



REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UMA DECOMPOSIÇÃO GENÉTICA PARA CONTINUIDADE DE FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL

A Genetic Decomposition For Continuity Of Function Of A Real Variable

Maria Alice de Vasconcelos Feio MESSIASUniversidade Federal do Pará, Salinópolis (PA), Brasil
alicemessias@ufpa.br<https://orcid.org/0000-0003-2853-1965>**João Cláudio BRANDEMBERG**Universidade Federal do Pará, Belém (PA), Brasil
brand@ufpa.br<https://orcid.org/0000-0001-8848-3550>

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo ●

RESUMO

Este estudo, que apresenta parte dos resultados da pesquisa de doutorado da primeira autora, teve como objetivo investigar que estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos por um indivíduo para potencializar sua compreensão sobre o conceito de continuidade de uma função. Para tanto, fundamentou-se nos pressupostos da Teoria APOS (ARNON et al., 2014), no conhecimento dos autores sobre o objeto continuidade de uma função, e nas compreensões de estudantes sobre o tema para, assim, propor uma Decomposição Genética (DG) para o referido conceito. Os resultados evidenciam a importância de contemplar diferentes objetos matemáticos na DG, tais como função, limite e domínio, dentre outros elementos. Por fim, reitera-se que a Decomposição Genética apresentada neste trabalho pode nortear tanto instrumentos avaliativos quanto materiais instrucionais voltados ao processo de aprendizagem no âmbito do Cálculo.

Palavras-chave: Continuidade De Uma Função, Decomposição Genética, Teoria APOS

ABSTRACT

This study, which presents part of the results of the first author's doctoral research, aimed to investigate what mental structures and mechanisms an individual needs to construct to understand the concept of continuity of a function. To this end, it was grounded on the assumptions of APOS Theory (ARNON et al., 2014), the authors' knowledge of the mathematical object, and students' understandings of the topic to propose a Genetic Decomposition (GD) for this concept. The results highlight the importance of including different mathematical objects in the GD, such as function, limit, and domain, among other elements. Finally, it is reiterated that the Genetic Decomposition presented in this work can guide both assessment instruments and instructional materials aimed at the learning process in Calculus.

Keywords: Continuity Of A Function, Genetic Decomposition, APOS Theory

1 INTRODUÇÃO

A aprendizagem de conceitos matemáticos constitui um processo multifacetado de interações (Brandemberg, 2010; Messias, 2018; Messias & Brandemberg, 2021). Nessa perspectiva, a compreensão conceitual exige que o indivíduo reflita sobre as características do objeto em múltiplos contextos (matemáticos ou não), promovendo a abstração por meio de representações, generalizações e sintetizações.

Sob esse prisma, ao colocar-se diante de uma situação matemática — aqui definida como uma tarefa específica — o sujeito mobiliza um conjunto de elementos para solucioná-la. O êxito dessa mobilização depende diretamente do amadurecimento de suas construções mentais e de sua coerência com a teoria formal.

Diante desse cenário — e considerando as experiências docentes dos autores no âmbito do Cálculo Diferencial e Integral¹ — este artigo apresenta um estudo sobre a compreensão de estudantes acerca dos objetos que constituem essa área de conhecimento, de modo que as expressivas dificuldades inerentes ao entendimento de continuidade de função de uma variável real, apontadas em pesquisas anteriores (Vinner, 1987; Karatas et al, 2011; Amatangelo, 2013; Jayakody & Zazkis, 2015; Messias, 2018), motivaram a delimitação deste estudo à problemática da aprendizagem do referido conceito.

Cumprе ressaltar a importância do conceito de continuidade para a construção de uma base sólida em Cálculo. Afinal, há outros objetos adjacentes que dependem dele, tais como a aplicabilidade do Teorema do Valor Médio e a relação entre diferenciabilidade e continuidade de uma função, dentre outros. Desse modo, qualquer fragilidade na compreensão sobre continuidade pode implicar em dificuldades na apreensão de outros objetos no contexto do Cálculo.

Apresenta-se, então, a seguinte pergunta: Que estruturas e mecanismos mentais devem ser construídos por estudantes de maneira a viabilizar a compreensão de continuidade de função de uma variável real? Para respondê-la, desenvolveu-se um estudo, apoiado na Teoria APOS² (Arnon et al., 2014), cujo objetivo foi investigar que estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos por um indivíduo para potencializar sua compreensão sobre continuidade de uma função.

¹Os termos Cálculo Diferencial e Integral e Cálculo são utilizados indistintamente neste texto.

²Sigla que indica os termos em inglês: Action, Process, Object e Schema.

À luz da pergunta e objetivo enunciados, apresenta-se uma Decomposição Genética (DG) para Continuidade de Função³. Para tanto, traça-se uma reflexão sobre a pluralidade de compreensões de estudantes de graduação, relativas a esse conceito. Em seguida, discute-se sobre a Teoria APOS, relacionando-a nas seções subsequentes, com o estudo realizado, seus aspectos metodológicos, bem como com a DG elaborada. Nas considerações finais, discute-se sobre a relevância e limitações deste trabalho, além das expectativas de suas contribuições para pesquisas futuras.

2 COMPREENSÕES SOBRE O CONCEITO DE CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

No que se refere à natureza do conceito de continuidade, muitas pesquisas destacam que os estudantes, de modo geral, mobilizam uma concepção dinâmica, por meio da qual dá-se direcionalidade e movimento à função (Amatangelo, 2013; Jayakody, 2015; Jayakody & Zazkis, 2015, Messias, 2018). Nessas condições, é comum o uso de expressões do tipo “a função flui” ou “a função se move sem interrupções”. Para Tall e Vinner (1981), Cornu (1991) e Jayakody (2015), tal interpretação decorre do próprio uso coloquial do termo “continuidade”.

A ideia de movimento atrelada à função pode implicar na compreensão de que a representação gráfica de uma função contínua não apresenta “saltos” ou “buracos”, conforme observado em diferentes estudos (Vinner, 1987; Jayakody & Zazkis, 2015; Messias & Brandemberg, 2015). Em direção semelhante, Tall e Vinner (1981), Vinner (1987) e Cornu (1991) apontaram que estudantes costumam ter o entendimento de que uma função descontínua é constituída por “partes que não se encontram”. Ou seja, a continuidade de uma função, nesse caso, está atrelada à noção de conectividade.

Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Amatangelo (2013), Denbel (2014), dentre outros, observaram que os estudantes, em geral, condicionam a continuidade em determinado ponto à existência do limite bilateral nesse ponto. Entende-se que a generalização dessa interpretação pode contribuir para que a relação entre limite e continuidade se configure como um fator de conflito em potencial (Tall & Vinner, 1981), uma vez que ela não será válida quando o ponto analisado estiver localizado na extremidade de um dado intervalo, sendo necessário, nesse caso, considerar unicamente o limite lateral existente e o valor da

³Os termos Continuidade de uma Função e Continuidade de uma Função de uma variável real são utilizados indistintamente neste trabalho.

função no ponto em questão.

Na tese de doutorado da primeira autora desse trabalho (Messias, 2018) foram destacadas algumas compreensões sobre o conceito de continuidade, as quais foram evocadas por estudantes do curso de licenciatura em matemática que já haviam cursado a disciplina Cálculo I. A saber:

[C1] – f é contínua em x_0 se $x_0 \in D_f$;

[C2] – A continuidade de uma função em um ponto depende da existência do limite nesse ponto;

[C3] – A existência do limite independe da continuidade no ponto;

[C4] – A descontinuidade em x_0 representa um “buraco” nesse ponto;

[C5] – A descontinuidade no ponto implica em “salto” no gráfico da função;

[C6] – f é contínua se não apresentar “saltos” ou “buracos” em sua representação gráfica;

[C7] – Uma reta assíntota representa descontinuidade na função

[C8] – Continuidade = Conectividade;

[C9] – Descontinuidade em x_0 implica na não existência do limite quando $x \rightarrow x_0$.

No que concerne às compreensões [C1] a [C3], Messias (2018) identificou que, em geral, os estudantes, ao definirem continuidade no ponto, evocaram condições do domínio e/ou existência do limite bilateral, independente do ponto em questão estar localizado no interior de um intervalo ou em sua extremidade. Isso porque, a relação entre limite bilateral, continuidade e condições de domínio é comumente mobilizada, seja de forma consciente ou inconscientemente.

A questão da existência do limite quando $x \rightarrow p$ e sua implicação na continuidade nesse ponto pode, conforme anteriormente destacado, configurar-se como um fator de conflito em potencial. Por isso, considera-se prudente expandir o olhar de estudantes que possam ter um entendimento semelhante à compreensão [C2]. Admite-se, desse modo, ser necessário explorar, sempre que possível e independente do contexto (geométrico ou algébrico), situações que envolvam as condições para continuidade no ponto em um dado intervalo de seu domínio de validade, de maneira a permitir o máximo de representações possíveis relativas a esse objeto e, conseqüentemente, ampliar a compreensão dos estudantes, permitindo a eles maior flexibilidade quando diante de determinada situação matemática que demande esse conhecimento (Messias, 2023).

As respostas dos sujeitos investigados em Messias (2018) reiteraram que suas compreensões estiveram atreladas, diretamente, à ideia de conectividade, ou seja, à ausência de “saltos”, “buracos” ou “quebras” na representação gráfica da função. Esse tipo de evocação, as quais são representadas pelas compreensões [C4] a [C8], foram observadas também em Tall e Vinner (1981), Cornu (1991), Vinner (1987), Jayakody e Zazkis (2015), e Messias e Brandemberg (2015). É possível, ainda, vinculá-las à uma percepção dinâmica sobre continuidade, a qual Amatangelo (2013), Jayakody (2015) e Jayakody e Zazkis (2015) apontam estar atrelada à uma ideia de movimento e direcionalidade atribuídas à função.

O problema de restringir a percepção sobre continuidade de uma função em determinado ponto à ausência de “saltos” ou “buracos” é que o indivíduo não se atenta para o fato de que a definição de continuidade de uma função f em um ponto x_0 demanda que x_0 pertença ao domínio de f , do contrário não há como avaliar a continuidade neste ponto. Por isso, é comum que os estudantes afirmem, equivocadamente, que a função f destacada na figura 1 é descontínua em $x = b$.

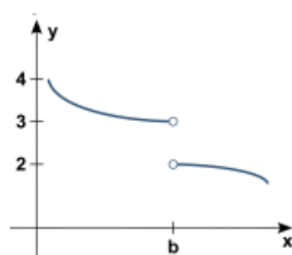


Figura 1: Gráfico da função f
Fonte: Adaptado de Messias (2018)

Finalmente, em se tratando da compreensão [C9], é comum que a relação entre limite e continuidade se configure como um fator de conflito em potencial, conforme evidenciado em Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), e Messias (2013; 2018), dado que muitos estudantes, em algum momento de sua formação em disciplinas de Cálculo, condicionam a existência do limite em determinado ponto à continuidade da função nesse ponto.

Vale ressaltar que as compreensões destacadas nesta seção são extremamente relevantes, uma vez que permitem verificar possíveis conflitos que permeiam as percepções de estudantes de Cálculo sobre continuidade, sua relação com a (não) existência do limite no ponto e as condições de domínio da função. A seguir, são traçadas algumas considerações sobre a teoria APOS.

3 A TEORIA APOS E SUAS ARTICULAÇÕES COM A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

A Teoria APOS é pautada nos estudos sobre Abstração Reflexionante de Piaget e, nesse sentido, discute mecanismos e estruturas mentais associadas a determinado conhecimento, o qual entende-se ser concebido mediante Esquemas que, por sua vez, podem ser constituídos por uma pluralidade de percepções, ideias e ações que são de extrema importância para a compreensão matemática.

Admite-se, na perspectiva da Teoria APOS, que seja inicialmente por meio da manipulação de objetos, físicos ou mentais, previamente construídos por um indivíduo, que se formam Ações. Quando se tem controle sobre essas Ações, isto é, quando se tem consciência sobre suas características e especificidades, estas são interiorizadas na forma de Processo que, por sua vez, é uma estrutura que performa a mesma operação interiorizada sem que seja necessário executá-la de maneira explícita (Dubinsky et al., 2005).

Quando o indivíduo entende o Processo como uma estrutura estática e, a partir daí, executa Ações sobre essa estrutura, diz-se que ela pode ser encapsulada na forma de Objeto. Um ou mais Objetos podem ser desencapsulados e, os Processos por meio dos quais foram concebidos, são coordenados para formar um novo objeto. Esse movimento é ilustrado na Figura 2.

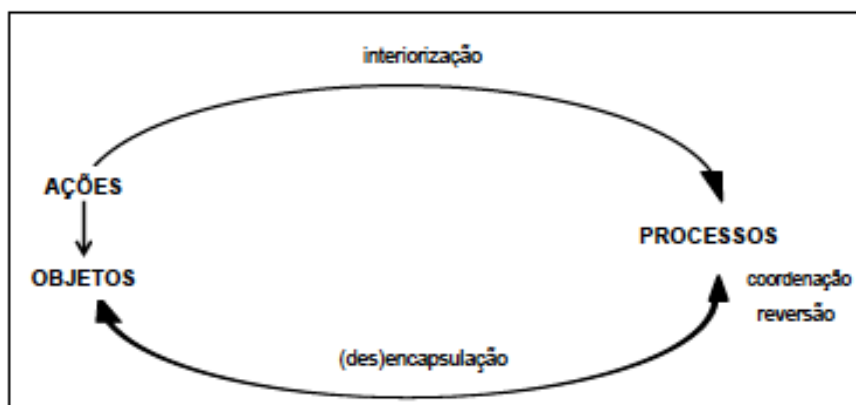


Figura 2: Composição de um Esquema
Fonte: Arnon et al. (2014, p. 10, traduzido pelos autores)

Entende-se que um Esquema mental sobre um conceito seja dinâmico e, por isso, sua coerência demanda que o sujeito desenvolva a habilidade de entender em que contexto(s) matemático(s) pode/deve utilizá-los (Messias & Brandemberg, 2021; 2023). Além disso, é de extrema importância que este seja constituído por uma pluralidade de

elementos, sejam eles associados à natureza do conceito, às definições matemáticas, às múltiplas representações ou aos processos operatórios.

É importante ressaltar que, ainda que a natureza de um Esquema possa diferir de um indivíduo para o outro, é possível conjecturar sobre mecanismos e processos mentais necessários à construção de um determinado objeto matemático. No contexto da teoria APOS, essas conjecturas podem ser efetivadas por meio da elaboração de um modelo, o qual é denominado de Decomposição Genética (DG).

A DG é, inicialmente, uma hipótese sobre o que seja necessário para que um sujeito construa um conhecimento matemático. Trata-se de um conjunto de Ações, Processos, Objetos e Esquemas que possibilitam (re)pensar sobre os caminhos cognitivos que levem à aprendizagem de novos conceitos (Messias, 2018). Uma Decomposição Genética é prevista a partir de múltiplas perspectivas, a exemplo do desenvolvimento histórico-conceitual do objeto em questão, do conhecimento do professor acerca da teoria formal, de suas experiências prévias na docência daquele objeto, de sua compreensão sobre os aspectos da Teoria APOS, dentre outros aspectos.

Entende-se que a Decomposição Genética pode assumir um papel orientativo na condução do processo de construção de determinado conhecimento matemático, configurando-se como um modelo de epistemologia e cognição matemática (Roa-Fuentes; Oktaç, 2010). Isso porque, a partir dela, é possível (re)pensar sobre os “caminhos cognitivos” necessários para tal, sendo possível (re)adequá-los, mediante a construção de determinado conceito e tendo em vista o fato do processo de aprendizagem diferir de um indivíduo para outro.

Além de sua relevância na perspectiva de construção de conhecimento, a DG pode, também, assumir um papel essencial na elaboração de materiais instrucionais ou de instrumentos avaliativos. Reitera-se, portanto, que seja possível conjecturar, a partir de uma Decomposição Genética, sobre mecanismos e estruturas mentais que possam viabilizar a compreensão do conceito de continuidade. Tal fato influenciou este estudo, cujo delineamento metodológico é destacado na seção subsequente.

4 DELINEAMENTO METODOLÓGICO

Conforme previamente mencionado, este estudo teve como objetivo central investigar que estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos por um indivíduo para potencializar sua compreensão sobre continuidade de uma função. Tal objetivo foi

norteado pela seguinte pergunta: Que estruturas e mecanismos mentais devem ser construídos por estudantes de maneira a viabilizar a compreensão do conceito de continuidade de função de uma variável real?

Para respondê-la, efetivou-se um estudo que possibilitou a construção de uma Decomposição Genética para o referido objeto matemático. Considerou-se, para tanto, as experiências dos autores na docência em Cálculo, aspectos da Teoria APOS, além das compreensões sobre continuidade de uma função elencadas anteriormente nesse artigo (ver seção 2).

Afiança-se, portanto, a natureza qualitativa deste trabalho, já que este esteve vinculado, essencialmente, à descrição e interpretação de resultados, com vistas à produção de significados para o objeto de pesquisa (Freitas & Jabbour, 2011). Ademais, entende-se, assim como Strauss e Corbin (1998), que o termo “pesquisa qualitativa” está relacionado a “qualquer tipo de pesquisa que produza resultados não alcançados através de procedimentos estatísticos ou outros meios de quantificação” (Strauss & Corbin, 1998, p. 23). Amite-se, também, o teor descritivo do estudo realizado, uma vez que foi balizado na descrição de características de determinado fenômeno de interesse, neste caso, a decomposição genética para continuidade de uma função.

Na seção subsequente, são discutidos os aspectos que nortearam a escolha dos elementos contemplados na DG elaborada.

5 CONSIDERAÇÕES SOBRE A DECOMPOSIÇÃO GENÉTICA ELABORADA

Para a elaboração da Decomposição Genética, tomou-se, inicialmente, as compreensões [C1] a [C9], evocadas pelos sujeitos investigados em Messias (2018), e previamente destacadas na seção 2 deste trabalho. A seguir, faz-se algumas considerações prévias sobre os elementos que compuseram tais compreensões.

As evocações sobre continuidade estiveram, de algum modo, relacionadas à [C8], ou seja, pautadas na noção de que continuidade = conectividade. Nessas condições, os sujeitos investigados atrelaram esse conceito à ausência de “interrupções”, tais como “saltos”, “buracos” ou “quebras” na representação gráfica da função. Esse tipo de mobilização está intimamente relacionada com outras compreensões, como é o caso de [C1] f é contínua em x_0 se $x_0 \in D_f$, [C4] A descontinuidade em x_0 representa um “buraco” nesse ponto, [C5] A descontinuidade no ponto implica em “salto” no gráfico da função, [C6]

f é contínua se não apresentar “saltos” ou “buracos” em sua representação gráfica, e [C7] Uma reta assíntota representa descontinuidade na função.

Ressalta-se, também, que a relação entre limite e continuidade também se fez presente dentre as compreensões evocadas pelos sujeitos investigados no estudo de Messias (2018). Esse foi o caso de [C2] A continuidade de uma função em um ponto depende da existência do limite nesse ponto, [C3] A existência do limite independe da continuidade da função no ponto e [C9] Descontinuidade em x_0 implica na não existência do limite quando $x \rightarrow x_0$.

Frente às compreensões mencionadas, avaliou-se algumas possibilidades no que tange ao processo de apreensão do conceito de continuidade:

- Desvincular o objeto continuidade de uma concepção natural, em que se identifica a ideia de “inteireza”, “fluidez”, “conectividade”. Isso porque, esse tipo de percepção leva os estudantes à compreensão de que a continuidade no ponto p está associada à ausência de saltos ou buracos neste ponto, o que pode conduzi-los ao erro, caso não seja averiguado, inicialmente, se $p \in D_f$.
- Admite-se ser importante levantar questionamentos aos estudantes semelhantes aos realizados nas pesquisas de Amatangelo (2013) e Messias (2018), ou seja, solicitar que o sujeito reflita se é possível desenhar o gráfico de uma função, de maneira que o limite exista quando $x \rightarrow x_0$ exista e que (i) a função seja descontínua em $x = x_0$, (ii) a função seja contínua em $x = x_0$, (iii) a função não seja definida em $x = x_0$, e (iv) que a função seja definida em $x = x_0$. Por meio de tarefas semelhantes a essa, espera-se construir uma base de raciocínio para a construção efetiva da definição de continuidade (no ponto e no intervalo) e sua relação com o conceito de limite e com o domínio da função.
- Promover reflexões acerca do domínio da função. Nessa perspectiva, torna-se necessário levantar questionamentos sobre a relação entre o Domínio, Limite e Continuidade da Função em um ponto ou intervalo. Sendo assim, é esperado que questionamentos do tipo: “É possível avaliar a continuidade em um ponto se este não está definido no domínio da função?”, “Saltos e buracos implicam, unicamente e necessariamente, a descontinuidade em determinado ponto?”, dentre outros:
- Avaliar a continuidade de diferentes funções a partir de suas representações gráficas

e formam algébricas. Dessa maneira, os estudantes podem desenvolver uma compreensão sobre continuidade (no ponto ou intervalo) pautada, efetivamente, nas condições para tal.

- Continuidade no ponto e continuidade no intervalo: identificá-las por meio da representação gráfica e analítica das funções e, a partir delas, auxiliar os estudantes a compreender a diferença entre continuidade no ponto e em um intervalo e quais as implicações do domínio da função em ambas as situações.
- Discutir, em diferentes contextos, inclusive por meio da definição formal, a relação entre domínio, limite e continuidade, uma vez que esta tem se configurado como um fator de conflito em potencial no contexto dos cursos de Cálculo.

Tendo em vista esses aspectos, elaborou-se uma Decomposição Genética, a qual foi constituída por múltiplas construções mentais (que julgamos ser) necessárias para a apreensão do conceito de continuidade de uma função de uma variável real, conforme destacado na figura 3.

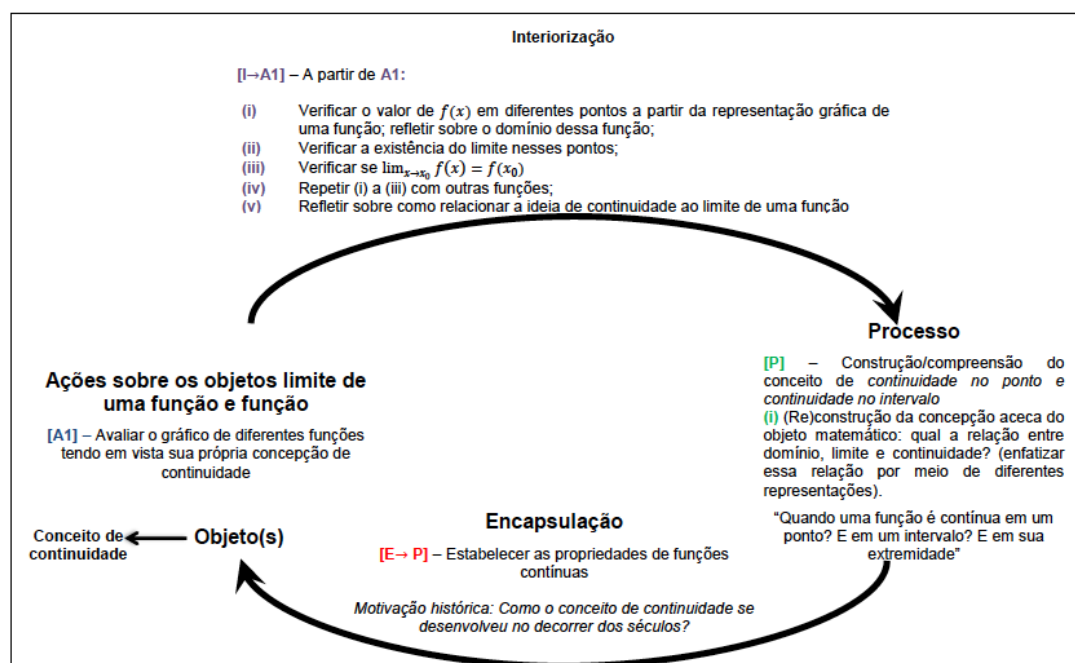


Figura 3: Decomposição Genética para Continuidade de uma Função
Fonte: Messias (2018, p. 167)

Conjeturou-se, no Esquema da figura 3, sobre construções que pudessem viabilizar a apreensão do objeto Continuidade de uma Função. Partiu-se, para tanto, da relação deste conceito com os de função e limite que, neste caso, foram considerados Objetos pré-definidos, ou seja, conhecimentos prévios necessários para a apreensão da ideia de continuidade.

A Ação [A1] parte da compreensão geométrica de diferentes funções tendo em vista a concepção prévia (intuitiva e, provavelmente, natural) do sujeito sobre continuidade. É possível que imagens conceituais incoerentes sejam evocadas, fato que pode permitir que o professor esteja ciente dos elementos que, provavelmente, nortearão o entendimento do indivíduo acerca desse conceito. Optou-se, nesse momento, por incorporar somente a perspectiva geométrica, uma vez que o foco de [A1] esteve fortemente ligado ao modo como uma função pode ser “visualizada” em se tratando das possíveis percepções que um indivíduo apresente sobre continuidade.

Uma vez levantados diferentes elementos constituintes da concepção prévia (intuitiva e, provavelmente, natural) de um sujeito sobre continuidade, julga-se necessário confrontá-los com conhecimentos da teoria formal que estejam vinculados a esse conceito. Considerou-se fundamental, nesse sentido, que o mecanismo de interiorização de [A1], isto é [I → A1], seja estruturado de modo a levar o indivíduo a refletir acerca de aspectos como domínio, valor da função no ponto, existência de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, assíntotas verticais e horizontais, de modo a refletir se a ideia de continuidade está (ou não) relacionada a tais objetos. É possível, a partir de [I → A1], que uma concepção previamente evocada sobre esse conceito seja “descartada” ou (re)construída, tendo em vista quaisquer reflexões que sejam efetivadas.

A expectativa para [P] é a de que o indivíduo, mediante as ações internalizadas, consiga realizar uma (re) construção sobre a ideia de continuidade, de maneira a produzir significados para esse conceito, tanto no que se refere a um determinado ponto domínio da função quanto ao longo de um intervalo e, principalmente, relacioná-la (de forma clara e consciente) com o objeto limite de uma função. Entende-se que, nesse momento, seja preciso que múltiplas representações sejam incorporadas a essa (re) construção, fato que pode possibilitar que o sujeito adquira não somente uma compreensão puramente geométrica do conceito, mas também que ele escreva uma definição mais precisa para continuidade no ponto ou em um intervalo.

Na Encapsulação, isto é, [E → P], propõe-se levantar uma discussão acerca de propriedades de funções contínuas, bem como sobre o desenvolvimento histórico da ideia de continuidade, relacionando-o com o que é, atualmente, estabelecido pela comunidade científica⁴. Conjectura-se que, dessa maneira, seja possível ampliar a compreensão do

⁴Como exemplo, é possível solicitar a um indivíduo que avalie se a concepção de Euler sobre continuidade está em acordo com o que é definido na teoria formal. E, a partir de suas considerações, (re) construir esse

indivíduo sobre esse conceito em meio a diferentes contextos, representações e, inclusive, concepções inerentes à sua construção histórica.

O conceito de continuidade de uma função está historicamente atrelado à equívocos conceituais. Jayakody (2015) e Jayakody e Zazkis (2015) destacaram que Euler, por exemplo, tinha a compreensão de que uma função era contínua se esta fosse escrita em uma única sentença. Há registros que Leibniz condicionava a existência do limite no ponto à continuidade da função nesse ponto. Esses tipos de equívocos também foram destacado por Brandemberg e Messias (2016), Messias (2018) e Messias e Brandemberg (2021), já que são interpretações comumente mobilizadas por estudantes em cursos de Cálculo.

Reitera-se que a Decomposição Genética sugerida, enquanto modelo de epistemologia e cognição matemática, foi elaborada a partir das experiências dos autores, dos apontamentos da literatura sobre a compreensão de estudantes no que se refere à continuidade, bem como do aprofundamento teórico relativo à teoria APOS. Incluiu-se, ainda, alguns aspectos concernentes ao desenvolvimento histórico do referido conceito.

Um fator relevante sobre a Decomposição Genética é que, a partir dela, é possível prever situações de aprendizagem que possam levar os estudantes à múltiplas representações e cenários envolvendo o conceito de continuidade. Desse modo, espera-se que não haja generalizações precipitadas de contextos específicos, mesmo sendo possível partir delas para que, gradativamente, a compreensão sobre esse conceito seja ampliada.

Entende-se, portanto, que quaisquer equívocos, especialmente aqueles inerentes à natureza do conceito, devem ser considerados no âmbito de uma Decomposição Genética, já que tais equívocos se configuram, muitas vezes, como conhecimentos locais ou seja, têm limitações, porém seus limites e campos de validade podem fornecer aos estudantes pontos de apoio para avançar em direção de conhecimentos menos locais (Leonard & Sackur apud Almouloud, 2007).

Ressalta-se, finalmente, a relevância desse estudo, por meio do qual foi possível traçar reflexões sobre os elementos que possam ser vinculados ao processo de apreensão do conceito de continuidade, de modo a possibilitar uma aprendizagem efetiva desse conhecimento em uma pluralidade de contextos matemáticos.

conceito, ampliando sua compreensão, de modo a alcançar o máximo de abstração possível sobre esse objeto matemático.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Contemplou-se, nesse trabalho, um estudo cujo objetivo foi investigar que estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos por um indivíduo para potencializar sua compreensão sobre continuidade de uma função. Tal objetivo foi norteado pela seguinte pergunta: Que estruturas e mecanismos mentais devem ser construídos por estudantes de maneira a viabilizar a compreensão do conceito de continuidade de função de uma variável real?

Para responder a essa pergunta, elaborou-se uma decomposição genética para o conceito de continuidade. Por meio desse modelo, foram traçadas reflexões sobre uma pluralidade de construções mentais, necessárias e relevantes para que um indivíduo compreenda efetivamente os objetos envolvidos na DG.

A Decomposição Genética foi constituída de um Esquema, por meio do qual previu-se a construção do Objeto Continuidade, associado à Ações, Processos e a outros Objetos, conforme descrito na seção anterior. Nessa perspectiva, entende-se que os estudantes precisam, inicialmente, realizar Ações sobre os objetos função, domínio e limite de função, interiorizando-as mediante tarefas que explorem tanto o contexto algébrico quanto geométrico. É importante, nesse sentido, que sejam explorados o máximo de cenários possível tanto sobre continuidade em um ponto e em determinado intervalo e, para tanto, pode-se fazer uso de motivações históricas, sobretudo, em relação às múltiplas percepções associadas a esse objeto no decorrer de seu processo de desenvolvimento histórico-conceitual.

Reitera-se, ainda, que esse trabalho contém importantes contribuições para futuros estudos sobre o tema abordado, bem como para a elaboração de instrumentos avaliativos e materiais instrucionais sobre a aprendizagem do conceito de continuidade. Ressalta-se a importância de ter trazido para discussão elementos concernentes à teoria APOS, fato que pode contribuir para a expansão de pesquisas que contemplem essa perspectiva teórica e articulem-na à aprendizagem de diferentes conceitos matemáticos.

Salienta-se, por fim, a relevância desse trabalho em estudos efetivados no âmbito da Educação Matemática, especialmente, em se tratando da compreensão do conceito de continuidade, o qual é de grande importância para a aprendizagem de outros conceitos pertencentes à esfera de conhecimentos do Cálculo.

REFERÊNCIAS

- Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: Editora UFPR.
- Amatangelo, M. L. (2013). *Student understanding of limit and continuity at a point: a look at four potentially problematic conceptions* (Mestrado em Artes), Brigham Young University (Utah/USA).
- Arnon et al (2014). *APOS Theory – a framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
- Brandemberg, J. C. (2010) Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo. São Paulo: Livraria da Física (ED).
- Messias, M. A. V. F. (2013). Um estudo exploratório sobre a imagem conceitual de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função [Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Pará]. Repositório Institucional UFPA
- Messias, M. A. V. F. (2018). Teorias cognitivas do pensamento matemático avançado e o processo de construção do conhecimento: Um estudo envolvendo os conceitos de limite e continuidade [Tese de doutorado, Universidade Federal do Pará]. Repositório Institucional UFPA.
- Messias, M. A. de V. F., & Brandemberg, J. C. (2023). Um olhar sobre a psicologia da aprendizagem em matemática no contexto de teorias cognitivas do pensamento matemático avançado. REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, 11(1), Artigo e23091.
- Messias, M. A. de V. F., & Brandemberg, J. C. (2021). Uma decomposição genética para o objeto matemático limite de uma função. Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, 17(38), 121–138.
- Messias, M. A. V. F., & Brandemberg, J. C. (2015). Discussões sobre a relação entre limite e continuidade de uma função: Investigando imagens conceituais. BOLEMA, 29(53), 1224–1241.
- Denbel, D.G. (2014). Students misconceptions of the limit concept in a first Calculus course. *Journal of Education and Practice*, 34. pp. 24 – 41.
- Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. Kluwer publications.
- Dubinsky, E. & Wellwe, K. & McDonald, M. & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An Apos analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 10(60), pp. 253 – 266. Doi: 10.1007/s10649-005-0473-0.
- Vinner, S (1987). Continuous functions and reasoning in college students. In Bergeron, J. (ED) *Proceedings of the international conference on the psychology of mathematics education* (p.177-183). Montreal, CA.

Karatas et al (2011). A cross-age study of students' understanding of limit and continuity concepts. *BOLEMA*, 24(38), p. 245 a 264.

Jayakody, G. (2015) *University first year students' discourse on continuous functions: A commognitive interpretation* (Doutorado em filosofia), Simon Fraser University.

Jayakody, G. & Zazkis, R. (2015). Continuous problem of function continuity. *For the Learning of Mathematics*, 35, p. 8 – 14.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2010). Construcción de una decomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latino-americana de Investigación Matemática Educativa*, 13 pp. 89-112.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, p. 151 – 169.

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA

Uma decomposição genética para continuidade de função de uma variável real

Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias

Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas

Professora Adjunta na Universidade Federal do Pará, Faculdade de Matemática, Salinópolis (PA), Brasil

alicemessias@ufpa.br

 <https://orcid.org/0000-0003-2853-1965>

João Cláudio Brandemberg

Doutora em Educação

Professor Titular da Universidade Federal do Pará, Faculdade de Matemática, Belém (PA), Brasil

brand@ufpa.br

 <https://orcid.org/0000-0001-8848-3550>

Endereço de correspondência do principal autor

Trav. dos Apinagés, 398, 66033-170, Belém, PA, Brasil.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

Concepção e elaboração do manuscrito: M. A. V. F. Messias; J. C. Brandemberg

Coleta de dados: M. A. V. F. Messias

Análise de dados: M. A. V. F. Messias

Discussão dos resultados: M. A. V. F. Messias

Revisão e aprovação: J. C. Brandemberg

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO

Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM

Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES

Não se aplica.



LICENÇA DE USO – uso exclusivo da revista

Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution](#) (CC BY) 4.0 International. Esta licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista

Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EQUIPE EDITORIAL – uso exclusivo da revista

Dr. Mércles Thadeu Moretti
Dra. Rosilene Beatriz Machado
Dra. Débora Regina Wagner
Dr. Eduardo Sabel
Dra. Karina Zolia Jacomelli Alves
Dra. Barbara Cristina Pasa

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista

Recebido em: 26-04-2024 – Aprovado em: 08-06-2026