo de paralelogramo, os quais atendem às propriedades listadas por Costa (2016).

Tabela 5

Tipos de paralelogramos

TIPOS DE PARALELOGRAMOS	**DEFINIÇÃO**	**REPRESENTAÇÃO**
Paralelogramo	Um paralelogramo é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos. (p. 186)	 (p. 56)
Losango	Um losango é um quadrilátero que tem os quatro lados congruentes. (p. 189)	 (p. 57)
Retângulo	Um retângulo é um quadrilátero cujos ângulos internos têm medida igual a 90° [ângulos retos]. (p. 190)	 (p. 56)
Quadrado	Um quadrado é um quadrilátero que possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos. (p. 192)	 (p. 58)

Fonte: Elaborado pelos autores de acordo com Pinho, Batista e Carvalho (2010) e Costa (2016)

3 METODOLOGIA

Neste estudo, efetuou-se uma análise do desenvolvimento do pensamento geométrico dos participantes da pesquisa, usando os níveis de Van Hiele (1986), conforme Nasser e Tinoco (2004), e os subníveis de Battista (2007). Para isso, foram necessários os seguintes passos: classificar a pesquisa; situar o contexto e caracterizar os participantes desta pesquisa; e descrever os instrumentos de produção de dados e as suas aplicações, os quais encontram-se nos subtópicos 3.1. e 3.2.

3.1 Classificação da Pesquisa

Entende-se que esta pesquisa é de abordagem qualitativa, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), e do tipo estudo de caso na acepção de Ponte (2006). Bogdan e Biklen (1994, p.51) citam que “os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador”. Neste estudo, as experiências consideradas são os conhecimentos dos participantes sobre os quadriláteros notáveis, visto que eles se constituem como informadores.

Ponte (2006), por sua vez, retrata que o estudo de caso

> É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenômeno de interesse. (p. 02)

Diante disso, a particularidade deste trabalho é analisar o desenvolvimento do pensamento geométrico dos participantes envolvidos, por meio dos instrumentos de produção de dados explanados no percurso metodológico, evidenciando as características que são melhor compreendidas por eles em relação aos quadriláteros notáveis.

3.2 Percurso Metodológico

Para o desenvolvimento do trabalho proposto submeteu-se o projeto de pesquisa ao Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos [CEP] do Instituto Federal do Espírito

Santo [Ifes], sendo aprovado sob o número 51053621.4.0000.5072. Em seguida, contatou-se os pais de dois estudantes desse segmento de ensino, os quais, com a aceitação dos menores, permitiram a participação nesta pesquisa. Foi recolhida a assinatura dos pais para o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido [TCLE] e a dos filhos para o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido [TALE]. Dessa maneira, os dois discentes compareceram ao Laboratório de Ensino de Matemática [LEM] do Ifes - campus Cachoeiro de Itapemirim, no dia 08 de dezembro de 2021. Optou-se por desenvolver a pesquisa no LEM porque o espaço comporta 25 pessoas, o que possibilitou atender confortavelmente os envolvidos na pesquisa e respeitar as restrições da pandemia da Covid-19. Ressalta-se que esses alunos foram nomeados pelos pesquisadores como Heitor e Luíza para preservar os princípios éticos de pesquisa e que no ano letivo de 2021 pertenciam, nesta ordem, ao 7º e 8º ano do ensino fundamental.

Com relação à aplicação em si, explicou-se a Heitor e Luíza como ocorreriam as atividades no local (objetos de estudo), partindo do pressuposto de que a classificação e a inclusão de classe dos quadriláteros notáveis, utilizadas neste estudo, são vistas no 6º ano do ensino fundamental (conhecimentos prévios) (Brasil, 2018), configurou a primeira fase do processo de aprendizagem (Crowley, 1994; Nasser & Tinoco, 2004). Posteriormente, entregou-se a cada aluno folhas de papel A4, lápis, borracha e régua, aplicando-se a primeira tarefa, fundamentada no texto de Câmara dos Santos (2009), citado por Costa e Câmara dos Santos (2017), do qual retirou-se duas questões. Desse modo, os estudantes analisaram os questionamentos e responderam conforme o seu entendimento.

Ao término da aplicação do instrumento de produção de dados, cada discente recebeu uma caixa contendo alguns quadriláteros em material emborrachado. Pediu-se que agrupassem as figuras geométricas de forma livre. Feito isso, solicitou-se que explicassem, em folha de papel A4, o agrupamento realizado e que reagrupassem os grupos de figura formados, de acordo com os seus conhecimentos e as suas observações, registrando-se os raciocínios empregados. Enfatiza-se que ocorreram dois reagrupamentos, enumerados como 1 e 2, os quais, junto ao agrupamento inicial, são apresentados na análise de dados da tarefa 2. Por fim, os pesquisadores sintetizaram, no quadro do LEM, as condições suficientes dos trapézios e dos paralelogramos. A partir disso, evidenciou que quadrados, retângulos e losangos são tipos de paralelogramos. Logo, essa síntese condiz com a fase de integração, que é a última fase do processo de aprendizagem (Crowley, 1994; Nasser & Tinoco, 2004).

Vale destacar que as tarefas relatadas foram aplicadas para investigar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, utilizando as fases do processo de aprendizagem do modelo de Van Hiele (1986), as características do modelo de Van Hiele (1957; 1986), os níveis de Van Hiele (1986) e os subníveis de Battista (2007). Por esse motivo, a seguir, encontra-se a análise das respostas dos participantes e a articulação entre elas e o referencial teórico.

4 ANÁLISE DE DADOS

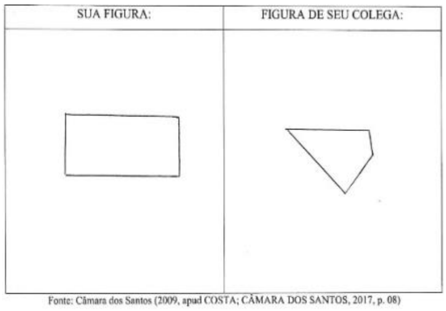
Para uma melhor organização da análise dos dados produzidos dividiu-se esse tópico em dois subtópicos, 4.1. e 4.2. O primeiro deles, nomeado como Resultados da Tarefa 1, descreve as análises da primeira tarefa, enquanto o segundo, o qual chamou-se de Resultados da Tarefa 2, detalha as verificações a respeito da segunda tarefa.

4.1 Resultados da Tarefa 1

A tarefa 1, retirada de Costa e Câmara dos Santos (2017), era composta por dois momentos. Inicialmente, os estudantes se depararam com a seguinte situação: “Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura de seu colega”. Ao colocarem em prática as orientações do enunciado, os participantes produziram as figuras geométricas planas presentes na Tabela 6 e completaram a segunda fase do processo de aprendizagem (Crowley, 1994; Nasser & Tinoco, 2004).

Tabela 6

Resolução da tarefa 1: primeiro momento

RESOLUÇÃO DA TAREFA	
Heitor	Luíza
	

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2021)

Observa-se que Heitor e Luíza no campo "sua figura" ilustraram um retângulo em formato protótipo. No espaço "figura de seu colega", Heitor desenhou um trapézio escaleno, conforme Costa (2016), e Luíza, um quadrilátero qualquer. Assim, vê-se que Luíza seguiu um caminho não convencional enquanto Heitor permaneceu esboçando quadriláteros notáveis. No segundo momento, concluiu-se a terceira fase do processo de aprendizagem (Crowley, 1994; Nasser & Tinoco, 2004), já que os participantes explicaram o porquê "sua figura é um retângulo" e o porquê "a de seu colega não é um retângulo". As justificativas elaboradas por eles encontram-se na Tabela 7.

Tabela 7

Justificativas da tarefa 1: segundo momento

JUSTIFICATIVAS DA TAREFA

Heitor

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
Por que eu aprende na escola que um retâgulo tem todos a lados de 90°	eu fiz porque a figura não tem todos lados 90°

Fonte: Câmara dos Santos (2009, apud COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2017, p. 09)

Luíza

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
Tem dois lados da mesma medida e os outros dois também, porém os quatro lados juntos não tem a mesma medida.	Nenhum lado é da mesma medida

Fonte: Câmara dos Santos (2009, apud COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2017, p. 09)

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2021)

Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT, Florianópolis, v. 19, p. 01-27, jan./dez., 2024.
Universidade Federal de Santa Catarina. 1981-1322. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2024.e96457

Heitor, em suas explicações, se respaldou nos conhecimentos construídos no ambiente escolar e registrou a definição de retângulo de forma semelhante a Pinho, Batista e Carvalho (2010). Entretanto, ao escrever "[...] lados de 90º" confunde lados e ângulos de uma figura geométrica plana. Luíza, por sua vez, no espaço "sua figura é um retângulo" trouxe a ideia de que um retângulo possui pares de lados (opostos) de mesma medida, evidenciando uma das propriedades dos paralelogramos (Costa, 2016). Destaca-se que em sua resposta não há inclusão de classe entre retângulos e quadrados, o que é comprovado quando diz "[...] os quatro lados juntos não têm a mesma medida", ou seja, ela não considerou o quadrado como um tipo específico de retângulo.

Luíza, ao justificar a figura de seu colega, representada por um quadrilátero qualquer, relatou não ser um retângulo devido aos lados terem medidas diferentes. Logo, com sua fala, percebe-se que todas as figuras que possuem quatro lados de tamanhos distintos não são retângulos, o que se constitui como uma informação verdadeira.

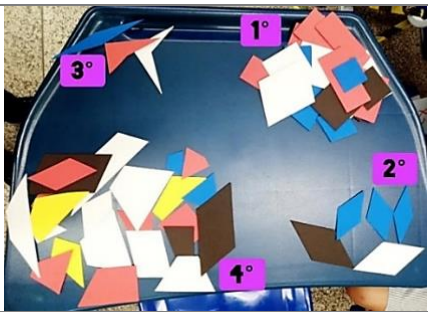
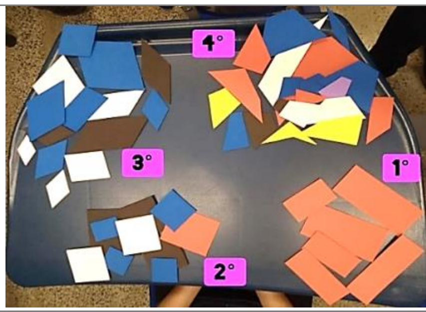
Diante disso, na tarefa em questão, Luíza e Heitor mostraram indícios, nesta ordem, do 1º e 2º nível de Van Hiele (1986), de acordo com Nasser e Tinoco (2004). Ressalta-se que Luíza não especificou claramente as propriedades e relacionou as suas justificativas ao visual das figuras, o que coincide com o subnível 2.1 de Battista (2007). Entende-se que Heitor assume o subnível 2.2, haja vista que ao formalizar a condição suficiente de um retângulo trocou os termos "lados" e "ângulos", o que levou a um equívoco nos conceitos matemáticos.

4.2 Resultados da Tarefa 2

Na tarefa 2, os estudantes foram orientados a agrupar, da forma que considerassem mais adequada, alguns quadriláteros em material emborrachado. Dessa maneira, a Tabela 8 representa o agrupamento inicial realizado por Heitor e Luíza, no qual eles usaram todas as figuras da caixa.

Tabela 8

Agrupamento inicial realizado por Heitor e Luíza na tarefa 2

AGRUPAMENTO INICIAL	
Heitor	Luíza
	

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2021)

Após os participantes terem agrupado as figuras, solicitou-se que explicassem, em folha de papel A4, os motivos de reunirem os quadriláteros de tal modo. Heitor justificou o 1º grupo escrevendo o seguinte: “porque eles parecem ser muito parecidos”. Percebe-se que Heitor observou o visual das figuras, mas não expôs a semelhança a que se referia. Para o 2º grupo, ele disse “parece que eles são de figuras diferentes, mas eu fiquei em dúvida porque eles possuem retas paralelas igual à do grupo 1”. Nesse momento, ele explicitou a característica que não evidenciou na explicação do grupo 1, ou seja, retratou sobre retas paralelas, as quais também estão presentes no grupo 2.

Heitor afirmou que “isolou” as figuras do 3º grupo porque “são [...] bem diferentes [...]”. Por fim, explicou o 4º grupo registrando que: “para mim elas são todas trapézio e eu acho que são diferentes de todas, mas eu também juntaria elas com o grupo 1 e o 2”. Logo, acredita-se que Heitor buscou reunir no grupo 3 figuras em que retas paralelas não estão presentes. No grupo 4, ele supôs que todos os polígonos são trapézios e indicou a possibilidade de formar um novo grupo com as figuras dos grupos 1, 2 e 4.

Diante disso, nota-se que Heitor associou que todos os quadriláteros que possuem retas paralelas pertencem a um mesmo grupo. Então, para ele, quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos e trapézios pertencem à mesma classe, uma vez que são figuras em que há, pelo menos, um par de lados paralelos.

Todavia, nesta pesquisa, assume-se que trapézios e paralelogramos formam classes distintas de acordo com Pinho, Batista e Carvalho (2010), visto que o trapézio possui apenas um par de lados paralelos enquanto nos demais quadriláteros notáveis existem dois pares de lados paralelos. Assim, Heitor, apesar de não ter considerado a quantidade de

Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT, Florianópolis, v. 19, p. 01-27, jan./dez., 2024.
Universidade Federal de Santa Catarina. 1981-1322. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2024.e96457

pares de lados paralelos, percebeu a particularidade comum entre todos os quadriláteros notáveis, que são os lados paralelos, chamados por ele de retas paralelas.

Logo, ele iniciou a análise das propriedades das figuras. Porém, isso não basta para classificá-lo no 2º nível de Van Hiele (1986). Então, Heitor encontra-se na 1ª etapa de Van Hiele (1986). Quanto aos subníveis de Battista (2007), Heitor permanece no subnível 2.2, visto que o uso da linguagem mista (formal e informal) é predominante em suas falas.

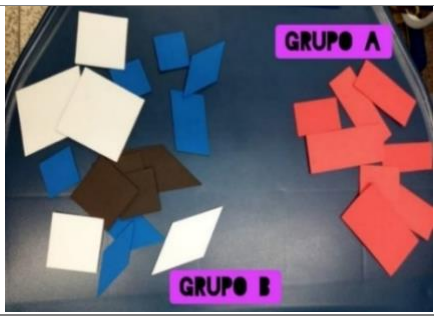
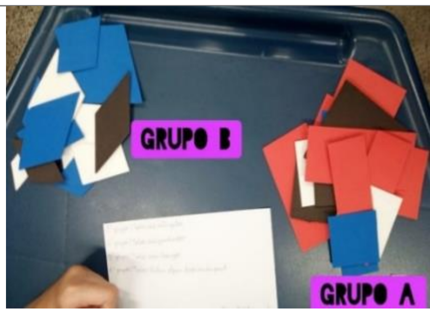
Luíza, por sua vez, afirmou que no 1º grupo "todos são retângulos", no 2º "todos são quadrados", no 3º "todos são losangos" e no 4º "todos tinham algum lado na diagonal". Nota-se, pela Tabela 8 que, no grupo 3, Luíza não incluiu somente losangos, mas também paralelogramos, ou seja, considerou os paralelogramos como tipos de losangos. No grupo 4, ao falar "lado na diagonal", entende-se que ela se referia aos lados inclinados das figuras, os quais não são paralelos a seus lados opostos.

Dessa maneira, Luíza novamente é incluída no 1º nível de Van Hiele (1986) e no subnível 2.1 de Battista (2007), pois ela se baseou somente na aparência das figuras, equivocando-se quanto aos losangos e aos paralelogramos no grupo 3, e não houve precisão na descrição de suas observações para o 4º grupo.

Posteriormente ao agrupamento inicial, pediu-se que Heitor e Luíza reagrupassem as figuras, se possível, de acordo com as suas observações em relação ao 1º, 2º, 3º e 4º grupo. Nesse instante, ambos retiraram os trapézios e os quadriláteros quaisquer e trabalharam com os quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos, os quais, segundo eles, eram mais semelhantes. Na Tabela 9, esse reagrupamento, nomeado como reagrupamento 1, é mostrado.

Tabela 9

Reagrupamento 1 realizado por Heitor e Luíza na tarefa 2

REAGRUPAMENTO 1	
Heitor	Luíza
	

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2021)

Heitor, no grupo A, englobou os retângulos e no grupo B, abrangeu quadrados, losangos e paralelogramos. Para o grupo A, ele discursou: “eu reagrupei porque para mim tudo é retângulo, é retângulo porque tem os 4 lados de 90º” e para o grupo B disse: “eu criei um novo grupo pois todos quando mede com a régua possuem os quatro lados com a mesma medida”. Constata-se que Heitor trouxe novamente, no grupo A, a condição suficiente de um retângulo, persistindo em trocar os termos “lados” e “ângulos”. Além disso, ele expressou a sua preocupação em verificar com a régua o tamanho dos lados das figuras do grupo B, para ter a certeza de que é pertinente juntá-las.

Concorda-se com Heitor que realmente os quadrados e losangos portam lados de mesma medida, mas ele equivocou-se quanto aos paralelogramos. Entende-se que ele correlacionou, pelo formato dos polígonos, paralelogramos e losangos e, por esse motivo, não confirmou, com a régua, a diferença no tamanho dos lados. Assim, Heitor associa-se ao 1º nível de Van Hiele (1986), haja vista que o reconhecimento de propriedades não se aplicou aos paralelogramos, e ao subnível 2.2 de Battista (2007), dado que não conceituou corretamente a condição suficiente dos retângulos e integrou os paralelogramos no grupo B, o que não condiz com a forma que descreveu o grupo em questão.

Com relação à Luíza, no grupo A, ela agrupou quadrados e retângulos sob o argumento de que

> os quadrados têm os quatro lados iguais, diferentemente dos retângulos que tem dois pares de lados iguais. Percebi que todos têm quatro ângulos reto e isso os agrupa. Se cortarmos na diagonal, as imagens vão ter quatro triângulos. Todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado (Luíza, 2021)

Nota-se que Luíza percebeu a característica comum entre quadrados e retângulos, que é a presença de quatro ângulos retos. Ela também registrou a diferença das duas figuras, que é o tamanho dos lados, e chegou à afirmativa verdadeira de que todo quadrado é um retângulo. Isso porque a condição suficiente de um retângulo são os quatro ângulos de 90º, os quais existem igualmente nos quadrados. No entanto, como ela disse, nem todo retângulo é um quadrado, em razão da exigência de que todos os lados do quadrado tenham a mesma medida.

Quando Luíza argumentou que “[...] se cortarmos na diagonal, as imagens vão ter quatro triângulos”, ela enunciou uma situação que não acontece apenas no grupo A, já que nas figuras do grupo B (paralelogramos e losangos) isso também ocorre. Então, mesmo essa declaração sendo válida, ela sozinha não fundamenta o agrupamento realizado (grupo A).

No grupo B, Luíza compreendeu, de acordo com ela, as figuras que “sobraram”, ou seja, paralelogramos e losangos, que são os polígonos dispostos sobre a mesa que não se encaixam no grupo A.

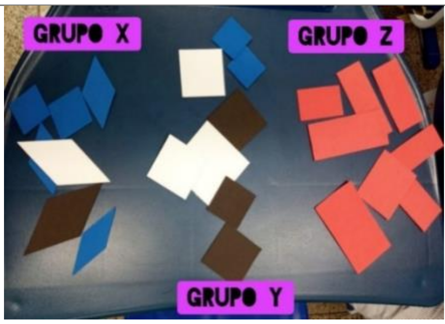
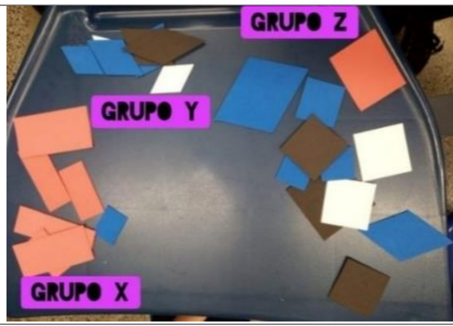
Dessa forma, percebe-se que Luíza não citou os critérios para a reunião das figuras presentes no grupo B e por esse motivo não é possível identificar se ela descreveria corretamente as condições suficientes e/ou propriedades dos paralelogramos e dos losangos.

Deduz-se, então, que Luíza não reconhece características semelhantes entre paralelogramos e losangos, fazendo com que ela os tenha entendido como não pertencentes ao grupo A, para o qual ela demonstrou domínio. Por isso, Luíza contempla-se na 1ª etapa de Van Hiele (1986) e no subnível 2.2 de Battista (2007), uma vez que ela não especificou as propriedades das figuras do grupo B.

Após o reagrupamento 1, requisitou-se outro reagrupamento, caso os alunos julgassem ser possível realizá-lo. Imediatamente, os dois participantes reagruparam as figuras. Essa etapa, chamada de reagrupamento 2, consolidou-se como o último processo realizado por Heitor e Luíza. Apresenta-se na Tabela 10 o reagrupamento 2.

Tabela 10

Reagrupamento 2 realizado por Heitor e Luíza na tarefa 2

REAGRUPAMENTO 2	
Heitor	Luíza
	

Fonte: Dados síntese da pesquisa (2021)

Heitor, no reagrupamento 2, não utilizou os paralelogramos. Ele formou o grupo X, com losangos, o grupo Y, contendo quadrados, e o grupo Z, composto por retângulos. O aluno em questão explicou a disposição das figuras, dizendo que “os quadrados podem se juntar ao grupo de retângulos, porque têm todos os ângulos de 90º. E os quadrados também podem fazer parte do grupo dos losangos, porque têm todos os lados com a mesma medida” e registrou separadamente que “os retângulos, os quadrados e os losangos têm os lados opostos paralelos, igual aos paralelogramos, por isso eu juntaria eles todos num grupo só”.

Heitor, em sua fala, pela primeira vez não utilizou “lados de 90º”, aplicando a linguagem correta, ou seja, “ângulos”, o que mostra que ele possui consciência do que são lados e ângulos. Entende-se que a frequência em que Heitor trocava as palavras “lados” e “ângulos” não está ligada à falta de conhecimentos sobre esses conceitos, pois provavelmente a falha citada ocorreu por não revisar o que havia escrito. Além do mais, ele demonstrou a sua percepção quanto aos quadrados serem tipos específicos de losangos e retângulos.

Heitor, mesmo não representando o grupo a que se referia, finalizou enfatizando que há um grupo comum entre os paralelogramos, losangos, retângulos e quadrados, que é a classe dos quadriláteros notáveis que possuem os lados opostos paralelos. Ele não nomeou essa classe, mas segundo Pinho, Batista e Carvalho (2010) é a classe dos paralelogramos.

Ao atribuir, indiretamente, que os quadrados são a intersecção dos retângulos e losangos e que todos eles são paralelogramos, Heitor foi ao encontro de um raciocínio coerente e demonstrou domínio do assunto. Logo, Heitor classifica-se na 2ª etapa de Van Hiele (1986) e ao subnível 2.3 de Battista (2007).

No que diz respeito a Luíza, ela juntou os retângulos no grupo X. No Y ela abarcou os losangos e, no Z, designou quadrados, losangos e paralelogramos. Luíza afirmou que o X era repleto de retângulos porque eles “tem os quatro ângulos retos”, esquecendo que os quadrados também possuem os quatro ângulos de 90º. Ela não explicou o grupo Y. Luíza explanou que organizou o grupo Z da seguinte forma porque “os quadrados têm os quatro lados iguais, assim como o losango”. Todavia, também incluiu paralelogramos no grupo Z e deixou alguns losangos no grupo Y. Isso mostra que Luíza, possivelmente, acabou se “perdendo” ao diferenciar paralelogramos e losangos. Então, embora Luíza tenha descrito a condição suficiente de um retângulo, ela correlacionou losangos e paralelogramos, supostamente, devido ao formato deles, o que leva a entender que analisou as figuras visualmente. Assim, Luíza encontra-se no 1º nível de Van Hiele (1986) e no subnível 2.2 de

Battista (2007), visto que enunciou as propriedades corretamente, mas o seu raciocínio continuou referente à aparência das figuras.

Perante o exposto, nas análises das tarefas 1 e 2, constata-se que Heitor oscilou tanto nos níveis de Van Hiele (1986) quanto nos subníveis de Battista (2007) e que Luíza variou somente nos subníveis de Battista (2007). Porém, é necessário associá-los a apenas um dos níveis de Van Hiele (1986) e um dos subníveis de Battista (2007). Por essa razão, nas considerações finais situa-se a classificação geral de Heitor e Luíza. Ademais, pontua-se sobre o uso das teorias dos referidos autores e retoma-se a questão problema deste trabalho.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, aplicou-se duas tarefas a dois alunos dos anos finais do ensino fundamental, Heitor e Luíza. Elas buscavam contribuir para que a questão problema "como alunos dos anos finais do ensino fundamental identificam e classificam os quadriláteros notáveis?" fosse respondida. O objetivo geral, por sua vez, baseia-se em uma investigação a respeito da indagação presente na questão problema. Já os objetivos específicos respaldam-se em três ideias, são elas: compreender a importância dos níveis de Van Hiele (1986) e dos subníveis de Battista (2007); verificar conhecimentos dos participantes a respeito do conteúdo de quadriláteros notáveis; e relacionar cada sujeito da pesquisa a um nível de Van Hiele (1986) e a um subnível de Battista (2007).

Nota-se, a partir dos resultados das tarefas 1 e 2, que alunos dos anos finais do ensino fundamental, algumas vezes, identificaram os quadriláteros notáveis visualmente e que, devido a esse fato, em certos momentos, as identificações não foram corretas, pois confundiram, por exemplo, losangos e paralelogramos. Enfatiza-se que eles perceberam e/ou reconheceram determinadas propriedades dos quadriláteros notáveis, como a presença de lados de mesma medida em um quadrado e a existência de quatro ângulos retos em um retângulo.

Ressalta-se que os registros das tarefas 1 e 2 foram analisados por intermédio dos níveis de Van Hiele (1986), conforme Nasser e Tinoco (2004), e dos subníveis de Battista (2007). Desse modo, relacionou-se os alunos a um nível de Van Hiele (1986) e a um subnível de Battista (2007) nos dois momentos da tarefa 1, e nas três fases da tarefa 2 (agrupamento inicial, reagrupamento 1 e reagrupamento 2). A Tabela 11 representa as relações de cada estudante com níveis e subníveis.

Tabela 11

Classificações de Heitor e Luíza com níveis e subníveis nas tarefas 1 e 2

CLASSIFICAÇÕES				
MOMENTOS	HEITOR		LUÍZA	
	Nível de Van Hiele (1986)	Subnível de Battista (2007)	Nível de Van Hiele (1986)	Subnível de Battista (2007)
Tarefa 1	2º	2.2	1º	2.1
Agrupamento inicial	1º	2.2	1º	2.1
Reagrupamento 1	1º	2.2	1º	2.2
Reagrupamento 2	2º	2.3	1º	2.2

Fonte: Elaborado pela autora (2022)

Percebe-se, pela Tabela 11, que Luíza assumiu a 1ª etapa de Van Hiele (1986) em todos os momentos enquanto Heitor oscilou entre 1º e 2º nível de Van Hiele (1986). Ele mostrou que é possível ter conhecimentos de mais de um nível, o que faz com que a hierarquia do modelo de Van Hiele (1986) seja questionada. Todavia, para esta pesquisa, é necessário classificá-los à um nível. Logo, Heitor e Luíza assumem o 1º nível de Van Hiele (1986), pois a oscilação de Heitor gerou o entendimento de que ele não dominou completamente a 2ª etapa.

Nos subníveis de Battista (2007), Heitor apareceu no subnível 2.2 na maioria dos momentos. Assim, relaciona-se a esse subnível. Quanto à Luíza, ela apresentou características dos subníveis 2.1 e 2.2, o que levou a inseri-la no subnível 2.2. Isso porque em diversas situações, mesmo com a linguagem mista, ela descreveu coerentemente alguns quadriláteros. Diante disso, alunos dos anos finais do ensino fundamental podem se associar a um mesmo nível e subnível.

Salienta-se que Heitor e Luíza buscaram dar sentido a todos os passos realizados por eles durantes as tarefas. Mas, certos pontos de seus registros e de suas observações sobre os quadriláteros notáveis necessitaram de ajustes, o que foi proporcionado pela pesquisadora ao final da aplicação dos materiais planejados. Por isso, entende-se que o subnível 2.2 de Battista (2007) atende a forma como eles explanaram seus conhecimentos. Ademais, esse subnível representa de modo mais detalhado o desenvolvimento de Heitor e Luíza nesta pesquisa, se comparado ao 1º nível de Van Hiele (1986).

Com os resultados deste trabalho, os pesquisadores observaram que o modelo de Van Hiele (1986) e os subníveis de Battista (2007) são relevantes no processo de classificação do desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, se tornando teorias complementares no que refere ao processo de ensino e de aprendizagem. Ademais, proporcionam ao professor um respaldo para a aplicação de práticas voltadas às especificidades dos alunos. Isso porque a ideia linear dos níveis e subníveis constituem-se apenas como uma base para um "leque" de opções de tarefas determinadas a uma aprendizagem subjetiva, considerando a forma que cada estudante se desenvolve.

REFERÊNCIAS

BATTISTA, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In: LESTER, F. K. (ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*: a Project of the national council of teachers of mathematics. Charlotte: Information Age Publishing, p. 843-908.

BOGDAN, R. C. & BIKLEN, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora. Título original: Qualitative Research for Education.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica (1999). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEMT. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf

BRASIL, Ministério da Educação (2018). Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base. Brasília: MEC. Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

BRUNHEIRA, L. & PONTE, J. P. (2015). A influência das representações na classificação de quadriláteros em futuras professoras e educadoras. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, Bragança*. Investigação em Educação Matemática*: Representações Matemáticas. Bragança: SPIEM: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, 2015. p.198-200. Recuperado de http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2015.pdf

COSTA, A. P. (2016). *A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental*: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 242 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016. Recuperado de https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/17129/1/Disserta%c3%a7%c3%a3o_Andr%c3%a9Pereira.pdf

COSTA, A. P. & CÂMARA DOS SANTOS, M. (2017). O desenvolvimento do pensamento geométrico no estudo dos quadriláte notáveis sob a ótica vanhieliana. *Revista Educação Matemática em Foco*, Campina Grande, v. 6, n. 2. Recuperado de http://revista.uepb.edu.br/index.php/REVEDMAT/article/view/3834

CROWLEY, M. L. (1994). O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M. & SHULTE, A. P. (org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, p. 1-20.

CURI, E. (2021). Algumas reflexões sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico no currículo de matemática da cidade de São Paulo. *Em Teia*: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, Recife, v. 12, n. 3. Recuperado de https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/250560

KALEFF, A. M. et al. (1994). Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele. Bolema: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 9, n. 10. Recuperado de https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10671/7055

NASSER, L. & TINOCO, L. (2004). Curso básico de geometria: enfoque didático. 3. ed. Rio de Janeiro: UFRJ/ IM. Projeto Fundão.

PASSOS, A. Q.; BURIASCO, R. L. C. & SOARES, M. T. C. (2019). Ideias de Van Hiele e Educação Matemática Realística: algumas aproximações. *Bolema*: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 33, n. 65. Recuperado de https://www.scielo.br/j/bolema/a/xRVzV6XspdxbpLwj5sGVKJD/?format=pdf&lang=pt

PINHO, J. L. R.; BATISTA, E. & CARVALHO, N. T. B. (2010). *Geometria I*. 2. ed. Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM. Recuperado de http://mtm.ufsc.br/~ebatista/Eliezer_Batista_arquivos/MTM_Geometria_I_WEB.pdf

PONTE, J. P. (2006). Estudos de Caso em Educação Matemática. *Bolema*: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 19, n. 25. Recuperado de https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1880

RODRIGUES, M. P. & SERRAZINA, L. (2017). *Reconhecimento de figuras no plano a partir da identificação de propriedades*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/321826388.

USISKIN, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. Chicago: University of Chicago. Recuperado de https://ucsmp.uchicago.edu/resources/van_hiele_levels.pdf

VILLIERS, M. (2010). Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. Tradução de Celina A. A. P. Abar. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v.12, n.3. Recuperado de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/5167

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA
Pensamento Geométrico: Uma investigação nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Carla da Silva Eliodorio
Pós-graduada em metodologia do ensino de matemática
Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo - SEDU, Cachoeiro de Itapemirim, Brasil.
carlaeliodorio19@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-6142-7409

Jorge Henrique Gualandi
Doutor em Educação Matemática - PUC-SP
Instituto Federal do Espírito Santo - campus Cachoeiro de Itapemirim,
Coordenadoria da Licenciatura em Matemática, Cachoeiro deItapemirim, Brasil.
jhgualandi@ifes.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-0302-7650

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Valdelino José Parmanhani, 47, 29313-224, Cachoeiro de Itapemirim, ES, Brasil.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: C. S. Eliodorio, J. H. Gualandi
Coleta de dados: C. S. Eliodorio, J. H. Gualandi
Análise de dados: C. S. Eliodorio, J. H. Gualandi
Discussão dos resultados: C. S. Eliodorio, J. H. Gualandi
Revisão e aprovação: C. S. Eliodorio, J. Gualandi

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Aprovado pelo comitê de ética Número de processo: 5.147.655 Data: 06 de dezembro de 2021

CONFLITO DE INTERESSES
Nada consta.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 25-09-2023 – Aprovado em: 30-09-2024