Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ESCRITOS SIMBÓLICOS E OPERAÇÕES HETEROGÊNEAS DE SUBSTITUIÇÃO DE EXPRESSÕES: *AS CONDIÇÕES DE COMPREENSÃO EM ÁLGEBRA ELEMENTAR*[1]

Les Ecritures Symboliques Et Les Opérations Hétérogènes De Substitution D'expressions : Les Conditions De Compréhension En Algèbre Elémentaire

Raymond DUVAL
Trad. Méricles Thadeu Moretti

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Este artigo é uma tradução de um capítulo escrito em francês por Raymond Duval, que buscou analisar diferentes tipos de operações de substituição possíveis a serem feitos com os escritos simbólicos para pensarmos a compreensão em álgebra. São análises que dizem respeito à tomada de consciência de operações semiocognitivas que permitirão entender como trabalhar com escritos algébricos e reconhecer quando aplicá-los. Duval apresenta quatro questões relacionadas às condições semiocognitivas condicionantes para a compreensão e aquisição de conhecimento em álgebra bem como para o seu uso espontâneo em situações de resolução de problemas fora do âmbito matemático: designar objetos em linguagem natural, utilizando letras ou símbolos; visualizar a estrutura matemática da formulação de um problema, em um texto que articula diversas frases; formular problemas cujas resoluções requerem a designação funcional de uma segunda quantidade desconhecida para escrever duas expressões incompletas, a partir do enunciado do problema e formar os dois membros de uma equação. A conclusão da análise linguística dos escritos algébricos simbólicos apresentada por Duval no capítulo aponta para a necessidade da distinção semântica de Frege entre o sentido de uma expressão e o que ela denota. Com o capítulo Duval aponta que uma análise semiocognitiva dos escritos simbólicos significa analisar as necessidades e as dificuldades de aprendizagem da álgebra antes de organizar o seu ensino cujo objetivo é, por um lado, sensibilizar tanto para as operações discursivas específicas da linguagem natural, como para os escritos simbólicos, e por outro, quebrar a parede de vidro que os separa.

Palavras-chave: Registros de Representação Semiótica, Escritos Simbólicos, Aprendizagem Matemática, Álgebra

ABSTRACT

This article is a translation of a chapter written in French by Raymond Duval, who sought to analyze different types of substitution operations that can be carried out with symbolic scripts in order to think about comprehension in algebra. These analyses concern the awareness of semiocognitive operations that will allow us to understand how to work with algebraic scripts and recognize when to apply them. Duval presents four questions related to the semiocognitive conditions that condition the understanding and acquisition of knowledge in algebra, as well as its spontaneous use in problem-solving situations outside the mathematical sphere: designating objects in natural language, using letters or symbols; visualizing the mathematical structure of the formulation of a problem, in a text that articulates several sentences; formulating problems whose solutions require the functional designation of a second unknown quantity to write two incomplete expressions, starting from the problem statement and forming the two members of an equation. The conclusion of the linguistic analysis of symbolic algebraic writings presented by Duval in the chapter points to the need for Frege's semantic distinction between

[1]Texto publicado em português e em francês em: Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. (Orgs. Méricles T. Moretti, Celia F. Brandt). Florianópolis: Revemat/UFSC, 2020.Disponível em : https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982

the meaning of an expression and what it denotes. With the chapter Duval points out that a semiocognitive analysis of symbolic writings means analyzing the needs and difficulties of learning algebra before organizing its teaching whose aim is, on the one hand, to raise awareness of both the specific discursive operations of natural language and symbolic writings, and on the other, to break the glass wall that separates them.

Keywords: Semiotic Representation Registers, Symbolic Writings, Mathematical Learning, Algebra

INTRODUÇÃO

Na aprendizagem de álgebra durante o Ensino Fundamental 2 (EF-2)[2], os alunos enfrentam constantemente uma espécie de parede de vidro: os escritos simbólicos, ou seja, a variedade de expressões que combinam números, letras e símbolos de operações, cujo registro semiótico permite-lhes escrever; bem como a heterogeneidade das operações de substituição umas pelas outras dessas expressões. As palavras da língua e da matemática parecem transparentes, como as que designam operações, relações, propriedades das equações e explicam como utilizá-las nos cálculos. Mas, na verdade, para três quartos dos estudantes, e todos aqueles que não estudaram ciências, tal parede é opaca, uma vez que eles não conseguem ver através dela o que os professores veem e que não há meio algum de passar do registro da língua natural, no qual, as operações exigidas para transitar de uma expressão verbal a outra são efetuadas por associações de palavras "que fazem pensar em...". No entanto, as operações de substituição de expressões simbólicas requerem a análise exclusiva da forma das combinações de números, letras e símbolos das operações. Como não confundir as expressões obtidas por meio das múltiplas operações de substituição possíveis, tendo em conta a uniformidade das expressões escritas? Como equacionar um problema concreto ou não-matemático, e resolvê-lo usando uma equação como "ferramenta"? De outra forma, quais são os primeiros passos a serem seguidos, a fim de que os alunos aprendam álgebra? Há dois pontos de vista radicalmente diferentes para responder essa pergunta.

Em primeiro lugar, há o ponto de vista matemático que é, obviamente, primordial e serve para estruturar as análises, que levam à organização dos programas. Essas análises advêm de um objetivo, institucionalmente fixado, a ser atingido no final do EF-2: o uso de equações na resolução de problemas extra atemáticos. Então, a *análise matemático-*

[2] Nota do Tradutor. Usaremos os termos entre colchetes, a seguir, para designar os níveis de ensino equivalentes, no Brasil, aos níveis de ensino Francês: o ensino básico francês obrigatório é composto de 12 anos: 5 anos em nível de ensino *primaire (école élémentaire)* (6 a 10 anos de idade) [Ensino Fundamental 1 – EF1]; 4 anos do *collège* (11 e 14 anos de idade) [Ensino Fundamental 2 – EF2] e; 3 anos do *lycée* (15 a 17 anos de idade) [Ensino Médio – EM].

regressiva é realizada. O processo de aprendizado de uma equação, como sendo uma "ferramenta", é desconstruído por pré-requisitos de conhecimento e *savoir-faire,* os quais também o são por outros pré-requisitos mais elementares. Esse processo avança até chegar à introdução de uma ou duas letras no cálculo com números. Os currículos para cada ano escolar são então determinados para fazer os alunos seguirem o caminho inverso dessa *análise matemático-regressiva*, em quatro ou cinco anos. Com o intuito de ajudar os professores a implementá-los em sala de aula, os currículos são enriquecidos com explicações de aquisição de conhecimento e aprendizagem, epistemológicas, psicogênicas, psicológicas, sociológicas ou pedagógicas. Mas nenhuma das explicações as quais eles fornecem é realmente relevante, pois ignoram o fato de que aprender matemática ocasiona dificuldades intrínsecas de compreensão, que não são encontradas em nenhum outro campo do conhecimento.

O outro ponto de vista é a análise do funcionamento semiocognitivo subjacente à atividade matemática. Quais são os gestos intelectuais que permitem "fazer matemática"? Desse ponto de vista, a **discriminação imediata da variedade uniforme dos escritos simbólicos, bem como a consciência de múltiplas operações de substituição possíveis são os dois primeiros passos a serem trabalhados com os alunos no ensino da álgebra.** Os objetivos da aprendizagem não são a aquisição de conhecimentos e habilidades, mas *uma tomada de consciência de operações semiocognitivas*, que permite entender como trabalhar com escritos algébricos e *reconhecer quando e em qual situação aplicar os conhecimentos adquiridos*. No entanto, só se pode tomar consciência fazendo, no seu próprio ritmo, tarefas que são desenvolvidas para cada uma das *diferentes operações semiocognitivas específicas dos escritos simbólicos,* e que podem ser geridas individualmente. Essa tomada de consciência é um pré-requisito para a aquisição de conhecimento em álgebra elementar. Os critérios de sucesso que possibilitam avaliar o desempenho escolar dos alunos são diferentes daqueles, geralmente, adotados na sala de aula em sequências de atividades e em questões nacionais ou internacionais. Tais critérios de desempenho são, tanto, a rapidez de resposta, quanto, uma completa mudança de atitude em relação às tarefas matemáticas e à resolução de problemas, uma vez que, nessas tarefas específicas, acertar não basta, deve-se considerar o tempo de resposta, pois um aluno deve ser capaz de realizar as tarefas em *menos de trinta segundos*, independentemente, das variações da apresentação dos dados, das restrições da instrução e *do significado da conversão a ser feita entre a linguagem natural e a escrita simbólica da expressão, seja ela completa ou incompleta*. Em outras palavras, o aluno deve reconhecer rapidamente os diferentes níveis de unidades de significado em uma equação e as operações de substituição a serem realizadas, *sem ter que perguntar (professor ou aluno), ou ter alguém que lhe diga o que fazer*; sem isso não há outra aprendizagem possível em álgebra para o aluno.

*

***

São quatro questões que estão na base das pesquisas, sobre as condições semiocognitivas condicionantes, para a compreensão e aquisição de conhecimento em álgebra, bem como para *o seu uso espontâneo em situações de resolução de problemas fora do âmbito matemático*.

A primeira pode parecer simples e até trivial: como designar objetos em linguagem natural, utilizando letras ou símbolos? O terceiro capítulo de *Semiose e Pensamento Humano*, de Duval (1995), com ênfase em uma citação em *Begriffsschrift,* de Frege, foi inteiramente dedicado a linguagem natural e linguagem formal.

A segunda tornou-se evidente por meio da pesquisa *Estruturas aditivas e complexidade psicogenética*, de G. Vergnaud (1976), sobre os problemas aditivos, e com a tese *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte*, de Damm (1992). Como visualizar a estrutura matemática da formulação de um problema, em um texto que articula diversas frases, para descrever um cenário da vida real? (Duval, 2005).

A terceira surgiu com as formulações de problemas, cujas resoluções já não requerem a designação de uma quantidade desconhecida, mas a designação funcional de uma segunda quantidade desconhecida. Sem a consciência de que esse modo de designação não existe na língua, os alunos não conseguem equacionar os problemas que tenham duas unidades desconhecidas e não apenas uma (Duval, 2002, 2011). Como escrever duas expressões incompletas, a partir do enunciado do problema, que formarão os dois membros de uma equação?

A quarta questão, na verdade, pertence as três anteriores e diz respeito a todos os problemas que são dados no EF-2 para preparar a introdução de um novo conceito, novas operações, ou em exercícios com fins exploratórios e de pesquisa. O que vem a ser um problema matemático, desenvolvido para fins didáticos, e o que significa resolver matematicamente um problema? Em outras palavras, essa é a assustadora questão do papel dos problemas na aquisição de conhecimentos matemáticos, mas não parece sê-lo para os professores e para a grande maioria dos didatas. Foi só mais tarde que a enfrentei de frente: é preciso aprender a formular esses problemas para tornar-se capaz de resolvê-los (Duval, 2013).

Infelizmente, em um diálogo póstumo que tentei travar com Jean-Philippe Drouhard, toda essa pesquisa teve um resultado imprevisível. Encontramo-nos, com relativa regularidade, mas sem que eu tenha tentado compreender o que ele pensava. Tive que ler a sua tese, defendida em 1992[3], por conta de um encontro em torno do seu trabalho, no qual, realmente, haveria de empreender uma discussão sobre as nossas diferentes abordagens na análise dos escritos simbólicos.

Os trechos do confronto entre duas análises de escritos simbólicos[4], aqui apresentados, foram feitos primeiro para Jean-Claude Rauscher, que estava envolvido num trabalho de acompanhamento com Jonathan[5], e retomados depois para o benefício dos professores, que só lecionam no EF-2. O objetivo era reter apenas os pontos essenciais, que pudessem ser úteis em sala de aula no ensino e aprendizagem de álgebra, independentemente, de alguma teoria psicológica, semiótica, linguística, pedagógica ou didática; enfim, que os professores fossem capazes de observar e analisar por si mesmos as causas profundas das dificuldades e dos bloqueios recorrentes dos seus alunos.

Desde as primeiras linhas da introdução da sua tese, Jean-Philippe Drouhard apresentava a ideia orientadora da sua pesquisa, que tratava de duas mudanças de perspectiva a serem consideradas em relação ao que era, consensualmente, admitido nos trabalhos didáticos sobre álgebra elementar.

Logo no início desse trabalho há a hipótese muito geral de que na álgebra, *além das dificuldades conceituais*, o aprendente também se depara com dificuldades linguísticas ligadas *à complexidade da linguagem simbólica da matemática*. Em outras palavras, a "transparência" da linguagem simbólica é apresentada como ilusória e, um dos objetivos desse trabalho, fora, precisamente, remover essa *"ilusão de transparência"* (Drouhard, 1992, p. 3).

Em primeiro lugar, ao falar de "ilusão de transparência", Drouhard questionava uma ideia, que se tornou óbvia com o desenvolvimento da álgebra, *a ideia do carácter*

---

[3]Drouhard J.-P, 1992. *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire.* Thèse de Doctorat. Paris VII.
[4]2019, *Jean-Philippe Drouhard. de la linguistique à l'épistémographie. Didactique des mathématiques* (Ed. M Maurel) pp. 105-139. Academia.edu *Ces extraits sont publiés avec l'aimable autorisation de l'éditrice de cet ouvrage*, Maryse Maurel.
[5]Rauscher J.-C, 2023. O caso Jonathan. O complexo de álgebra. Trad. Méricles T. Moretti. Revemat.

inteiramente explícito e controlável dos escritos simbólicos[6]. A escrita simbólica é, de fato, o único tipo de representação utilizada na matemática na qual, por um lado, todos os elementos significantes necessários para se compreender uma expressão completa, são explicitamente dados, com pequenas exceções, por exemplo em: "*a*", em vez de "*1a*"[7], e na qual, por outro lado, cada elemento significante é unívoco. De outro modo, as igualdades ou equações são autossuficientes, pois não dependem de nenhum contexto ou situação, como em quase todas as afirmações em língua natural. Além disso, as transformações de uma para outras expressões simbólicas são totalmente explícitas e perfeitamente controláveis. Razão pela qual, ao contrário de todas as proposições em linguagem natural, elas são algoritmizáveis. Portanto, os escritos simbólicos devem ser mais fáceis de se entender do que os enunciados em linguagem natural, as figuras geométricas ou, mesmo, do que os gráficos que devem ser entendidos qualitativamente e não, pontualmente. Mas, esse não é o caso. Se os escritos simbólicos são matematicamente transparentes, trata-se de uma "ilusão de transparência", pois eles sobrepõem, em uma mesma sucessão, diferentes tipos de agrupamentos de números, letras e símbolos, e tais agrupamentos constituem unidades de significado em diferentes níveis, quase impossíveis de serem discriminados e reconhecidos pela maioria dos jovens alunos. Em trabalhos posteriores, Jean-Philippe Drouhard preferiu falar de "implícito" em vez de "ilusão de transparência", o que não foi uma escolha casual, pois enquanto a noção de implícito conota algo que não é dito por ser conhecido ou demasiado óbvio, a expressão "ilusão de transparência" caracteriza a própria natureza dos escritos simbólicos da álgebra elementar.

1 DISTINÇÕES PRELIMINARES PARA DESCREVER E DEFINIR A ESPECIFICIDADE DOS ESCRITOS SIMBÓLICOS

Os escritos simbólicos são um tipo de representação gráfica que, verdadeiramente, nada tem em comum com a linguagem ou com as figuras. Para compreender isso, paremos um momento para refletir sobre o que há de específico na escrita, em comparação a dois outros tipos de representação mais comuns: as expressões linguísticas e as figuras, instrumentalmente, construídas em função de propriedades geométricas.

---

[6] Condillac expressou-se, no final do século XVIII, desta forma: a álgebra, que é a linguagem da matemática, é uma simplificação da linguagem e uma economia de signos, que possibilitam o aumento da capacidade de cálculo.
[7] Escreve-se "a" no lugar de "1 × a" e "2a" em vez de "2 × a".

1.1 OS ESCRITOS SIMBÓLICOS VERSUS ESCRITOS ALFABÉTICOS: UMA RUPTURA COMPLETA COM A FALA

Os escritos simbólicos são um tipo de representação gráfica, que consiste em *uma sequência linear de elementos, que se distinguem visualmente e, cuja ordem de sucessão, obedece a certas restrições*. Esses elementos são letras de um alfabeto ou números de um sistema de numeração. Portanto, é importante separar dois tipos de escritos: os escritos alfabéticos e OS ESCRITOS SIMBÓLICOS. Os primeiros são uma codificação da fala, ou seja, de uma enunciação oral. Os últimos foram desenvolvidos para fins exclusivos do cálculo e são ESCRITOS OPERATÓRIOS, que não podem ser enunciados em língua natural nem falados oralmente.

Em relação aos escritos simbólicos, é importante não confundir dois níveis de unidades de sentido:

- O primeiro nível de sentido é o dos elementos significantes, que dependem inteiramente do sistema semiótico utilizado, como definido por Saussure (1972): fonemas, morfemas e palavras de uma linguagem natural, dígitos que designam números em um sistema de numeração. Assim, os dígitos “0” e “1”, por exemplo, não têm o mesmo valor de escolha opositivo em relação a um sistema de escrita binária ou a um sistema de escrita decimal;
- O segundo nível de sentido é o das expressões incompletas ou completas, que podem ser produzidas usando um sistema semiótico: sintagmas nominais e verbais para frases e, o que chamaremos de sintagmas operatórios para os escritos simbólicos.

	ESCRITOS SIMBÓLICOS
1. SISTEMA DE ESCRITA DECIMAL	4 (*elemento que designa* um número) 44 (*sequência de dois elementos que designam* um outro número)
2. EXPRESSÃO INCOMPLETA: Os sintagmas operatórios articulam ao menos um dígito (ou uma letra) e um SÍMBOLO DE OPERAÇÃO	**(2 + 2), (5 – 1), (2 × 2) ,** **(8 : 2), 8/2** **40 + 4, 12 × 2** *Sintagmas operatórios*

Portanto, de um ponto de vista estritamente linguístico e semiótico, é importante não confundir os escritos simbólicos utilizados em matemática com os escritos alfabéticos, que permitem transcrever alguma expressão oral de uma língua natural. Opõem-se, entre eles, os quatro critérios seguintes:

	ESCRITOS SIMBÓLICOS	ESCRITOS ALFABÉTICOS
1. Comutação oral/escrita, sem ambiguidade e reflexiva	NÃO	SIM
2. Restrições que determinam a ordem de sucessão de elementos com um *valor oposto de escolha*	Sintaxes	Reprodução de elementos articulados na produção vocal
3.Função de designação de objetos para os elementos	SIM *Designação de números*	NÃO
4. Concatenação de elementos em unidades de significado de um nível mais complexo de expressão	Formação de sintagmas operatórios (expressões incompletas)	Reprodução de unidades de sentido na fala oral

Figura 2. A distinção entre escritos simbólicos e alfabéticos.

Em outras palavras, se a álgebra é uma linguagem, é uma linguagem totalmente muda, que não pode ser falada. O seu objetivo é, simplesmente, realizar algoritmos de operações, isso se se preferir uma linguagem puramente operacional. Qualquer propriedade matemática que se pode mobilizar, implícita ou explicitamente, em paralelo ao uso de escritos algébricos, revela um emprego matemático da linguagem natural. Não ver isso é negar-se a ver a complexidade e as dificuldades de se ensinar álgebra elementar para os alunos com idade entre 11 e 16 anos.

1.2 A GAMA DE ESCRITOS SIMBÓLICOS E EXPRESSÕES COMPLETAS

Os escritos simbólicos referem-se a toda gama de escritos desenvolvidos para a realização de cálculos. Qualquer cálculo é uma sequência de operações, que consiste em substituir uma expressão simbólica por outra, quer essas expressões sejam numéricas ou literais. Dois tipos de substituições devem ser diferenciados, conforme sejam relativos aos sintagmas operatórios, isto é, substituições com expressões incompletas, ou à igualdades, equações ou expressões, que constituem um terceiro nível de sentido, aqui chamado de expressões completas.

A substituição de uma EXPRESSÃO INCOMPLETA por outra consiste em reduzi-la:

- a um elemento do sistema de escrita decimal: **$(2 + 2) \rightarrow 4$**, ou **$12 \times 12 \rightarrow 144$**;

- a um sintagma operacional menos complexo: **$3\ (a + 2/3b\ ) \rightarrow 3a + 2b$**;

- ou a um sintagma operacional de grau inferior: $\mathbf{x^2 \rightarrow (x \times x)}$.

Obviamente, essas substituições são reversíveis, determinadas pelas propriedades dos símbolos de operação ou pela natureza dos números. Por isso, vamos chamá-los de SUBSTITUIÇÕES OPERATÓRIAS.

A substituição de uma EXPRESSÃO COMPLETA por outra é uma operação diferente. Por um lado, pretende-se que um termo possa ser alterado de um membro da equação a outro, e que se possa efetuar uma substituição operatória em um dos dois membros:

$$\mathbf{a + 2 = 4 \quad \rightarrow \quad a = 2} \qquad\qquad \mathbf{2a = 8/2 \quad \rightarrow \quad a = 4}$$

Por outro lado, requer-se que nessa substituição as duas expressões completas conservem o mesmo valor de sentido. A substituição deve ser feita *salva veritate*, de acordo com a expressão utilizada por Leibniz, *enquanto as expressões incompletas, relacionadas em cada uma das duas expressões incompletas, não são as mesmas*! Foi para descrever esse mecanismo de substituição semiótica, que Frege (1971/1892) introduziu a sua famosa distinção entre significado (*Sinn*) e denotação (*Bedeutung*).

A "denotação" é a unidade de sentido próprio de uma expressão completa, e "sentido" é a unidade de sentido de uma expressão incompleta. Ao estender-se essa distinção para expressões incompletas, a denotação torna-se "o objeto designado" por um sintagma operatório ou nominal, e o sentido torna-se a "significação" própria de cada expressão incompleta usada para denotar ou designar um objeto. Em outras palavras, com expressões incompletas, a denotação resulta de uma operação de designação. Essas são SUBSTITUIÇÕES SEMÂNTICAS.

Comparemos, agora, quatro expressões completas do ponto de vista das substituições a serem efetuadas para calcular ou "resolver":

	$2 \times 2 = 4$	$2 \times 2 =$ $8 : 2$	$2 \times \ldots = 8 : 2$ ou $2 \; \ldots = 8 : 2$	$(a + b) /2 = a/2 + b/2$
1. Apenas um membro a ser considerado	SIM			
2. os dois membros independentemente um do outro		SIM		
3. Possibilidade de passar de um termo a outro, ***salva denotatione***			SIM $2 \times \ldots = 8 : 2$ $\ldots = (8 : 2) /2$	
4. Necessidade de mover um termo de um membro para outro na equação, ***salva veritate***				SIM $(a + b) /2 = a/2 + b/2$ $a + b = 2 (a/2) + 2(b/2)$

Figura 3. *Continuum* dos escritos simbólicos em nível das expressões completas.

As duas primeiras expressões (nas duas primeiras colunas) requerem não mais do que substituições operatórias. O sintagma operacional é reduzido à escrita de um número no sistema decimal. Não há substituição semântica a ser feita. Por outro lado, tudo muda quando se calcular, ou resolver, as duas expressões nas linhas da tabela mais abaixo, mesmo no caso de uma igualdade com um elemento vago a ser completado (terceira coluna), que não comporte alguma letra. Em outras palavras, a substituição semântica não deve ser confundida com a substituição operatória, mesmo que a resolução de uma equação recorra a ambas.

Com essas distinções e comparações, torna-se possível fazer três observações importantes para penetrar na problemática de pesquisa de Jean-Philippe:

(1) Elas destacam a complexidade da escrita simbólica.

Por um lado, *exigem que três níveis de unidades de sentido interligadas sejam imediatamente reconhecíveis*: os elementos significantes em um sistema semiótico, que muitas vezes são confundidos com "signos"; as expressões incompletas e as expressões completas. Sem o devido reconhecimento, as expressões simbólicas não podem ser lidas, apenas soletradas, elemento por elemento.

É *preciso estar consciente da operação específica de substituição semântica* para poder "resolver" uma equação, ou para poder aplicar uma fórmula numa situação particular, e resolver um problema concreto.

(2) *O primeiro passo em álgebra não começa com a introdução das letras, mas com a escrita de expressões incompletas* para formar uma expressão completa, cuja resolução exigirá a substituição semântica. As equações numéricas, com elementos vagos a serem completados, são um primeiro exemplo (Duval e al., 2015, pp. 67, 73).

Assim, qualquer expressão simbólica na qual o símbolo de relação "=" possa ser substituído pelo símbolo de designação de um resultado "$\rightarrow$", não é uma expressão simbólica algébrica completa. O uso do símbolo "=" para designar o resultado de uma operação aritmética, cria um equívoco que constituirá um obstáculo aos primeiros passos na entrada dos escritos simbólicos algébricos.

A introdução das letras começa com a formação de expressões incompletas, o que exige, como veremos mais adiante, a consciência de uma operação discursiva específica dos escritos simbólicos: a designação funcional.

(3) Estritamente falando, a álgebra não é uma língua e nem pode sê-lo. É um registro cognitivamente monofuncional discursivo e não multifuncional, como são as linguagens naturais.

Portanto, a leitura e compreensão de expressões simbólicas *requer o reconhecimento visual dos diferentes níveis de sentido de uma expressão, a fim de poder distinguir todas as unidades de sentido*. Caso contrário, ficamos com o simples reconhecimento de diferentes caracteres (dígitos, letras, símbolos de operação ou de relação), que só podem ser soletrados um após o outro. Na sequência, deparamo-nos com sérias dificuldades para transformar sintagmas operatórios em outros sintagmas e, *mais ainda, para fazer substituições semânticas*. Essas dificuldades podem bloquear de imediato a grande maioria dos estudantes, não só durante a resolução de equações, mas, mais simplesmente, quando na aplicação de uma fórmula!

II. CONCLUSÃO DA ANÁLISE LINGUÍSTICA DOS ESCRITOS ALGÉBRICOS SIMBÓLICOS: A NECESSIDADE DA DISTINÇÃO FREGEANA ENTRE SENTIDO E DENOTAÇÃO

A hipótese anunciada por Jean-Philippe Drouhard (1992, p. 4) na introdução da própria tese foi: “as ESA (Expressões Simbólicas da Álgebra Elementar) podem ser descritas por um modelo linguístico (uma gramática)”. Em sua pesquisa, Jean-Philippe chegou a uma conclusão paradoxal em relação a essa hipótese. Para destacar o implícito dos escritos simbólicos algébricos, é necessário recorrer à distinção semântica de Frege entre o sentido de uma expressão e o que ela denota.

A complexidade dos escritos fracionários aparece, não como sintagmas operatórios que giram em torno de um único símbolo de operação (1/2, ou a/b), mas como aqueles que giram em torno de dois símbolos de operação (3 + 1/2) e, ainda mais, com a inclusão de três símbolos de operação ((4 + 6) / (4 + 1)) (Drouhard, 1992, pp. 298, 314, 344-348). A partir de um exemplo citado por Stella Baruk, um aluno foi perguntado sobre a seguinte escrita:

$$2 = 10/5 = \mathbf{(4 + 6) / (4 + 1)} = 6/1 = 6$$

Então, Jean-Philippe explicou a reação do aluno, que admitiu as duas simplificações e não viu por que uma deveria se impor em relação a outra.

Como Stella Baruk apontou, a sequência das igualdades torna-se 2 = 6 e o estudante respondeu: “E daí?”. No entanto, como constatado no decorrer da entrevista, o número 2 não é igual ao 6. Na nossa opinião, a resolução dessa contradição reside no fato de que, *para o estudante, a ESA 10/5 não designa o número 2 nem a ESA 6/1 designa o número 6*. De fato, *se os escritos são privados de uma designação ausente*, não se pode exigir da igualdade que ela indica essa designação ausente. Como consequência disso, a igualdade desempenha, em relação às transformações, um papel idêntico e que é bem conhecido na aritmética de transformações, a saber, o signo do resultado de uma operação.

Em última análise, a ausência de designação de frações conduz à designação de relações e, em particular, de igualdade... e, dificilmente, a igualdade 10/5 = 6/1 *designará um valor de verdade* (neste caso, “Falso”).

Portanto, a ausência de denotação torna muito difícil julgar a correção de uma transformação contestada. Para o aluno, o debate é percebido como uma troca de argumentos de autoridade (Drouhard, 1992, pp. 360-361).

Em outras palavras, a transformação dos escritos fracionários revela uma profunda diferença entre a substituição operatória, que lida com *expressões lineares incompletas,* e a substituição semântica, que lida com *expressões completas não lineares*. O cálculo de expressões incompletas fracionárias constitui o caso, cuja substituição semântica já é implicitamente necessária antes mesmo do trabalho com equações.

A segunda conclusão diz respeito à necessidade de sensibilizar os alunos para a diferença entre o sentido de uma expressão simbólica e a sua denotação.

> Para além de um discurso sobre a própria noção de denotação (ou seja, um meta-discurso sobre expressões matemáticas), o discurso permanece um diálogo de surdos... Para os alunos há diferença, mas não uma contradição. Para que haja contradição, tem de haver denotação (Drouhard, 1992, p. 374).

Essa conclusão invalida a hipótese, anunciada desde as primeiras linhas da referida tese e reafirmada a médio prazo, a saber, de que as ESA são independentes dos números que representam? Não, uma vez que a distinção de Frege é impossível de ser feita com um termo, um signo, ou uma expressão incompleta. *Portanto, dizer que um signo, um termo ou um sintagma operatório representa um número é o mesmo que não dizer nada*. Em um signo, um termo ou numa expressão, considerada isoladamente ou em si mesmo, *não pode haver a distinção entre sentido e denotação*, seria arbitrário fazê-lo. Imediatamente, entramos no mal-entendido e no diálogo de surdos evocado por Jean-Philippe. Foi aqui que Jean-Philippe teve de abandonar a análise das ESA, em termos de gramática generativa, para regressar às análises semântico-lógicas, de Frege, sem abandonar, porém, o ponto de vista matemático.

De fato, sucessivamente, Frege tem dado duas explicações diferentes para essa distinção, uma é matemática (1891) e a outra cognitiva (1892):

- A explicação matemática diz respeito à natureza do objeto denotado e é a que Jean-Philippe escolheu:

Da leitura da Frege retivemos a ideia de que é do nosso interesse (de um ponto de vista lógico, mas também didático) considerar *a denotação de uma expressão não como um número, mas como uma função* (Drouhard, 1992, p. 267).

E isso o leva a distinguir entre o sentido de uma função e a sua interpretação:

Chamo interpretação de uma ESA X, num determinado quadro, qualquer objeto correspondente à denotação de X nesse quadro (Drouhard, 1992, p. 280).

Isso pode ser um número ou qualquer outra coisa, dependendo do quadro do problema em que uma equação é utilizada (Drouhard, 1992, p. 280).

- A explicação cognitiva e epistemológica trata do mecanismo semântico-semiótico do cálculo e do raciocínio matemático. *Isso exige o confronto com DOIS termos, DOIS signos, ou DUAS expressões incompletas, com sentidos diferentes, a fim de discernir o sentido e a denotação*.

A análise dos escritos simbólicos algébricos não é, de todo, a mesma, dependendo se se utiliza a explicação matemática ou a cognitiva da distinção entre sentido e denotação. De acordo com a explicação matemática, a denotação só se refere aos três valores verdade (verdadeiro, falso, indecidível), ou mais precisamente ao único valor verdadeiro, e diz respeito apenas a expressões completas. Conforme a explicação cognitiva, a denotação refere-se a dois termos, ou duas expressões de sentidos diferentes, e refere-se apenas a expressões incompletas, ou seja, termos, sintagmas operatórios e, também, sintagmas nominais em línguas naturais.

A conclusão, a partir da análise linguística das ESA (correta), é paradoxal e suscita várias questões.

Q. 1 No *continuum* da escrita simbólica (ver Figura 3), *onde se situa a guinada para que os alunos possam ser introduzidos na álgebra elementar*? Seria no momento enquanto ocorre a introdução das letras, ou com a conscientização entre o sentido e denotação de expressões simbólicas, que podem ser tanto numéricas quanto algébricas?

Q. 2 A distinção entre sentido e denotação, que se mostra necessária na utilização e transformação correta dos escritos simbólicos, *é essa distinção de mesma ordem que o conhecimento das propriedades dos números e das operações?*

Q.3 *A noção de escrita simbólica algébrica (ESA) não é uma noção demasiado global e, portanto, inutilizável para analisar o funcionamento dos escritos simbólicos?* Não deveríamos, primeiro, distinguir os sistemas de escrita simbólica de números e o conjunto de tipos de expressões que podem ser formados, utilizando esses sistemas? E não deveríamos, então, distinguir expressões incompletas (os sintagmas operatórios) e expressões completas (as equações)?

A conclusão final da tese trata dos quatro aspectos distintos das ESA, que devem ser levados em consideração e são requisitos para utilizá-las e transformá-las corretamente.

“compreender” as ESA é levar em conta a sua sintaxe, denotação, sentido e interpretação (Drouhard, 1992, p. 376). Essa conclusão suscita a seguinte questão, relativamente, à utilização da distinção de Frege:

Q. 4 A distinção entre denotação, sentido e interpretação é pertinente para analisar-lhe a compreensão em uma perspectiva didática e não apenas matemática?

2.1 A COMPLEXIDADE DAS ESA: UM IMPLÍCITO SINTÁTICO OU A SOBREPOSIÇÃO DE UNIDADES DE DIFERENTES TIPOS DE SENTIDO?

Interessa a teoria linguística de Chomsky, pois permite distinguir dois níveis de organização completamente diferentes: em primeiro lugar, a da estrutura profunda, na qual devem ser explicadas todas as regras sintáticas para a produção de expressões completas e incompletas. Em seguida, a estrutura de superfície, como sendo o nível de todas as expressões possíveis, que essas regras permitem produzir. Para o ensino da álgebra elementar, as expressões numéricas, literais e algébricas são utilizadas, calculadas ou aquelas que se deve produzir e que preenchem os capítulos dos manuais escolares. Uma comparação entre esses dois níveis revela o que está implícito. *Será, então, suficiente tornar explícito o que está implícito para que as ESA deixem de ser opacas ou falaciosamente transparentes?*

A questão é que não há nada de comum entre dois tipos de explicitação do implícito:

- Um, que torna necessário desenvolver um *software* para gerar expressões simbólicas e as transforme em outras, ou seja, que as calcule;
- e, dois, que torna necessário ao aluno *reconhecer visualmente* as diferentes unidades de sentido, que compõem qualquer expressão simbólica relativamente complexa, como é o caso da escrita fracionária (4 + 6) / (4+1).

O equívoco na leitura de expressões simbólicas consiste em reduzir as unidades de sentido de um sintagma operatório ou de uma equação em uma sequência linear de elementos visualmente separados por espaços em branco. Quando dizemos oralmente uma equação a ser escrita, fazemos assim: soletramo-la! Na realidade*, os escritos simbólicos algébricos sobrepõem-se e fundem-se em três tipos de unidades de significado, em uma sucessão linear de números, letras e símbolos*, como vimos em 1.2. Evidentemente, há os termos enumerados sucessivamente que dizem respeito a sistemas de escrita de números e a um *corpus* de símbolos de operação e relação. Mas há, sobretudo, as unidades de sentido formadas por agrupamentos de termos. E aqui, é crucial separar claramente expressões completas (equações) das incompletas que, também, chamamos “sintagmas operatórios”. Os sintagmas operatórios apresentam um tipo de dificuldade bem conhecido: o da ordem das operações. A transformação dos sintagmas operatórios é independente da resolução das equações, mesmo que a resolução das equações os implique.

Tomemos, de novo, o caso particular das frações que são sintagmas operatórios. Em sua tese, Jean-Philippe analisou-as, como se calculá-las implicasse uma expressão completa, o que o levou a um impasse didático (ver Q.2). Na realidade*, trata-se de um sintagma operatório que precisa ser delineado, visualizando-o, como uma árvore de operações*. Eis um exemplo, em parte retirado de um manual escolar publicado há quase quarenta anos, cuja originalidade era explicar os escritos simbólicos, *uma vez que é com a escrita de números e letras, representando números ou conjuntos de números, que trabalhamos*[8]. Esse exemplo mostra a necessidade de distinguir graus de complexidade na escrita de um sintagma operatório. O grau de complexidade depende tanto do número de símbolos de operação quanto da ordem das operações.

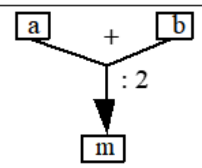
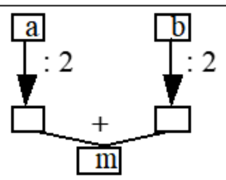
	Número de unidades de sentido elementar	Número de sintagmas operatórios	Número de NÍVEIS DE UNIDADES DE SENTIDO	Diagrama das operações	Condição fregeana de reescrita
$\frac{a+b}{2}$	5	**2**	1		SIM
a/2 + b/2	7	**3**	2		NÃO

Figura 4. Análise do grau de complexidade dos sintagmas operatórios.

Esse tipo de visualização, congruente com a ordem de prioridade das operações, indica todos os esclarecimentos verbais para explicar ou justificar o procedimento de cálculo dos sintagmas operatórios.

[8] Deledicq e Lassave (1979, p. 80)

A resolução das equações exige, ao contrário, um tipo de substituição a que chamamos condição fregeana de invariância da denotação. E aqui chegamos ao segundo ponto de desdobramento.

2.2 A DENOTAÇÃO DE EXPRESSÕES SIMBÓLICAS: UMA FUNÇÃO MATEMÁTICA OU INVARIÂNCIA DE UMA DESIGNAÇÃO, UTILIZANDO DUAS EXPRESSÕES DIFERENTES?

Encontramos aqui as duas explicações dadas por Frege, que mencionamos acima (ver 1): uma matemática e outra cognitiva.

A primeira foi eleita por Jean-Philippe, na própria tese, e retomada em trabalhos posteriores, trata-se de *aplicar a distinção entre sentido e denotação a uma única expressão simbólica considerada em si mesma*, ou seja, a cada expressão simbólica considerada, independentemente da anterior ou da seguinte em um cálculo ou em um processo de resolução. O sentido e a denotação de uma expressão aparecem, então, como dois aspectos associados e, no entanto, totalmente independentes um do outro:

O sentido de uma expressão A e *a denotação* dessa mesma expressão.

Isso leva a identificar o sentido da expressão com o objeto denotado, ou seja, uma função ou valor verdade, independentemente do sentido da expressão. Por isso, Jean-Philippe sempre teve o cuidado de especificar que *a denotação de uma equação não é um número*. Isso justifica-se matematicamente, uma "vez que uma equação de segundo grau com coeficientes reais pode ter duas ou nenhuma solução real, mas para uma equação do terceiro grau com coeficientes reais existe sempre solução real (uma ou três)".

Mas essa escolha é paradoxal, na medida em que, o problema de Jean-Philippe era analisar a especificidade da ESA, independentemente do que as diferentes expressões representassem matematicamente.

A explicação cognitiva é totalmente diferente, *equivale a aplicar a distinção entre duas expressões simbólicas para explicar o mecanismo de cálculo*. Calcular significa substituir, de forma não tautológica, uma expressão B por uma expressão A, cujo sentido é diferente de B, mas mantendo invariavelmente a denotação de A, ou seja, o que A designa. Aplicada as frases da língua natural, essa distinção permite levar em conta a coerência ou incoerência de um encadeamento de propostas em um raciocínio, argumento ou descrição.

Assim, o mecanismo de substituição subjacente ao cálculo, como explica Frege (1971/1892), pode ser esquematizado da seguinte forma:

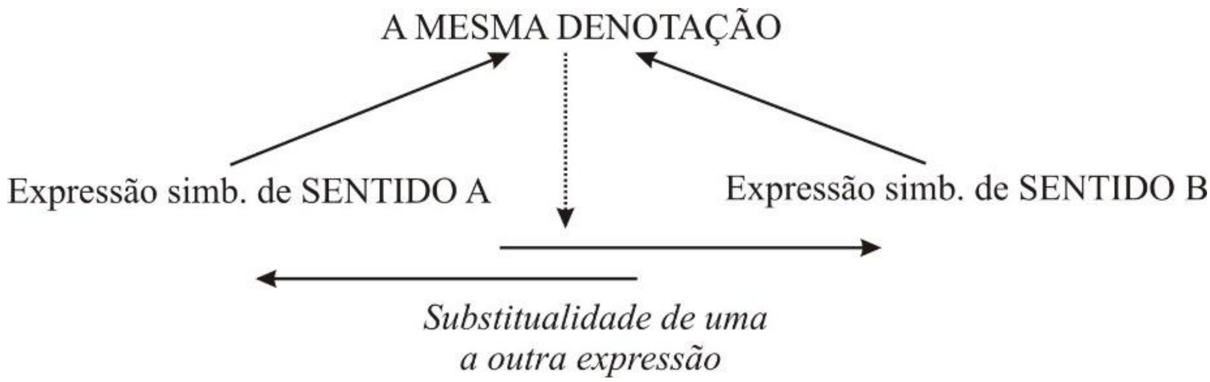


Figura 5. Esquema do mecanismo de operação de substituição das operações de cálculo.

As duas setas sólidas representam as duas possíveis substituições de uma expressão A por outra expressão, dependendo da que foi dada no início. Essa substituição só é possível sob a condição de mesma denotação, ou seja, de equivalência semântica. Para o cálculo de sintagmas operatórios, a expressão "*salva suppositione*" é mais apropriada do que a expressão *salva veritate*, que só é relevante para expressões completas.

Duas observações permitem ver a importância crucial dessa explicação cognitiva para uma teoria da compreensão e aprendizagem da escrita simbólica por parte dos alunos.

A primeira diz respeito à comparação entre duas formas de escrever ou representar números, uma em termos de sentidos elementares e outra em termos de sintagmas operatórios. Qual é a diferença entre os escritos:

"**4**" e (**1+1 +1 +1**) ou **(2 + 2)** ou **(2 × 2)** ou (**6 – 4**) ou, ainda, (**8 / 2**) ?

Por um lado, não há diferença entre sentido e denotação para a escrita 4, como para todas as resultantes da utilização exclusiva de um sistema numérico de posição de base n. E isso por uma razão muito simples, explicada por Saussure: os signos não existem por si só, mas apenas dentro de um sistema semiótico, no qual se opõem entre si, como valores de escolha para significar ou designar. O sentido de um signo é o seu valor de escolha. *Assim, a simples utilização de um dígito, ou de vários dígitos no sistema decimal, denota, automaticamente, um número,* e não há substituição possível, por exemplo: para que os dígitos 0, 1 e 6 possam alterar a sua denotação, é necessário alterar o seu sentido e, para isso, a base do sistema precisa ser alterada.

Por outro lado, a distinção entre sentido e denotação impõe-se, cognitiva e didaticamente, com o mais simples sintagma operatório (2 + 2) ou (2 × 2). Portanto, não há necessidade de esperar-se pela introdução de escritos fracionários, como pensava Jean-Philippe, para que a consciência dessa distinção se torne uma condição necessária à compreensão dos escritos simbólicos. Caso contrário, cada vez que o segundo membro de uma expressão completa contenha apenas uma unidade elementar de sentido,

$$2 \times 2 = 4 \qquad 2x = 4$$

o símbolo "=" será automaticamente entendido como o resultado de um cálculo. E isso cria um obstáculo intransponível não só para a compreensão das letras como sendo variáveis, mas, sobretudo, para compreender-se que uma equação pode ter várias soluções

$$x^2 = 4.$$

A segunda observação diz respeito à equação: equacionar um problema é o teste, por excelência, para uma aquisição significativa e útil de conhecimentos em álgebra, pois, sem ela, os alunos não poderão usar equações para resolver problemas, mesmo aqueles de aplicação concreta de uma fórmula. Recordemos aqui de que nos inquéritos PISA nem sequer isso é exigido, mas apenas a utilização de uma fórmula dada no problema (Duval e Pluvinage, 2016).

Contudo, *equacionar um problema exige dos alunos a consciência da necessidade de uma dupla designação do mesmo objeto*. Em outras palavras, é preciso "*saber*" *escrever sozinho, e espontaneamente, duas expressões simbólicas com sentidos diferentes*: uma letra sendo escolhida para designar um dos dados do problema, a segunda, um sintagma operatório construído com essa letra, para designar funcionalmente o outro dado do problema.

Equacionar um problema consiste em alterar o registro de representação, no qual os dados são apresentados. O diagrama seguinte mostra a complexidade das operações de conversão cognitiva.

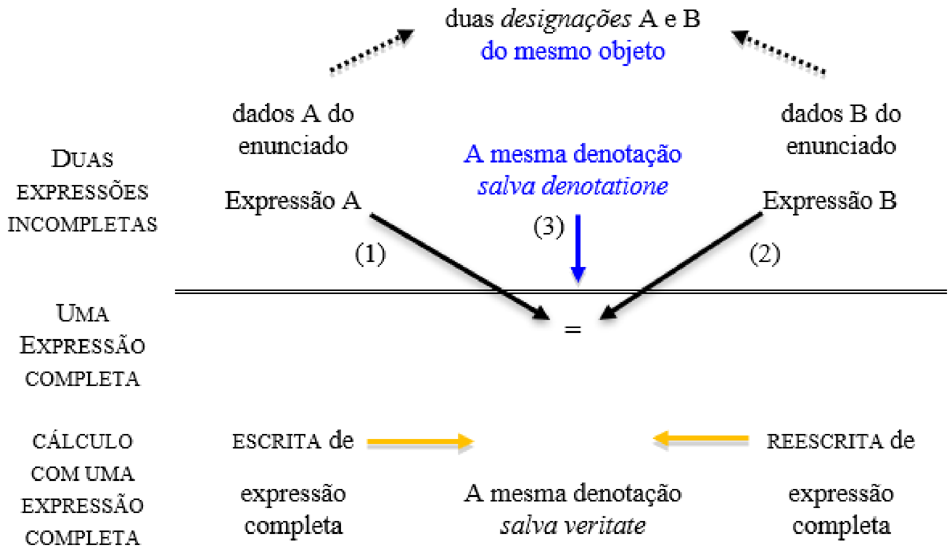


Figure 6. Esquema do mecanismo de conversão de dados para o equacionamento de um problema.

As duas primeiras linhas correspondem ao equacionamento de um problema e são marcadas por três flechas numeradas. Mas a terceira flecha na cor azul é completamente diferente das outras duas, pois pressupõe a tomada de consciência da distinção de Frege. A última linha refere-se ao cálculo, como sendo uma sequência de substituições entre expressões simbólicas escritas e que acontece em uma igualdade numérica, em uma fórmula literal ou em uma equação. O problema da enquete PISA "*n/L = 140. Se n = 70, quanto vale L*?" (Duval e Pluvinage, 2016, p. 119-121). Essas substituições supõem também uma conscientização da distinção de Frege, mas em um sentido puramente formal (as duas flechas em vermelho). A denotação concerne ao valor verdade da expressão completa. Portanto, é essencial não confundir a *equivalência salva denotatione* e a *equivalência salva veritate,* que pode ser uma identidade (ver 1.2).

E, claro, *conscientizar não é conhecer, mas reconhecer*. Não é adquirir conhecimentos e *savoir-faire*, mas tornar-se capaz de tais aquisições.

2.3 ESCRITA E SEMIÓTICA: OS SIGNOS PURAMENTE ESCRITOS DA ÁLGEBRA AINDA SÃO SIGNOS?

A autonomia semiótica dos signos, que foi imposta com a álgebra, fez-se ao preço de uma neutralização completa da sua função cognitiva de evocação de algum outro. Essa neutralização teve duas consequências revolucionárias para o desenvolvimento da matemática: a supressão da distinção entre significante e significado e, igualmente, a supressão do seu valor de oposição dentro de um sistema semiótico, o que não é o caso da escrita de números (Duval, 2006, p. 82). Leibniz foi o primeiro a perceber a novidade radical daí advinda para o pensamento matemático e para a forma de trabalhar em matemática. Em um texto de 1684, portanto, pouco depois da formação da escrita algébrica moderna, ele observa:

> ... Estou habituado a chamar este pensamento de *cego* ou s*imbólico*...; é aquele que usamos em álgebra e aritmética... (Leibniz, 1972, pp. 152-153).

Em outras palavras, os signos puramente escritos de álgebra ainda o seriam, no sentido de quando falamos de signos fora dos sistemas de escrita de álgebra e números? Para compreender essa questão, é importante não confundir três tipos de escrita: a escrita significativa, a conceptual e a simbólica.

Os escritos significantes são os signos alfabéticos, que transcrevem a palavra, ou qualquer discurso em língua natural (ver Figura 2). Tais escritos requerem vocalização, subvocalização ou leitura mental, completa ou por amostragem, cuja velocidade varia consideravelmente de acordo com o tipo de texto. O primeiro esquema de análise semiótica desenvolvido pelos estoicos, distinguindo o significante, o significado e o objeto denotado pelo signo, aplica-se à linguagem natural e aos escritos alfabéticos. Foi esse o esquema imposto até Peirce. De outra maneira, a distinção entre o significante e o significado de um signo é uma distinção lógico-linguística, não matemática (Duval, 2006, p. 93).

Os escritos conceituais são o que as palavras, símbolos ou diagramas representam: o conhecimento de uma forma, mais ou menos, convencional. Nesse caso, trata-se de um conceito que é significado de um signo, seja ele uma palavra ou um símbolo. Em outras palavras, a aquisição de conceitos é a condição essencial para compreender-se o que está escrito ou esquematizado. Já não basta ser capaz de ler, ou ter um bom domínio da língua, para compreender-se a escrita conceitual faz-se necessário a compreensão dos conceitos e não apenas das palavras.

Na maioria dos estudos didáticos de álgebra, os escritos algébricos são equiparados aos escritos conceituais que são mais econômicos e seriam mais simples. O uso do simbolismo matemático deve, então, estar subordinado ao conhecimento matemático. Esse postulado teórico tem sido predominante há muito tempo na didática e, mesmo, na didática da álgebra. G. Vergnaud formulou-o perfeitamente na conclusão do seu artigo "*Les champs conceptuels*":

> Em conclusão, vou limitar-me à seguinte tese: o simbolismo matemático não é uma condição necessária nem suficiente para a conceitualização, mas contribui para essa conceitualização, especialmente para a transformação de categorias do pensamento matemático em objetos matemáticos. A linguagem natural é o meio essencial de representação e identificação das categorias matemáticas, mas não possui, tanto quanto os diagramas, fórmulas e equações, o laconismo indispensável para a seleção e processamento das informações e relações relevantes. Essa ênfase no simbolismo não impede que, em última análise, seja a ação do sujeito, que constitui a fonte e o critério de conceitualização (Vergnaud, 1990, p. 166).

Os escritos simbólicos são aqueles que utilizam apenas números, letras, símbolos de operação, de relação e de quantificação. Em outras palavras, são apenas caracteres, que se distinguem, não mais do que, pelas suas formas e regras de agrupamentos. A sua função não é cognitiva, mas puramente operatória. As sequências formadas possibilitam que *expressões sejam substituídas por outras, sem que se leve em conta o seu significado, o sentido, a denotação nem mesmo a mobilização de propriedades matemáticas*. Foi o que Hilbert[9] explicou no texto o qual expõe o problema da decidibilidade em aritmética, um problema que levou Turing a imaginar uma máquina semiótica autônoma para efetuar cálculos e desenvolver a noção de programação:

> Para que o raciocínio lógico seja seguro, os objetos discretos e extra lógicos devem ser dados como experiência imediata para cada pensamento... a sua apresentação, diferenciação e sequência devem ser acessíveis em uma intuição imediata... Quando adoto esse ponto de vista, os objetos da teoria dos números são, eles mesmos, signos, cuja configuração pode ser reconhecida por nós de uma forma geral e certa... Sobre isto repousa a sólida posição filosófica, que considero indispensável à base da matemática pura, bem como, a todo o pensamento científico, compreensão e comunicação: no princípio é o signo (Hilbert, 1922).

Em outros termos, com os escritos simbólicos, os signos podem-se reduzir aos objetos, ou seja, à forma de um caractere ou uma sequência deles, que são utilizados independentemente do que possam vir a significar, a fim de manter-se apenas o seu poder de cálculo.

A dificuldade com a qual Jean-Philippe deparou-se no próprio trabalho foi a de ter analisado os escritos algébricos, como se pudessem ser simultaneamente escritos operatórios e escritos conceituais, sem sequer excluir a possibilidade de que pudessem ser escritos significantes também.

Obviamente, essa dificuldade não é exclusiva do trabalho de Jean-Philippe. Encontra-se em quase todas as investigações didáticas sobre o ensino da álgebra elementar no EF-2. Todos os escritos simbólicos, aritméticos ou algébricos são introduzidos

---

[9] Hilbert D. (1922). *Neubegründung der Mathematik.* Hamburg: Verlag des mathematischen Seminars.

como escritos conceituais. E todas as teorias semióticas, utilizadas na análise, *são teorias generalistas dos signos, que não levam realmente em conta a ruptura entre a linguagem falada e a escrita*, entre os conhecimentos matemáticos e outros tipos de conhecimentos, entre o que está sob um suporte de comunicação e o que está sob um sistema de tratamento. Com todas as teorias globalizantes da noção de signo, torna-se impossível intentar e levar em conta a especificidade da escrita simbólica algébrica em relação aos outros dois tipos de escrita, bem como a sua irredutibilidade a outros registros de representação semiótica.

Enfim, as unidades elementares de significado como os números, letras e símbolos de operações, normalmente chamadas de "signos", têm uma característica primordial, qual seja A SUA OCORRÊNCIA, isto é, o número de vezes que aparecem numa expressão completa. *As ocorrências de uma letra, ou seja, o seu número e o seu lugar em expressões algébricas, constituem a base do cálculo algébrico*. A simplificação dos sintagmas operatórios, que podem ser mais ou menos complexos, baseia-se na redução do número de ocorrências de uma das três unidades elementares de sentido que as compõem. Do mesmo modo, a resolução de uma equação exige o deslocamento de certas unidades de sentido de um membro para outro, a fim de separar as frases operacionais que incluem letras e as que são puramente numéricas (Duval e Pluvinage, 2016, p. 148-150). O cálculo algébrico e a resolução de equações baseiam-se, fundamentalmente, no reconhecimento visual das ocorrências de letras e na forma dos seus arranjos em sintagmas operacionais. O cálculo algébrico é "formal" no sentido visual do termo. Mas, é claro, isso exige que se possa reconhecer rapidamente os diferentes tipos de unidades de sentido que constituem uma expressão simbólica completa. Esse processo pode, sem dúvida, ser reduzido para a resolução de equações de primeiro grau e torna-se central para a resolução de equações do segundo grau. O obstáculo será maior ainda para aqueles alunos que, na aprendizagem da álgebra elementar, não foram introduzidos com exercícios de resolução de igualdades com elemento vago a ser completado (Duval, 2015, pp. 62 - 67).

A diferença entre cálculo numérico e algébrico não está na utilização de uma letra, se dá pelo fato de que o *resultado do cálculo numérico acaba sempre em um nome próprio de número e não somente em outro sintagma operacional*, o qual pode ser sempre reduzido a um nome próprio de número. Por sua vez, esse nome é a escrita de um número resultante da mera mobilização de um sistema de numeração (3, 14, 144,). Assim, pode-se reconhecer se dois escritos numéricos diferentes **(2+4) e (2 3)** têm o mesmo nome próprio ou se são os mesmos signos encontrados, segundo o critério de Hilbert. A mesma ideia aplica-se à resolução de equações do primeiro grau, o resultado é verificável porque se trata de um nome próprio e a letra utilizada possui (ou as letras possuem) um estatuto de incógnita.

Aquilo a que Jean-Philippe chamou “escritos simbólicos algébricos” abrange toda a gama de escritos simbólicos que permitem a utilização de algoritmos, engloba desde o cálculo com números inteiros até a resolução de equações, passando pelo cálculo com casas decimais e, na sequência, com frações racionais. As ESA constituem um *continuum* que só pode ser percebido e estudado ao nível do currículo de ensino de matemática comum aos alunos do EF-1 ao EF-2. Esse *continuum* é completamente obscurecido em nível local pela organização de sequências didáticas, ou seja, sequências de algumas semanas de duração, cujo objetivo de aquisição é um conteúdo matemático local, que é apenas um dos múltiplos componentes de um conhecimento mais global, objetivo final de aquisição de um ciclo de três ou quatro anos de ensino! Nesse *continuum*, o limiar decisivo para entrar na álgebra não é a introdução das letras, ou a generalização que elas propiciam, mas a consciência da diferença entre a denotação das expressões simbólicas e o seu sentido. Essa conscientização deve ter um lugar muito antes da introdução das letras. As dificuldades que os alunos enfrentam, na aprendizagem da álgebra elementar, são apenas a síndrome da ausência total dessa consciência.

A segunda contribuição da obra de Jean-Philippe é, portanto, considerar os “escritos algébricos simbólicos” como um todo. Igualmente, todos estão sujeitos ao mesmo conjunto de regras de formação na semântica fregeana. Para designar esse conjunto, falamos de regras de um “*continuum*”. Jean-Philippe, por seu lado, retomou o termo “registro”, especificando “registro algébrico”. Neste sentido, só podemos concordar. Pois, ao retomar esse termo, ele enfatiza o fato de que todas as expressões simbólicas devem ser consideradas por si mesmas e que são radicalmente diferentes da língua materna utilizada para as interações verbais em sala de aula. Se a escrita simbólica é uma linguagem, é mais estrangeira do que as línguas estrangeiras, que os alunos têm de aprender a falar. Apesar disso, existe ainda a crença, apenas do ponto de vista matemático, de que os escritos simbólicos seriam mais simples e rápidos de aprender! Pois bem, teremos de ouvir Jean-Philippe, que nunca deixou de afirmar o contrário.

*

***

Como fazer as pessoas reconhecerem, à primeira vista, as diferentes unidades de sentido embutidas em uma expressão simbólica e como torná-las conscientes da diferença entre os sentidos de uma expressão simbólica e o que ela denota? Jean-Philippe salientou a natureza crucial dessa questão para a compreensão e aprendizagem da álgebra, também tinha notado que as teorias didáticas ao priorizarem o ponto de vista dos professores e o conteúdo matemático a ser ensinado, não apresentam resposta nenhuma a essa questão. O trabalho de Jean-Philippe também não lhe permitiu progredir mais nesse assunto e esse é o limite do problema da sua investigação. Qual a razão disso?

Essa questão, da compreensão e da aprendizagem do registro de escritos simbólicos, requer uma abordagem cognitiva em termos de registros, uma vez que a regra de ouro de tal análise assevera que um registro só pode ser analisado com base nas variações de outro. Em outras palavras, para analisar o registro de escritos simbólicos, é preciso considerar vários pares de registros, dentro dos quais as conversões diretas e as conversões inversas devem ser estudadas, em primeiro lugar, entre si:

- (Escritos simbólicos e linguagem natural),
- (Escritos simbólicos e gráficos cartesianos),
- (Escritos simbólicos e esquemas),
- (Escritos simbólicos e tabelas),
- (Linguagem natural e tabelas).

A problemática de Jean-Philippe permanece, fundamentalmente, uma problemática monorregistro e isso constitui o interesse e o aporte, uma vez que contribui para destacar a complexidade do funcionamento e da mobilização dos “Escritos Algébricas Simbólicas” em alunos do EF2.

A escrita, e não apenas a linguagem e a fala, tem sido o patamar decisivo na evolução da humanidade. O nascimento da escrita não só marca o início da história, como permitiu o desenvolvimento do conhecimento e, em particular, da matemática. Isso destaca um ponto fundamental característico da atividade matemática: não se pode fazer matemática sem primeiro escrever. *A matemática é escrita. Não se pode realmente dizer... sem escrever, ou rabiscar alguma coisa.* A escrita é um dos fatores primordiais do desenvolvimento cognitivo do pensamento, porque permite uma objetivação que se torna impossível com o imediatismo do que se diz, e do que se quer dizer com a palavra (Duval, 2000).

Os escritos simbólicos algébricos são radicalmente diferentes de todos os escritos, cuja função principal é codificar visualmente a fala, fixá-la para apresentar o pleno desenvolvimento da sua expressão. Mesmo que as equações remontem aos babilônios[10], só apareceram muito tarde[11] e só foram constituídas há menos de dois séculos, desde Cardan e Viète, até Descartes e Leibniz.

Os escritos alfabéticos são imediatamente alternáveis com a fala para quem aprendeu a ler, assim como, obviamente, a fala pode ser imediatamente transcrita para quem aprendeu a escrever. No entanto, do ponto de vista dos atos de expressão propriamente ditos, *falar e escrever não são atividades passíveis de mudança, porque quando se passa da palavra para a escrita, a relação com a língua muda*. Por um lado, as operações discursivas de designação a serem feitas são mais complexas quando se trata de escrevê-las do que, simplesmente, de falá-las. Por outro lado, o foco é parcialmente deslocado das palavras ou frases nominais para as unidades superiores de sentido, que são as equações e proposições. Por isso, a escrita cumpre funções de distanciamento, objetivação, controle e, finalmente, consciência de que a fala e as interações verbais não podem ser realizadas. *Escrever estrutura o pensamento. Não é falando que se aprende a escrever.*

Os escritos simbólicos, numéricos ou algébricos (ESA) são operatórios e puramente operacionais. Isso significa que a sua única função é permitir *operações algoritmizáveis de substituição de expressões simbólicas por outras expressões simbólicas, de acordo com as ocorrências dos signos que as compõem*. Isso implica, naturalmente, termos um sistema de numeração que funciona como um sistema semiótico, no sentido de Saussure. É por isso que não se pode, de forma alguma, trocar os escritos simbólicos pela fala, uma vez que essas operações de substituição não são possíveis com a utilização, mesmo que apenas mental, de uma linguagem natural. *E, inversamente, as operações de associação de palavras e ideias, que constituem o poder da linguagem natural, não são possíveis com os escritos simbólicos.*

A linguagem natural e os escritos simbólicos são dois registros de representação semiótica irredutíveis entre si. De um ponto de vista matemático, o registro de escritos simbólicos tornou-se o registro por excelência da matemática. Mas de um ponto de vista

[10] A história começa na Mesopotâmia. Catálogo da exposição no Museu do Louvre-Lente, Nov/2016-Jan/2017. A exposição inclui reproduções de dois prismas gravados na escrita cuneiforme do período 1749-1712 a.C. Para um, as faces correspondem a tabelas numéricas e metrológicas, e para o outro, a oito problemas relacionados com retângulos e tijolos (n.ºs 261 e 262, pp. 240-241). As primeiras pastilhas escritas em argila cuneiforme datam de 3300-3000 d.C., (Fig. 66, p. 217).

[11] F. Pluvinage, que acaba de nos deixar, chamou a atenção para a coincidência entre o aparecimento dos escritos simbólicos e o desenvolvimento da impressão, que impôs a padronização de caracteres (Duval & Pluvinage, 2016, p. 130).

didático, há uma dupla tarefa a ser feita: sobre as operações de designação específicas de cada um desses dois registros e sobre a não-congruência das conversões na passagem de um a outro.

Contra o uso equivocado da palavra “linguagem” na didática, Jean-Philippe salientou a autonomia e o poder incomparável da escrita em relação à fala.

PERSPECTIVAS

O ensino e aprendizagem da álgebra elementar no EF-2 é organizado de acordo com uma progressão de (re)-“construção” da análise matemático-regressiva discutida na início desse texto. A análise semiocognitiva dos escritos simbólicos foge completamente desse quadro, significa analisar as necessidades e as dificuldades de aprendizagem da álgebra antes de organizar o seu ensino. Por um lado, o seu objetivo é sensibilizar, tanto para as operações discursivas específicas da linguagem natural, como para os escritos simbólicos, e por outro, quebrar a parede de vidro que os separa. Esses excertos foram feitos para que os próprios professores possam apropriar-se desse instrumento analítico, a fim de apreender as causas profundas dos bloqueios dos alunos e desenvolver atividades, cujo objetivo seja a tomada de consciência por parte dos alunos. Será isso possível? E quais tarefas devem ser desenvolvidas para atingir esse objetivo desde os primeiros anos do EF-2, ou pelo menos, ao final do segundo ano, para 80% dos alunos? Na realidade, esses objetivos só podem ser plenamente atingidos se forem perseguidos, pela primeira vez, durante os dois primeiros anos do EF-2. Isso implica dizer que, *devem ser explicitamente integrados na organização dos programas*, uma vez que dizem respeito ao lado oculto da atividade matemática e não ao lado exposto.

Voltemos agora às diferenças de abordagem entre a análise dos escritos simbólicos algébricos, de Jean-Philippe, e a análise do funcionamento semiocognitivo que esses escritos pressupõem. Em primeiro lugar, o verdadeiro ponto de encontro dessas duas abordagens é o papel crucial que nelas desempenha a distinção entre sentido e denotação, feita por Frege. A divergência se dá pelo fato de que a abordagem de Jean-Philippe é unilateral. Além disso, trata apenas de escritos algébricos, sem considerar, também, o funcionamento específico da linguagem natural e nem a questão da sua coordenação cognitiva. Essa divergência é evidenciada pela sua escolha da palavra “implícito” em detrimento da expressão “ilusão de transparência”. De uma problemática, centrada em um problema crucial de aprendizagem de álgebra, passamos a um problema de algoritmização da escrita algébrica para fins de ensino. Pode-se dizer dos algoritmos, ao menos durante o período de formação inicial dos jovens estudantes, o mesmo que Leibniz já dizia sobre os signos? O ensino da álgebra obriga-nos a fazer essa questão.

REFERÊNCIAS

Damm, R. F. (1992). ***Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte*.** (thèse de doctorat). IREM, Unistra, IREM, France.

Deledicq, A. e Lassave, C. (1979**).** ***Faire des Mathématiques**, 4ème*. Paris : Cedic.

Drouhard J. P. (1992). ***Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire**. (*thèse de Doctorat). Université Paris VII, France

Drouhard, J. P. e Panizza, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. ***Recherches en Didactique des Mathématiques*, N°** spécial *Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives*, pp. 209-236.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Berne : Peter Lang.

Duval, R. (2000). Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20/2, 135-170.

Duval, R. (2002). **L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets.** Dans J. P. Drouard et M. Maurel (dir.) *Actes des Séminaires SFIDA-13 à SFIDA-16*. Volume IV 1999-2001 (pp.67-94). Séminaire Franco-Italien à l'IREM de Nice.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques *?* ***Relime*,** N°. 45-81.

Duval, R. (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques : apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre ? ***REVEMAT* (**Trad. de M. T. Moretti), V. 8, n. 1, 1-45.

Duval R., Campos T. M. M., Barros, L. G. & Dias, M. A. (2015). ***Ver e ensinar a matemática de outra forma****.* II. *Introduzir a álgebra no ensino: Qual é o objetivo e como fazer isso?* São Paulo: Proem Editora.

Duval, R. e Pluvinage, F. (2016). **Apprentissages algébriques**. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 21, pp. 117-152.

Frege, G. (1971), (1891). **Fonction et concept.** Dans *Ecrits logiques et philosophiques* (Tr. Imbert*)*, 80-101. Paris: Seuil.

Frege, G. (1971), (1892). **Sens et dénotation.** Dans *Ecrits logiques et philosophiques* (Tr. Imbert) 102-126. Paris: Seuil.

Hilbert D. (1922). ***Neubegründung der Mathematik****.* Hamburg: Verlag des mathematischen Seminars.

Leibniz, G. W. (1972). ***Œuvres*** I (Ed., L. Prenant). Paris : Aubier Montaigne**.**

Nichanian, M. (1979). **La *question générale du fondement :*** *écriture et temporalité*. (thèse de doctorat). Université des lettres et des sciences humaines de Strasbourg, France.

Vergnaud, G. e Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique*,* ***Revue française de pédagogie*****,** 36, pp. 28-43.

Vergnaud, G. (1990). Les champs conceptuels. ***Recherches en didactique des mathématiques.*** Vol. 10/2.3, pp. 133-170.

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA
ESCRITOS SIMBÓLICOS E OPERAÇÕES HETEROGÊNEAS DE SUBSTITUIÇÃO DE EXPRESSÕES: AS CONDIÇÕES DE COMPREENSÃO EM ÁLGEBRA ELEMENTAR

TÍTULO ORIGINAL DA OBRA
Les Ecritures Symboliques Et Les Opérations Hétérogènes De Substitution D'expressions : Les Conditions De Compréhension En Algèbre Elémentaire

Méricles Thadeu Moretti
Doutorado em Didática da Matemática (UNISTRA).
Universidade Federal de Santa Catarina,
Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, Brasil.
mthmoretti@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

Endereço de correspondência do principal autor
Campus Universitário Reitor João David Ferreira Lima, s/nº, Trindade – Florianópolis – SC

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: R. Duval
Coleta de dados: R. Duval
Análise de dados: R. Duval
Discussão dos resultados: R. Duval
Revisão e aprovação: R. Duval

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 01/11/2023 – Aprovado em: 29/11/2023