Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ABORDAGEM DAS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS EM SALA DE AULA: DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS À ABSTRAÇÃO REFLEXIONANTE

Approach To Mathematical Demonstrations In The Classroom: From Problem Solving To *Réfléchissante* Abstraction

Josias Neubert SAVÓIS
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Osório, Brasil
josias.savois@osorio.ifrs.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-4332-8263

Fernando BECKER
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil
fbeckerufrgs@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4215-9805

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Este texto se propõe a construir uma base teórica que justifique o desenvolvimento de atividades envolvendo demonstrações matemáticas, nas aulas de matemática da educação básica, à luz da metodologia ativa conhecida como Resolução de Problemas e da Epistemologia Genética desenvolvida por Jean Piaget, mais precisamente sobre os aspectos da abstração reflexionante e da tomada de consciência. Estes conceitos, na visão de Piaget, estão diretamente ligados com a matemática, com o raciocínio lógico-matemático e com o conhecimento matemático desenvolvido pelo sujeito. Os conceitos de argumentação, prova e demonstração matemática aqui utilizados são baseados nos trabalhos desenvolvidos por Nicolas Balacheff, que pesquisa sobre esta temática desde 1987 até os dias atuais. No que concerne à defesa do uso da metodologia de Resolução de Problemas, como uma técnica para o desenvolvimento das demonstrações matemáticas e, consequentemente, para a construção do conhecimento matemático, será utilizada a base teórica desenvolvida pelo matemático George Polya.

Palavras-chave: Demonstrações Matemáticas, Resolução De Problemas, Abstração Reflexionante

ABSTRACT

This text proposes to build a theoretical basis that justifies the development of activities involving mathematical demonstrations in basic education mathematics classes in light of the active methodology known as Problem Solving and Genetic Epistemology developed by Jean Piaget, more precisely on aspects of reflective abstraction and awareness. These concepts, in Piaget's view, are directly linked to mathematics, logical-mathematical reasoning and the mathematical knowledge developed by the subject. The concepts of argumentation, proof and mathematical demonstration used here are based on the work developed by Nicolas Balacheff, who has been researching this topic since 1987 to the present day. Regarding the defense of the use of the Problem Solving methodology as a technique for the development of mathematical demonstrations and, consequently, for the construction of mathematical knowledge, will be used the theoretical basis developed by mathematician George Polya.

Keywords: Proof In Mathematics**,** Problem Solving**,** *Réfléchissante* Abstraction

INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem de matemática no contexto escolar têm se revelado um tema que gera muitos apontamentos em pesquisas com diversos enfoques, desde os índices que se propõem a mensurar o nível de aprendizagem dos estudantes até as metodologias de ensino que devem ser adotadas para possibilitar uma aprendizagem satisfatória em matemática. Neste texto, pretende-se estabelecer uma relação epistêmica entre os conceitos de argumentações, provas e demonstrações matemáticas, baseados nos trabalhos do matemático francês Nicolas Balacheff, com os conceitos de abstração reflexionante e tomada de consciência da Epistemologia Genética, criada pelo biólogo, psicólogo e epistemólogo suíço Jean Piaget.

Como concepção metodológica norteadora, para a exploração das possibilidades de desenvolvimento de provas e demonstrações no ambiente escolar, optou-se por adotar a metodologia ativa conhecida como Resolução de Problemas. Ela apresenta um embasamento teórico na obra pioneira do matemático húngaro George Polya, além de outros pesquisadores desta abordagem metodológica. Inicialmente, será realizada uma breve exposição dos conceitos de metodologia ativa, que servirá para justificar o uso, em sala de aula, da metodologia de Resolução de Problemas. Trataremos essa metodologia como fundamentação de uma forma de abordagem pedagógica ativa, de conteúdos e conceitos de matemática, e estabeleceremos uma relação entre esta metodologia ativa e as atividades que visam a promover a autonomia dos estudantes e a construção de argumentos para encarar problemas de provas e demonstrações matemáticas no ambiente escolar.

Por fim, tenta-se justificar a importância de se explorar, nas aulas de matemática, problemas de demonstrações matemáticas baseando-se na Epistemologia Genética de Piaget na medida em que ela fundamenta teoricamente este tipo de exploração. Busca-se com isso compreender o papel da abstração reflexionante, realizado por progressivos níveis de abstração e generalização, na produção do conhecimento matemático. Ao longo do texto, serão utilizados diferentes teóricos para fundamentar as ideias aqui apresentadas. Pretende-se conciliar, outrossim, estes diferentes pontos de vista com as concepções da natureza da matemática e do conhecimento lógico-matemático tais como conceituados por Piaget.

1 METODOLOGIA ATIVA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A busca por metodologias de ensino que se mostrem exitosas, seja qual for a área de aplicação, não é algo recente. Segundo Moran (2015, p. 17) "se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que os alunos se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes". No mesmo sentido, "promover a aprendizagem significativa, exige, em primeiro lugar, uma metodologia de ensino que seja capaz de envolver o aluno enquanto protagonista de sua aprendizagem" (Bueno, Koehler, Sellmann, Silva & Pinto, 2012, p. 78). Segundo Mitre (apud Bueno et al., 2012, p. 79), "as metodologias ativas estão alicerçadas em um princípio teórico significativo: a autonomia, algo explícito na invocação de Paulo Freire". Atividades em que o aluno participa ativamente de todo o processo de construção do conhecimento, e resolve problemas a partir das suas interações com o objeto[1] de estudo, devem ser consideradas como atividades de ensino potencialmente construtoras de conhecimento. Seu caráter experimental é defendido por Piaget (2015)[2] ao afirmar que

> Se existe um setor no qual os métodos ativos se deverão impor no mais amplo sentido da palavra, é sem dúvida o da aquisição das técnicas de experimentação, pois uma experiência que não seja realizada pela própria pessoa, com plena liberdade de iniciativa, deixa de ser, por definição, uma experiência, transformando-se em simples adestramento (Piaget, 2015, p 27)

No que concerne ao ensino de matemática, podemos considerar que essa experimentação em torno dos objetos matemáticos pode ser realizada através de representações mentais sobre eles, visto que todo o conhecimento matemático é criação e invenção do sujeito humano (Becker, 2019). Piaget afirma que a matemática, mais do que apenas uma linguagem, como poderia crer um físico experimental que a usa para descrever e compreender um fenômeno físico, é quem permite estruturar o real e deduzir os fenômenos sem necessariamente ficar preso à limitação de constatá-los, e conclui que "a matemática os deduz por meio de operações e de transformações ("grupos", "operadores", etc.) que são ainda ações, mas executadas mentalmente" (Piaget, 1973a, p. 15). Neste sentido, Moran (2015, p. 18) afirma que "as metodologias ativas são pontos de partida para

[1] De acordo com a teoria de Piaget, entende-se por objeto tudo aquilo que é externo ao sujeito (uma coisa, uma pessoa, uma noção ou conceito, uma teoria, uma pauta musical, um software, etc.) (Becker, 2014, p. 110).

[2] A obra original data de 1948, e foi revisada em 1972.Utilizamos a 22ª edição brasileira, de 2015.

avançar para processos mais avançados de reflexão, de integração cognitiva, de generalização, de reelaboração de novas práticas", enfatizando o caráter inventivo, reflexivo e de generalizações que devem ser explorados durante o trabalho baseado em uma metodologia ativa que realmente coloque o sujeito como um inventor ou construtor do seu próprio conhecimento, pontos estes reforçados por Piaget (2015, p. 27) quando garante que "o *princípio fundamental dos métodos ativos* só se pode beneficiar com a História das Ciências e assim pode ser expresso: *compreender é inventar, ou reconstruir através da reinvenção",* acrescentando que é preciso curvar-se ante tais necessidades se a pretensão for "moldar indivíduos capazes de produzir ou de criar, e não apenas de repetir" (Piaget, 2015, p. 27).

No ensino e aprendizagem de conteúdos e conceitos de Matemática na educação básica, uma metodologia ativa que apresenta muitos defensores que dão suporte teórico através de uma quantidade expressiva de trabalhos acadêmicos e pesquisas que tratam das suas potencialidades, é a metodologia conhecida como Resolução de Problemas. As estratégias para a resolução de problemas de matemática foram desenvolvidas, originalmente, pelo matemático húngaro George Polya (1887-1985). Polya (2006) considerava que, ao se procurar a solução de um problema, a nossa maneira de encará-lo variava continuamente dependendo do ponto de vista que se assumia. Em sua obra, Polya defende que a resolução de problemas pode ser decomposta em quatro etapas, sendo elas:

> Primeiro, temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos ideia da resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (Polya, 2006, p. 4-5)

Tentando esclarecer melhor estes quatro passos essenciais, para abordar um problema de matemática e conseguir resolvê-lo, Polya (2006) afirma que o aluno deve estar em condições de identificar as partes principais do problema, como a incógnita, os dados e a condicionante (*compreensão*). Em seguida, deve questionar-se se já resolveu algum problema correlato e se pode utilizar tal estratégia no problema atual (*plano, estratégias*), analisando se cada passo executado está certo e se é possível demonstrar que o passo está certo (*execução do plano*). Por fim, o aluno deve se perguntar se é possível verificar o resultado, se é possível empregar o método utilizado em outro problema ou se poderia ter usado um caminho diferente na resolução (*retrospectiva*), realizando assim uma abordagem completa e uma compreensão mais profunda do problema resolvido e dos conceitos assimilados no processo de resolução. Esta etapa de retrospectiva possibilita também que o aluno tome consciência do surgimento de generalizações, ou seja, propriedades ou técnicas matemáticas que podem ser empregadas em situações gerais dependendo das características comuns dos objetos relacionados.

Uma generalização pode ocorrer, por exemplo, quando o aluno, ao fazer a *retrospectiva* utilizando o teorema de Pitágoras, constata que qualquer altura *h* do triângulo equilátero em função do lado *l* medirá a metade da medida do lado multiplicada pela raiz quadrada de 3. Neste momento, o nível de abstração atingido será notavelmente superior ao utilizado na resolução do problema inicial, produzindo assim um genuíno conhecimento matemático através de um percurso semelhante ao que os matemáticos de diversas épocas fizeram. Becker (2019) explica assim essa conquista:

> Todo conhecimento matemático é produto de generalizações; todo aprendiz tem que fazer para si o que os matemáticos já fizeram. Esse conhecimento extrapola sempre o âmbito para o qual ele foi construído. Ele foi construído para resolver um problema e, ao ser construído, ele passa a resolver uma infinidade de problemas; ele se generalizou. Sua natureza não se define ou se esgota em sua aplicação (Becker, 2019, p. 970)

Corroborando com a ideia de que o conhecimento matemático, produzido para resolver um problema, acaba, na verdade, resolvendo diversos outros problemas semelhantes, pois formula generalizações aplicáveis a diferentes situações, Onuchic e Allevato (2011, p. 81) afirmam que “o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos”. Alinhando-nos a isso, entendemos que estes novos conceitos ou conteúdos podem também ser construídos através de demonstrações, tanto no caminho quanto na chegada. Durante o processo de desenvolvimento de uma demonstração matemática poderá surgir a necessidade de utilização de conceitos novos ou que não pareciam estar relacionados inicialmente com o que se pretendia demonstrar. Ao finalizar a demonstração matemática, pode-se afirmar que um novo conceito pode ser tomado como verdade universal, generalizável e aplicável a diversos contextos, abrindo o leque de conhecimentos matemáticos produzidos e de suas aplicações.

Impõe-se, aqui, um alerta importante: Resolução de Problemas é diferente de resolução de exercícios. Dante (1998, p. 43) esclarece que um “problema ou problema-processo, é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução". Ele acrescenta ainda que os problemas-processo aguçam a curiosidade do aluno e que "a resolução de um problema-processo exige uma certa dose de iniciativa e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias" (Dante, 1998, p. 43).

Essa distinção, entre problema e exercício, deve ser considerada como uma premissa fundamental para que a referida metodologia seja realmente ativa. Do ponto de vista epistemológico, uma metodologia ativa pode ser fundamentada pelo processo de abstração reflexionante, teoria criada por Piaget (1995) e publicada em 1977, após extensas pesquisas sobre o modo como crianças e adolescente desenvolvem-se cognitivamente resolvendo problemas formulados pelos pesquisadores. Segundo Becker (2014, p. 123), "a abstração reflexionante abre-se como possibilidade de superação da metodologia de ensino da repetição". Alinhado ao que é defendido por Dante, sobre as habilidades necessárias, e que se desenvolvem no estudante durante a resolução de um problema-processo, "a abstração reflexionante garante os fundamentos teóricos necessários para uma pedagogia ativa – pedagogia que, para muito além da cópia e da repetição, aposta na construtividade, criatividade e inventividade da ação do sujeito da aprendizagem" (Becker, 2014, p. 123). O interesse e o envolvimento do aluno em querer resolver um problema matemático são fatores imprescindíveis para que ele utilize esquemas e recursos cognitivos necessários para construir conhecimento e assim poder aprender conteúdos mais numerosos e, sobretudo, de maior complexidade.

2 RESOLVENDO PROBLEMAS DE DEMONSTRAÇÕES

Considerando a necessidade de propor atividades, nas aulas de matemáticas, que possibilitem o aluno envolver-se ativamente na construção do conhecimento matemático, acreditamos que a utilização de problemas, que envolvam provas e demonstrações matemáticas, seja um caminho eficaz para atingir este objetivo, mesmo tratando-se de tarefas de difícil execução. Segundo Villani e Torossian (2018, p. 25) "muitos alunos que chegam à universidade têm dificuldade em entender o que é prova e por que ela é essencial em matemática. As verdades são muitas vezes ditas, em vez de demonstradas". Isso pode ser justificado pelo fato de que tanto professores quanto alunos prefiram, muitas vezes, usar o caminho mais curto e mais "mecânico" ao explorar determinados conteúdos. A ênfase dada em sala de aula à resolução de exercícios, e não à resolução de problemas ou à compreensão dos conceitos matemáticos validados por demonstração, mostram que, “de certa forma, o ensino da matemática tornou-se axiomático e muitos alunos do ensino médio não imaginam que o teorema de Pitágoras possa ser demonstrado” (Villani & Torossian, 2018, p. 25). Esse fato evidencia as lacunas que existem na aprendizagem de matemática.

Em um relatório, apresentado ao governo da França, que propõe estabelecer algumas medidas para o ensino de matemática no currículo francês, Villani e Torossian (2018, p. 25) afirmam que “a noção de prova está no cerne da atividade matemática, seja qual for o nível (apropriadamente, essa afirmação é válida desde o jardim de infância até a universidade)”. Pode-se perceber e argumentar que o ganho cognitivo e intelectual, advindo das atividades envolvendo demonstrações matemáticas, vão além dos teoremas e propriedades demonstradas, já que, “além da teoria matemática, entender o que é um processo de justificação fundamentada baseada na lógica é um eixo importante da formação do cidadão” (Villani & Torossian, 2018, p.26). Ao longo do processo de elaboração de uma demonstração matemática, o sujeito passa por diferentes etapas de construção de justificativas que, segundo Balacheff (2022), podem ser descritas como explicação, argumentação, prova e prova matemática; esta última entendida como sinônimo de demonstração.

> O que é produzido primeiro é uma ‘explicação’ da validade de uma declaração da própria perspectiva do sujeito. Este texto pode alcançar o status de prova se receber apoio suficiente de uma comunidade que o aceita e valoriza como tal. Finalmente, pode ser reivindicado como prova matemática se atender aos padrões atuais da prática matemática. Portanto, a pedra angular de uma problemática da prova em matemática (e possivelmente em qualquer campo) é a natureza da relação entre o conhecimento do sujeito e o que está envolvido na “prova” (Balacheff, 2010, p. 130)

Para deixar um pouco mais claras estas distinções entre argumento e prova, Balacheff (2022) acrescenta uma distinção entre argumentação retórica e argumentação heurística: “a argumentação retórica visa convencer um interlocutor, enquanto a argumentação heurística orienta a resolução do problema favorecendo escolhas estratégicas ou apoiando a suposta validade de um enunciado pelo único recurso àquele a quem o raciocínio o vincula” (Balacheff, 2022, p. 779). Ele ainda argumenta que “essas relações entre explicação, prova e demonstração foram esclarecidas a partir da perspectiva do indivíduo empenhado em resolver um problema e validar sua solução” (p. 782). O autor acrescenta que

> a passagem da explicação à argumentação é aquela imposta pela necessidade de formular as razões e a sua organização, seja para si ou para outrem. Fazer com que outros aceitem que uma argumentação estabelece a validade de uma solução muda seu status e valor pelo caráter público que adquire. Ela ganha o status de prova. Entre essas provas, algumas têm uma estrutura particular que satisfaz os padrões coletivos, como na matemática os da demonstração (Balacheff, 2022, p. 782)

Corroborando com o exposto, Villani e Torossian, (2018, p. 26) afirmam que “a aquisição de formas de argumentação próprias da matemática, que complementem as desenvolvidas em outras disciplinas, é essencial”. Balacheff (2010, p. 118) enfatiza que “a prova é um exemplo de empreendimento intelectual que permite a uma minoria superar a opinião de uma maioria estabelecida, de acordo com regras compartilhadas”, visto que uma prova científica não depende de interesses individuais ou de grupos sociais específicos, e sim, de “seu caráter normativo que tem precedência sobre suas propriedades retóricas” (Balacheff, 2022, p. 783).

Sendo assim, “os aspectos técnicos da prova matemática são então essenciais, e podem ser aceitos como o preço para uma construção viável da matemática. A esse respeito, o rigor formal é uma arma contra os vieses que os ‘esquemas de prova idiossincráticos’ podem produzir” (Balacheff, 2010, p. 131). Voltando-se novamente para a questão de resolver problemas, envolvendo demonstrações matemáticas em sala de aula, deve-se considerar os diferentes níveis de ensino para que se estabeleçam diferentes abordagens, buscando a evolução gradativa do formalismo matemático e o entendimento dos objetos matemáticos explorados. Desse modo, acredita-se que a metodologia de Resolução de Problemas possibilita que o aluno faça suas deduções e experimentações em busca da argumentação que poderá se transformar em uma demonstração matemática. Vale ressaltar que, de acordo com Balacheff (2010, p. 118), “construir uma prova requer uma mudança essencial na posição epistemológica do aprendiz: passar de uma posição prática (regida por uma espécie de lógica da prática) para uma posição teórica (regida pela especificidade intrínseca de uma teoria)”. Neste ponto de transição, entre argumentos derivados de experimentação e deduções teóricas, emerge o conhecimento matemático, construído pelo sujeito, mediante processos de reflexionamento e reflexão, próprios do processo de abstração reflexionante, do qual falaremos no próximo item.

Sobre a questão dos níveis de ensino e as possibilidades de exploração de problemas de argumentação ou demonstração, Balacheff (2022) baseia-se nos estádios[3] de desenvolvimento cognitivo, formulados por Piaget, ao afirmar que “abordagens cognitivas para a aprendizagem de demonstração enfatizaram a dificuldade de dominar a lógica subjacente e tornaram o tempo dessa aprendizagem dependente do tempo que a psicologia do desenvolvimento identificou na evolução do pensamento racional” (Balacheff, 2022, p. 792). Balacheff acredita que a transição para o estádio conhecido como operatório formal, que se dá por volta dos 11 a 12 anos de idade, em média, é o que justifica o fato de “que os antigos programas prescreviam o ensino da demonstração a partir da quarta série, e que nos países anglo-saxões esse ensino só poderia aparecer mais tarde” (Balacheff, 2022, p. 792). Esse estádio caracteriza-se pelas possibilidades maiores da abstração refletida (abstração reflexionante com tomada de consciência) e pelo surgimento da predominância das representações mentais, totalmente reversíveis, construídas por abstração reflexionante, a partir das coordenações das ações do sujeito, em contraposição às características extraídas dos objetos por abstração empírica. O autor corrobora a teoria de Piaget, pois também considera que

> A mudança do empirismo ingênuo para a demonstração pode, em uma fórmula rápida, descrever o movimento do aprendizado da prova na matemática. Esta passagem das provas pragmáticas às provas intelectuais necessárias para ir em direção à demonstração é também a de uma problemática pragmática a uma problemática teórica e, portanto, de uma evolução da leitura das situações em que a atividade matemática se desenvolve e do estatuto dos conhecimentos mobilizados (Balacheff, 2022, p. 792)

Os estádios do desenvolvimento cognitivo, descritos e explicados por Piaget, são: sensório-motor (de 0 a 2 anos), pré-operatório (2 a 7/8 anos), operatório concreto (7/8 a 11/12 anos), operatório formal (11/12 a 14/15 anos). Todas essas idades são médias que podem variar em função do meio social “que pode acelerar ou retardar o aparecimento de um estádio, ou até impedir sua manifestação” (Piaget, 1973b, p. 50).

No primeiro estádio predominam as abstrações empíricas (qualidades retiradas dos objetos ou de ações observáveis). Nos estádios pré-operatório e operatório concreto,

[3] Utilizaremos o termo *estádio*, ao invés de *estágio*, para designar os períodos de desenvolvimento cognitivos, pois Piaget usava o termo *stade* (*estado*), e não *stage* (*estágio*). Em português, a bagagem semântica de “estágio” leva a entender etapas fixas, determinadas hereditariamente, como foi ampla e erroneamente entendida essa parte da teoria piagetiana. A tradução pela palavra “estádio” nos traz o significado de “estados” ou períodos importantes que, se vividos intensamente, permitem transitar bem para um período de maior capacidade cognitiva. (Ver mais em Becker, 2012, p. 153–164).

verifica-se a predominância de abstrações pseudo-empíricas (que também são reflexionantes e se caracterizam pela retirada de qualidades que não são dos objetos, mas das coordenações das ações do sujeito; se estão lá, nos objetos, é porque o sujeito as colocou lá, previamente). No operatório formal, a tendência é o predomínio de abstrações refletidas – abstrações reflexionantes com tomada de consciência. Pode-se compreender que, no que se refere ao aprendizado de matemática ou da assimilação das demonstrações matemáticas, "o exemplo genérico fica na fronteira entre provas pragmáticas e provas intelectuais. A passagem dessa fronteira é motivada pela tomada de consciência da natureza genérica do caso que sustenta a argumentação" (Balacheff, 2022, p. 793).

A seguir, propomos uma aproximação do processo de desenvolvimento cognitivo, apresentado por Piaget como abstração reflexionante, com a abstração matemática necessária para o entendimento das demonstrações matemáticas pelas crianças e adolescentes, através da utilização da metodologia de Resolução de Problemas, de George Polya. Impõe-se, para isso, o esclarecimento de conceitos como os de diferentes tipos de abstrações e do processo de abstração reflexionante, mediante reflexionamentos e reflexões. O objetivo é a construção de uma fundamentação teórica consistente que relacione o uso das argumentações e demonstrações matemáticas, propostas por Balacheff, com o desenvolvimento de condições a priori do conhecimento matemático, como a gênese da noção de quantidade e de número, propostas por Piaget.

3 ABSTRAÇÃO EMPÍRICA E ABSTRAÇÃO REFLEXIONANTE

Inicialmente, precisamos entender alguns conceitos fundamentais da teoria de Piaget, antes de partirmos para a sua relação com as demonstrações matemáticas. Para isso, nos apoiamos nos textos de Piaget (1977/1995 e 1971/2015) e do professor Fernando Becker (2014 e 2019). Segundo Becker (2014, p. 105), "na obra de Piaget, abstração é a atividade ao mesmo tempo coordenadora e diferenciadora do sujeito conhecedor mediante a qual constrói conhecimento, como estrutura ou capacidade; secundariamente, como conteúdo". Dito de outra maneira, abstração pode ser entendida como a capacidade que o sujeito desenvolve para produzir conhecimento, tanto no que diz respeito à forma quanto no que se refere ao conteúdo. Piaget classifica as abstrações em dois grandes grupos: a abstração empírica e a abstração reflexionante, sendo que esta última pode se desdobrar em outras duas formas, a abstração pseudo-empírica e a abstração refletida.

Piaget (1995, p. 274) define que “a abstração *empírica* (*empirique*) tira suas informações dos objetos como tais, ou das ações do sujeito sobre suas características materiais”, ou seja, relaciona-se com as qualidades ou propriedades observáveis de um objeto ou das ações. Na matemática, um exemplo simples que pode ser dado, é o fato de, ao desenhar um triângulo qualquer, ou manipular um objeto em formato de triângulo, as características retiradas por abstração empírica seriam as mais básicas, como a verificação da figura ou do objeto ter “bicos” (vértices e ângulos), as linhas serem retas ou curvas, o tamanho comparado perceptivamente com outro objeto ou a cor dos traçados serem, por exemplo, vermelha ou verde – todas características observáveis. Becker alerta que, “com a abstração empírica, por mais importante que seja, o sujeito nunca chegará a deduções lógico-matemáticas, condição da conquista do conjunto dos possíveis e da necessidade (lógica)” (Becker, 2014, p. 115). Essas deduções são obra da razão, não da percepção que caracteriza a abstração empírica.

Passando para o outro tipo de abstração, Piaget (1995, p. 274) esclarece que “a abstração *reflexionante* (*réfléchissante*) apoia-se sobre as coordenações das ações do sujeito, podendo estas coordenações e o próprio processo reflexionante permanecer inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituação variadas”. Becker (2014) complementa que essas coordenações das ações, por se realizarem internamente ao sujeito, nos cérebros individuais, não são observáveis. Piaget (1995) define abstração reflexionante da seguinte forma:

> A abstração “reflexionante” é um processo que permite construir estruturas novas, em virtude da reorganização de elementos tirados de estruturas anteriores e, como tal, tanto pode funcionar de maneira inconsciente como sob a direção de intenções deliberadas: particularmente, o sujeito de uma investigação ignora, por muito tempo, de que fontes ele tem haurido os mecanismos constitutivos de sua nova construção; e um matemático pode nada saber, sem por isso sentir-se impedido de realizar seu trabalho sobre as raízes psicogenéticas das estruturas elementares que utiliza (como, por ex., a de grupo) (Piaget, 1995. p.193)

Piaget deixa claro que muitas vezes os matemáticos realizam seu trabalho, calculam, conjecturam, demonstram, aplicam conhecimentos para resolver problemas de outra área, sem tomar consciência de todos os processos de construções mentais que o permitem evoluir, a cada novo conhecimento produzido por ele, ou seja, ele não tem consciência da cadeia de abstrações reflexionantes envolvidas na produção de seu próprio conhecimento matemático. Neste sentido, Becker (2014) complementa que esse tipo de abstração, que é a abstração reflexionante propriamente dita, é a forma básica que está presente nas outras formas (pseudo-empírica ou refletida), e caracteriza-se "por se apoiar sobre as coordenações das ações ou operações, estruturas, etc., anteriores para delas retirar certos caracteres e utilizá-los para outras finalidades – que não as finalidades para as quais elas foram construídas" (Becker, 2014, p. 107).

Durante o processo de abstração reflexionante, ocorrem duas etapas, que Piaget (1995) define como dois aspectos inseparáveis: por um lado, ocorre o que ele chama de *reflexionamento*, que é a projeção, como se fosse por um refletor ou um projetor, sobre um patamar superior daquilo que foi retirado de um patamar inferior; e, por outro lado, ocorre a *reflexão*, "entendida esta como ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior" (Piaget, 1995, p. 274-275). De uma maneira mais clara, o *reflexionamento* consiste em retirar qualidades das coordenações, de um patamar qualquer, e transferi-las para o patamar acima e a *reflexão* consiste na reorganização desse patamar em função dessas novas qualidades de coordenações de ações, trazidas por reflexionamento (Becker, 2014), que perturbaram a ordem aí existente. Piaget (1995, p. 276) acrescenta que "novos patamares de 'reflexionamentos' se constroem, portanto, sem cessar, para permitir as novas 'reflexões' – é o que mostra toda a história das diferentes áreas das matemáticas, em suas tematizações sucessivas, até suas fases atuais", ficando evidente aqui que a construção dos conhecimentos, nas diversas áreas da matemática, apoia-se nesta relação contínua e progressivamente complexa de reflexionamentos e reflexões. A matemática desenvolve-se através da construção de conceitos, ou propriedades generalizáveis, por abstração refletida que, na maioria das vezes, são produzidos por demonstrações matemáticas, construções estas que dependem quase que exclusivamente das intervenções e reflexões realizadas pelos sujeitos (os matemáticos) em relação ao objeto matemático, ou seja, dependem da abstração reflexionante. Piaget (1995) esclarece:

> Quanto à natureza destes reflexionamentos, trata-se, inicialmente, apenas, de um deslocamento dos observáveis em função de uma conceituação progressiva pela tomada de consciência, isto é, pela interiorização das ações. No entanto, em um sistema de conceitos, é necessário distinguir dois aspectos: sua forma e seu conteúdo. Ora, se o conteúdo pode consistir apenas em observáveis, relevando, pois, da abstração empírica, sua forma, que consiste em reunir em um todo, apoiando-se sobre relações de equivalência, em função de suas qualidades comuns, supõe a intervenção de abstração reflexionante (Piaget, 1995, p. 276)

Compreende-se assim que todo o processo de argumentação e prova, descrito por Balacheff, até se atingir as demonstrações matemáticas podem proporcionar esta conceituação progressiva pela tomada de consciência defendida por Piaget, ou seja, pela interiorização das ações quando o sujeito demonstra uma propriedade, um conceito ou um teorema; isso parece caracterizar-se como a conclusão de um processo de abstração refletida (abstração reflexionante com tomada de consciência). Piaget ainda faz uma distinção clara entre reflexionamentos e reflexões, relacionando o primeiro aos conteúdos transferidos ou assimilados, e as reflexões à construção de novas formas que ocorrem por um processo de acomodação[4].

> Até agora assistimos, pois, a um processo em espiral: todo reflexionamento de conteúdos (observáveis) supõe a intervenção de uma forma (reflexão), e os conteúdos assim transferidos exigem a construção de novas formas devidas à reflexão. Há, assim, pois uma alternância ininterrupta de reflexionamentos → reflexões → reflexionamentos; e (ou) de conteúdos → formas → conteúdos reelaborados → novas formas etc., de domínios cada vez mais amplos, sem fim e, sobretudo, sem começo absoluto (Piaget, 1995, p. 276-277)

Para finalizar, a conceituação dos tipos de abstração, apresentadas por Piaget, chegamos às abstrações pseudo-empíricas e às refletidas, ambas sendo desdobramentos da abstração reflexionante. Piaget (1995, p. 274) afirma que "quando o objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações (p. ex. ao ordenar os elementos de um conjunto), a abstração apoiada sobre tais propriedades é chamada pseudo-empírica". Por fim, ele define como abstração refletida o resultado de uma abstração reflexionante, assim que se torna consciente, e isto, independentemente do seu nível (Piaget, 1995). Becker (2019) acrescenta que a construção de um conceito só se finaliza mediante abstrações refletidas, inclusive todos os conceitos matemáticos, corroborando com a nossa expectativa de relacionar os conceitos e propriedades desenvolvidos através da resolução de problemas de demonstrações matemáticas e a natureza epistemológica do raciocínio-lógico matemático, produzido, a nosso ver, por abstrações reflexionantes com tomada de consciência, ou seja, por abstrações refletidas.

Vale ressaltar que, segundo Becker (2014, p. 115), "a abstração pseudo-empírica, possibilita a realização de um jogo mental altamente eficiente utilizando ao mesmo tempo as qualidades da abstração empírica e o mecanismo da abstração reflexionante". É a abstração pseudo-empírica que articula a passagem da abstração empírica à reflexionante; lembrando sempre que é a abstração reflexionante que dá legitimidade, isto é, dá sentido

[4] Em outras obras, Piaget considera que o desenvolvimento cognitivo ocorre através dos processos de assimilação e acomodação (equilibração), que podem ser entendidos como os mesmos processos de reflexionamento e reflexão (abstração reflexionante).

aos dados obtidos pela empírica (Becker, 2014). Voltando ao exemplo do triângulo, citado para ilustrar a abstração empírica, podemos considerar que as características do triângulo, encontradas através da comparação de lados ou de ângulos (maior, menor ou igual), a sua classificação quanto aos lados ou quanto aos ângulos (a saber, escaleno, isósceles ou equilátero, ou acutângulo, retângulo ou obtusângulo), a construção de medianas, mediatrizes, bissetrizes ou alturas, ou mesmo a conjectura do valor da soma dos ângulos internos ou externos, são um enriquecimento do objeto[5] triângulo pelas ações de quem o manipula, caracterizando-se assim por abstrações reflexionantes. Quando vemos um aluno manuseando um objeto de plástico e nomeamos aquilo de "triângulo", nós o fazemos impropriamente porque se trata de um objeto físico; e, na geometria, triângulo é um objeto formal, com medidas perfeitas, impossíveis de encontrar num objeto físico. Se chamamos aquilo de triângulo é porque nós colocamos nesse objeto o significado triângulo. Triângulo é um objeto puramente formal que só existe na mente do matemático, ou de quem pensa matematicamente. Nós retiramos triângulo do referido objeto por abstração pseudo-empírica. A exploração mais teórica sobre o triângulo, considerando elementos que podem não ser observáveis nem mensuráveis, como valor do raio da circunferência inscrita ou circunscrita, construção de fórmulas para o cálculo de sua área dependendo das características do triângulo e das informações dadas no problema, relações métricas no caso de triângulos particulares (retângulos ou equiláteros), certamente depende do processo de abstração reflexionante. Outros exemplos envolvendo o estudo de triângulos, como relações trigonométricas em triângulos retângulos ou triângulos quaisquer, e as demonstrações que o envolvem, a prova matemática de que a soma dos ângulos internos do triângulo plano é sempre 180° ou a demonstração de que a razão entre a medida de um lado qualquer e o valor do seno do ângulo oposto a esse lado é sempre o valor do diâmetro da circunferência circunscrita a este triângulo, são casos claros de conhecimentos que só podem ser atingidos através do processo de abstração reflexionante; todos esses pontos de chegada, que caracterizam construções de conceitos, o matemático os atinge por abstrações refletidas (abstrações reflexionantes com tomadas de consciência).

[5] Lembre-se que "objeto", para a epistemologia, inclui tudo aquilo que o sujeito pode tematizar; não se reduz, portanto, a objetos físicos. "Triângulo" não é um objeto físico, é pura forma, é um objeto formal.

4 RELAÇÃO BICONDICIONAL ENTRE ABSTRAÇÃO REFLEXIONANTE E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

De posse de alguns conceitos fundamentais da teoria de Piaget sobre a aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo das crianças, tais como abstração empírica, abstração reflexionante propriamente dita, desdobrada em abstração pseudo-empírica, e abstração refletida – abstração reflexionante com tomada de consciência –, após o processo de espiral ascendente de reflexionamentos e reflexões, pode-se buscar a aproximação teórica que existe entre estes conceitos e a resolução de problemas envolvendo demonstrações matemáticas em sala de aula. Mais precisamente, pretende-se estabelecer uma relação bicondicional entre abstração reflexionante e as demonstrações matemáticas e como esta relação pode levar à produção de conhecimento matemático.

Iniciaremos mostrando como o uso da metodologia Resolução de Problemas alinha-se à visão de Piaget sobre o ensino de matemática e a construção do conhecimento matemático. Piaget (2015, p. 92) afirma que “todo aluno normal é capaz de um bom raciocínio matemático desde que se apele para a sua atividade e se consiga assim remover as inibições afetivas que lhe conferem com bastante frequência um sentimento de inferioridade nas aulas que versam sobre essa matéria”. “A resolução de um problema, de acordo com os quatro passos definidos por Polya, apela indiscutivelmente para a atividade do aluno, como por exemplo, na etapa um, em que o aluno deve identificar os elementos do problema, compreender o que o problema pede e extrair dele o máximo de informações possíveis. Quanto à remoção das inibições afetivas, Polya (2006) afirma que o aluno precisa, além de compreender o problema, desejar resolvê-lo; mais, o problema a ser proposto deve ser bem escolhido, nem muito difícil a ponto de ser considerado uma barreira intransponível, e nem muito fácil a ponto de não ser atrativo por não apresentar novidade para o aluno. O problema deve ser natural e interessante, possibilitando assim o envolvimento do aluno sem causar-lhe alguma barreira afetiva. Piaget considera que um dos problemas, no desenvolvimento das aulas de matemática, é o fato de o aluno receber de fora uma disciplina inteiramente organizada que ele às vezes compreende, outras não, “ao passo que, em um contexto de atividade autônoma, é ele solicitado a descobrir por si mesmo as correlações e as noções, e assim recriá-las até o momento em que experimentará satisfação ao ser guiado e informado” (Piaget, 2015, p. 92).

Durante a resolução de um problema de matemática, e focamos aqui problemas de demonstração, muitas vezes não se tem conhecimento imediato de qual abordagem usar, quais propriedades ou conceitos ou qual linguagem – natural, simbólica, gráfica ou geométrica – resolverão o problema. Estas características da metodologia de Resolução de Problemas vão ao encontro da crítica de Piaget aos métodos tradicionais, pelos quais "ensina-se a Matemática como se tratasse exclusivamente de verdades acessíveis por meio de uma linguagem abstrata e mesmo daquela linguagem especial que é a dos símbolos operatórios" (Piaget, 2015, p. 95), mostrando que esta metodologia ativa pode contribuir para que o aluno desenvolva um entendimento mais profundo do que é a matemática. Afirma Piaget:

> A Matemática, porém, consiste em primeiro lugar, e acima de tudo, em ações exercidas sobre as coisas, e as próprias operações são também sempre ações, mas bem-coordenadas entre si e simplesmente imaginadas, em vez de serem executadas materialmente. Sem dúvida é indispensável que se chegue à abstração, e isso é mesmo absolutamente natural em todos os terrenos no decorrer do desenvolvimento mental da adolescência: mas a abstração se reduzirá a uma espécie de embuste e de desvio do espírito se não constituir o coroamento de uma série ininterrupta de ações concretas anteriores (Piaget, 2015, p. 95-6)

Alinhado à postura de Piaget, que considera a abstração reflexionante importante, mas que ela deve ser precedida de ações concretas anteriores sobre os objetos, Balacheff (2010, p. 131) argumenta que um aluno "que faz a transição do prático para o teórico tem que enfrentar a dificuldade epistemológica de uma transição do conhecimento em ação para o conhecimento no discurso: a origem do conhecimento está na ação, mas a obtenção da prova matemática está na linguagem", o que evidencia que a apropriação da linguagem matemática é fundamental para o desenvolvimento de demonstrações. E estas provas matemáticas podem levar o sujeito a realizar reflexões sobre os conceitos que foram transferidos por reflexionamento do patamar dos conhecimentos oriundos das ações para o patamar dos conhecimentos provenientes das coordenações das ações, por abstrações reflexionantes.

Focando na questão da abstração matemática, que vai sendo desenvolvida e aprimorada aos poucos no ambiente escolar, Balacheff (2022, p. 795) salienta que "a expressão de uma experiência mental enfrenta o desafio da representação dos objetos, de suas propriedades e relações, a da expressão das razões", ou seja, nem sempre o aluno consegue expressar, em notação matemática, aquilo que ele conseguiu desenvolver mentalmente, através da interiorização de suas ações. Nos casos em que o problema depende da generalização de algum conceito ou propriedade matemática, o autor enfatiza que “a generalização está associada a uma representação operatória, ela engaja a evolução de uma argumentação retórica para uma argumentação heurística” (Balacheff, 2022, p. 795). Essa é a verdadeira evolução da argumentação baseada em experimentações para a argumentação apoiada nas características e propriedades matemáticas do objeto de estudo, o que acaba se concretizando em uma demonstração. Sobre a questão da linguagem, abstrata e simbólica, levantada por Piaget, Balacheff traz uma análise referente à interação entre o desenvolvimento da linguagem matemática e a conceituação expressa ou produzida por tal linguagem:

> A matemática não é a única neste ponto, mas tem uma característica que a distingue das disciplinas científicas, devido ao caráter substancialmente abstrato de seus objetos. A história da matemática é pontuada pelas “invenções” de representações cujo caráter instrumental permite a expressão do raciocínio com um rigor que o aproxima do cálculo. A invenção e o desenvolvimento da escrita algébrica são, sem dúvida, o exemplo mais notável (Balacheff, 2022, p. 795-6)

Mantendo-se alinhado ao caráter único da matemática de tratar de objetos abstratos ou formais, que podem ser manipulados simplesmente pela imaginação e pelas ações coordenadas sobre tais objetos sem a necessidade de uma execução material, Piaget salienta que “estas ações são mesmo tão importantes que o menor fato físico só pode ser atingido e formulado graças a quadros lógico-matemáticos (funções, etc.) que o enriquecem, tornando-o assimilável pelo espírito” (Piaget, 1973a, p. 15). O autor complementa que “a Matemática nada mais é que uma lógica, que prolonga da forma mais natural a lógica habitual e constitui a lógica de todas as formas um pouco evoluídas do pensamento científico.” (Piaget, 2015, p. 90). Concordando com a definição de Matemática, dada por Piaget, mas considerando o importante papel que uma demonstração matemática exerce no aprendizado de matemática, Balacheff (2022, p. 808) afirma que “além do domínio das competências de raciocínio (lógica), a aprendizagem da prova em matemática envolve a tomada de consciência do que a diferencia da argumentação natural adquirida por meio das interações sociais diárias”, ou seja, as demonstrações englobam o prolongamento da lógica habitual, por uma lógica dedutiva e axiomática que independe da abstração empírica, à medida que se debruça sobre processos contínuos de abstração reflexionante, em especial a refletida, oriunda da interiorização das ações do sujeito, o que Piaget chama de tomada de consciência.

Logicamente não se pode desconsiderar o caráter experimental, que possibilita aos estudantes construírem muitos conceitos da matemática básica, e isto é defendido por Polya (2006, p. 106) quando afirma que “a Matemática, apresentada com rigor, é uma ciência dedutiva sistemática, mas a Matemática em desenvolvimento é uma ciência indutiva experimental”. Porém, deve-se levar em conta a visão que Balacheff (2022) traz, de que, além da tomada de consciência, a aprendizagem das demonstrações em matemática necessita de “uma ruptura epistemológica para entrar em um problema teórico cuja natureza é essencialmente diferente daquela de conhecimento comum” (Balacheff, 2022, p. 808). Esta visão é compartilhada por Polya, ao fazer um comparativo entre a matemática e as ciências da natureza, ao afirmar que “nas Ciências Físicas não há autoridade maior do que a observação e a indução, enquanto que na Matemática há uma tal autoridade: a demonstração rigorosa” (Polya, 2006, p. 107). Sem dúvida, esta diferença entre objetos físicos e objetos matemáticos apresentam, respectivamente, estreita relação com os conceitos de reflexionamentos de conteúdos (observáveis) e construção de novas formas (reflexões) explicados anteriormente. Piaget (1995) afirma que a abstração reflexionante vai acarretando progressivamente a construção de formas, em relação à construção de conteúdos (ou seja, domínio das reflexões em relação aos reflexionamentos), “formas estas que podem dar lugar, seja à elaboração de estruturas lógico matemáticas, seja a essas ‘atribuições’, aos objetos e a suas conexões, nas quais consiste a explicação causal em física” (Piaget, 1995, p. 277).

Parece-nos evidente que organizar situações de abordagem de demonstrações matemáticas na sala de aula pode contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, pois ao resolver problemas em que seja necessário testar, inferir, argumentar, deduzir e provar matematicamente uma propriedade ou teorema, o aluno poderá fazer a transposição do concreto para o formal através dos processos de abstração reflexionante, em especial as refletidas, que estas atividades podem proporcionar. É evidente que “tais situações devem atender às condições para que a argumentação, o cerne da resolução de problemas, seja tomada como um objeto para compreender e aprender o que é uma prova em matemática” (Balacheff, 2022, p. 808). Corroborando esta visão, Piaget (1995) afirma que, à medida que a abstração reflexionante vai progredindo e o pensamento vai se distanciando desses apoios concretos, ou mesmo dominando-os de um ponto mais alto, “a abstração refletida desempenha um papel cada vez mais importante até tornar-se, ao nível das operações ‘formais’, coextensiva, em certos casos, do próprio processo dos reflexionamentos e das reflexões” (Piaget, 1995, p. 277). O que se pretende então é aprimorar os conhecimentos matemáticos através de atividades que realmente façam os alunos pensar. Balacheff (2010) ainda complementa que é necessário incentivar a transição do conhecimento pragmático para o conhecimento teórico e que isso “requer situações de design para que a postura pragmática não seja mais segura ou econômica para os aprendizes, enquanto a postura teórica demonstra todas as suas vantagens” (Balacheff, 2010, p. 133).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao concluirmos este trabalho, relembramos que a proposta dele é estabelecer um alinhamento teórico entre Piaget e Balacheff, utilizando Polya e a metodologia de Resolução de Problemas como elo entre o desenvolvimento de problemas de demonstração em sala de aula e as abstrações e reflexões que estas atividades possibilitam aos alunos, ao se envolverem e se desenvolverem cognitivamente de forma satisfatória. Polya (2006, p. 64) afirma que “encontrar uma demonstração não muito óbvia constitui um grande sucesso intelectual, mas para aprender essa demonstração, ou mesmo para compreendê-la perfeitamente, é necessário um certo esforço mental”. Balacheff (2010, p. 132) alerta que “os pesquisadores têm convergido em considerar a prova matemática como uma questão central no desafio de aprender e ensinar matemática; conhecimento matemático e demonstração não podem ser separados”, o que significa, em outras palavras, dizer que as demonstrações matemáticas influenciam fortemente a construção de conhecimentos matemáticos. Piaget (2015, p. 97) complementa que “não existe campo onde o ‘pleno desenvolvimento da personalidade’ e a aquisição dos instrumentos lógicos ou racionais, que asseguram sua autonomia intelectual, sejam mais realizáveis”, do que o campo da Matemática. Ele defende que se deve apelar para a atividade real e espontânea, da criança ou do adolescente, e que é somente através desse tipo de atividade, orientada e estimulada pelos professores, mas deixando as crianças livres para experimentar, tentar e até mesmo cometer erros, que se conduzirá os estudantes para a autonomia intelectual. O autor ainda afirma que “não é o conhecimento do teorema de Pitágoras que irá assegurar o livre exercício da inteligência pessoal: é o fato de haver redescoberto a sua existência e a sua demonstração” (Piaget, 2015, p. 97).

Considerando que as atividades em sala de aula devem se beneficiar das metodologias ativas que, segundo Piaget, “são os únicos capazes de desenvolver a personalidade intelectual" (Piaget, 2015, p. 99), afirmamos que, nas aulas de matemática, a metodologia de Resolução de Problemas possibilita a participação ativa e efetiva dos estudantes, o debate entre grupos, a elaboração das argumentações matemáticas que, segundo Balacheff (2022, p. 811), "não devem apenas distingui-la de outros tipos de argumentação, mas garantir a possibilidade de transição para a norma da demonstração". Ao identificar o problema a ser demonstrado, elaborar um plano ou estratégia para resolvê-lo, tentar executar tal plano e, tendo sucesso ou não, fazer uma retrospectiva de todo o processo e mecanismos desenvolvidos, o aluno estará desenvolvendo aquilo que Piaget (2015) chama de atividade da inteligência que, segundo ele, "requer não somente contínuos estímulos recíprocos, mas ainda, e sobretudo, o controle mútuo e o exercício do espírito crítico, os únicos que conduzem o indivíduo à objetivação e à necessidade de demonstração" (Piaget, 2015, p. 99). Além disso, após algumas atividades de demonstração, realizadas com sucesso pelo estudante, ele tomará consciência de que "as provas são tanto a base quanto a organizadora dos conhecimentos. No decorrer do aprendizado, elas ajudam a consolidar sua evolução e a equipar sua organização" (Balacheff, 2022, p. 812).

Finalizando, podemos afirmar que construímos uma base teórica consistente capaz de garantir a exploração de problemas de demonstrações nas aulas de matemática que levem os estudantes, através de processos de abstração reflexionante, em especial de abstração refletida, o que implica transitar volta e meia por abstrações pseudo-empíricas, a desenvolverem conhecimentos matemáticos formais ou gerais. Assim, abrirão um mundo novo de possibilidades e de atividades de exploração e aplicação dos conceitos construídos.

Acreditamos ter atingido os objetivos da pesquisa ao apresentar evidências de que existe um alinhamento teórico entre Polya, Piaget e Balacheff. Isso abre um caminho para o processo de abstração refletida – abstração reflexionante com tomada de consciência – possibilitando aprendizagens significativas nas aulas de matemática. Esse caminho pode ser construído pela abordagem de problemas de demonstração matemática, utilizando a metodologia de Resolução de Problemas. Ela desafiará o estudante a argumentar, conjecturar, escrever em linguagem natural até conseguir elevar a escrita a uma linguagem simbólica e formal. É assim que o estudante trilhará o caminho da descoberta e da construção do conhecimento matemático. Entender o que se pretende demonstrar, elaborar estratégias, executar um plano a fim de realizar demonstrações matemáticas e, por fim, rever a escrita, questionar a existência de outros caminhos, aprimorar a demonstração, ou mesmo refazê-la, usando outras ferramentas e conceitos, configura um caminho dinâmico de verdadeiro pensamento matemático. Consegue-se isso ativando o processo de abstração reflexionante de cada estudante possibilitando que ele chegue a abstrações refletidas, momento em que constrói conceitos matemáticos. Chegará assim ao entendimento da natureza dos conceitos e propriedades que compõem esta ciência conhecida como Matemática.

REFERÊNCIAS

Balacheff, N. (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective. In: Hanna, G. et al. *Explanation and Proof in Mathematics.* Springer, p. 115-135.

Balacheff, N. (2022). A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração. *Revista Educação Matemática e Pesquisa*. v. 24, n. 1, p. 770-815.

Becker, F. (2012). Educação e construção do conhecimento. 2 ed. Porto Alegre: Penso.

Becker, F. (2014). Abstração pseudo-empírica e reflexionante: Significado epistemológico e educacional. *Schème – Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas*, v. 6, número especial, Marília: Unesp.

Becker, F. (2019). Construção do Conhecimento Matemático: natureza, transmissão e gênese. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 33, n. 65, p. 963-987.

Bueno, M., Koehler, S., Sellmann, M., Silva, M. & Pinto, A. (2012). Inovação didática – projeto de reflexão e aplicação de metodologias ativas de Aprendizagem no ensino superior: uma experiência com "*peer instruction*". *Janus*, v. 9, número 15, p. 75-87.

Dante, L. R. (1998). *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*.10 ed. São Paulo: Editora Ática.

Moran, J. M. (2015) Mudando a educação com metodologias ativas. In Souza, C. A. & Morales, O. E. T. (orgs.). *Coleção mídias contemporâneas*. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens. Vol. II. PG: Foca Foto-PROEX/UEPG.

Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), 25, 73-98.

Piaget, J. [1948] (2015). *Para onde vai a educação?* Trad. Ivete Braga, 22 ed. Rio de Janeiro: José Olympio.

Piaget, J. (1973a). *Biologia e conhecimento: ensaio sobre as relações entre as regulações orgânicas e os processos cognoscitivos*. Trad. Francisco M. Guimarães, Petrópolis: Vozes.

Piaget, J.(1973b) *Os estágios do desenvolvimento intelectual da criança e do adolescente*. In: ___. Problemas de Psicologia Genética. Rio de Janeiro: Ed. Forense. p. 49-60

Piaget, J. [1977] (1995). *Abstração reflexionante; relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Polya, G. (2006). *A arte de resolver problemas.* (H. L. Araújo, Trad. & Adap.). Rio de Janeiro: Interciência.

Villani, C., & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* (La documentation française, p. 96). [Rapport public]. *Ministère de l'éducation nationale.* Recuperado de https://medias.vie-publique.fr/data_storage_s3/rapport/pdf/184000086.pdf

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA
Abordagem das demonstrações matemáticas em sala de aula: da Resolução de Problemas à Abstração Reflexionante

Josias Neubert Savóis
Mestre em Matemática – Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) (2014) – FURG – Rio Grande - RS
Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS campus Osório, Osório, Brasil
josias.savois@osorio.ifrs.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-4332-8263

Fernando Becker
Doutor em Psicologia Escolar e do Desenvolvimento Humano – USP – São Paulo
Professor Titular da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PPGIE), Porto Alegre, Brasil
fbeckerufrgs@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4215-9805

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Joaquim Nunes, 414, Centro, 95575000, Três Forquilhas, RS, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Inserir os agradecimentos a pessoas que contribuíram com a realização do manuscrito.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: J. N. Savóis, F. Becker
Coleta de dados: J. N. Savóis, F. Becker
Análise de dados: J. N. Savóis, F. Becker
Discussão dos resultados: J. N. Savóis, F. Becker
Revisão e aprovação: J. N. Savóis, F. Becker

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 19-10-2023 – Aprovado em: 03-05-2024